ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2010, том 46, № 6, с. 859–873

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.983.53

О ВОЗМУЩЕНИИ АБСТРАКТНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩЕГО ДРОБНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ РИМАНА–ЛИУВИЛЛЯ

© 2010 г. Х. К. Авад, А. В. Глушак

В банаховом пространстве рассматривается задача типа Коши. В предположении, что соответствующая задача типа Коши с оператором A равномерно корректна, а оператор $B(t)$ в некотором смысле подчинен оператору A, устанавливается однозначная разрешимость рассматриваемой задачи и ее непрерывная зависимость от начальных данных.

В банаховом пространстве E рассмотрим задачу типа Коши

$$D^{\alpha}u(t) = Au(t) + B(t)u(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

$$\lim_{t\to 0} D^{\alpha-1}u(t) = u_0, \tag{2}$$

где $0 < \alpha < 1$, $D^{\alpha-1}u(t) = I^{1-\alpha}u(t) = (1/\Gamma(1-\alpha))\int_0^t (t-s)^{-\alpha}u(s)\,ds$ – левосторонний дробный интеграл Римана–Лиувилля порядка $1-\alpha$ ($I^{1-\alpha}$ – тождественный оператор при $\alpha = 1$), $D^{\alpha}u(t) = \dfrac{d}{dt}I^{1-\alpha}u(t)$ – левосторонняя дробная производная Римана–Лиувилля порядка α, $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция, A – линейный, замкнутый, плотно определенный оператор, наконец, $B(t)$ – также линейный, замкнутый, плотно определенный, но уже переменный и, вообще говоря, неограниченный оператор, рассматриваемый как возмущение оператора A.

Излагаемые ниже результаты примыкают к теории возмущений генераторов полугрупп (см. [1, гл. 9]). Рассматривается вопрос о том, как отражается на разрешимости задачи (1), (2) добавление слагаемого, содержащего оператор $B(t)$, который в некотором смысле подчинен оператору A. Будут указаны условия, при выполнении которых корректность задачи сохранится и после возмущения оператора A неограниченным оператором $B(t)$.

Для абстрактных дифференциальных уравнений, содержащих дробные производные Римана–Лиувилля, результаты о разрешимости возмущенных уравнений получены впервые. Такого вида задачи являются актуальными в связи с многочисленными приложениями теории дифференциальных уравнений дробного порядка в физике и математическом моделировании. Такие приложения могут быть найдены в [2, гл. 8; 3, гл. 5; 4, гл. 8].

Наряду с задачей (1), (2) для $1 \ge \beta \ge \alpha$ рассмотрим невозмущенную задачу

$$D^{\beta}u(t) = Au(t), \quad t > 0, \tag{3}$$

$$\lim_{t\to 0} D^{\beta-1}u(t) = u_0. \tag{4}$$

Определение 1. Решением задачи (3), (4) называется непрерывная при $t > 0$ функция $u(t)$ такая, что $I^{1-\beta}u(t)$ представляет собой непрерывно дифференцируемую при $t > 0$ функцию, функция $u(t)$ принимает значения в $D(A)$ ($D(A)$ – область определения оператора A) и удовлетворяет задаче (3), (4).

Определение 2. Задача (3), (4) называется равномерно корректной, если существуют заданная на E, коммутирующая с A операторная функция $T_{\beta}(t)$ и числа $M_1 > 0$, $\omega \in R$ такие, что для любого $u_0 \in D(A)$ функция $T_{\beta}(t)u_0$ является ее единственным решением и при этом

$$\|T_{\beta}(t)\| \le M_1 t^{\beta-1}e^{\omega t}. \tag{5}$$

Согласно определению 2, задача (3), (4) равномерно корректна, если решение этой задачи существует, единственно и, как следует из (5), непрерывно зависит от начальных данных равномерно по t из любого компакта в $(0,\infty)$. Помимо этих обычных требований определение 2 содержит дополнительную информацию о поведении решения при $t\to 0$ и $t\to\infty$ (неравенство (5)).

Сформулируем далее условия, при которых будет установлена однозначная разрешимость задачи (1), (2).

Условие 1. Оператор A такой, что при некотором β, удовлетворяющем неравенству $\alpha\le\beta\le 1$, равномерно корректна задача (3), (4), $u_0\in D(A)$.

Отметим, что при $0<\beta<1$ равномерная корректность задачи (3), (4) исследовалась в [5–7], а при $\beta=1$ для равномерной корректности задачи Коши требуется, чтобы оператор A был генератором C_0-полугруппы.

Условие 2. i) Оператор $B(t)$ имеет не зависящую от t область определения D и при этом $D(A)\subset D$.

ii) Для любого $x\in D$ функция $B(t)x$ принадлежит $C((0,\infty),E)$, абсолютно интегрируема в нуле, принимает значения в $D(A)$, $AB(t)x\in C((0,\infty),E)$ и также абсолютно интегрируема в нуле.

iii) Для любого $x\in E$ существуют постоянные $M_2>0$, $\gamma\in[0,1)$, $\omega\in R$ такие, что $T_\beta(\tau)x\in D$ (эффект сглаживания) и

$$\|B(t)T_\beta(\tau)x\|\le M_2\tau^{-\gamma}e^{\omega\tau}\|x\|,\quad t,\tau\in(0,\infty). \tag{6}$$

Заметим, что если оператор $-A$ является сильно позитивным (терминология заимствована из [8]), т.е. если

$$\|(\lambda I-A)^{-1}\|\le\frac{M_3}{1+|\lambda|},\quad \operatorname{Re}\lambda\ge 0,\quad M_3>0,$$

то в условии 1 можно взять $\beta=1$, при этом $\omega=0$, а неравенство (6) означает, что оператор $B(t)$ подчинен дробной степени $(-A)^\gamma$ (см. [8, с. 298]).

Если оператор $B(t)$ ограничен, а оператор A удовлетворяет условию 1, то неравенство (6) справедливо при $\gamma=1-\beta$.

Перестановочность операторов A и $B(t)$ не предполагается. Как будет доказано в дальнейшем, условия 1, 2 обеспечат однозначную разрешимость задачи (1), (2).

При доказательстве нами будет использована неотрицательная функция (см. [9, с. 357])

$$f_{\tau,\nu}(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\exp(tz-\tau z^\nu)\,dz, & t\ge 0,\\ 0, & t<0,\end{cases} \tag{7}$$

где $\sigma>0$, $\tau>0$, $0<\nu<1$ и ветвь функции z^ν выбрана так, что $\operatorname{Re}z^\nu>0$ при $\operatorname{Re}z>0$. Эта ветвь является однозначной функцией на комплексной z-плоскости с разрезом по отрицательной части вещественной оси. Сходимость интеграла (7) обеспечивается множителем $\exp(-\tau z^\nu)$.

Заметим также, что функция $f_{\tau,\nu}(t)$ при $t>0$ может быть выражена через функцию Райта (см. [4, с. 54])

$$f_{\tau,\nu}(t)=t^{-1}\phi(-\nu,0;-\tau t^{-\nu}),\quad \phi(a,b;z)=\sum_{k=0}^\infty\frac{z^k}{k!\,\Gamma(ak+b)},$$

или через более общую функцию типа Райта (см. [10, гл. 1])

$$f_{\tau,\nu}(t)=t^{-1}e^{1,0}_{1,\nu}(-\tau t^{-\nu}),\quad e^{\mu,\delta}_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^\infty\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\mu)\Gamma(\delta-\beta k)},\quad \alpha>\max\{0;\beta\},\quad \mu,z\in C. \tag{8}$$

В следующей теореме мы установим, что из равномерной корректности задачи (3), (4) будет следовать равномерная корректность соответствующей задачи типа Коши для уравнения порядка α, где $0 < \alpha < \beta \le 1$.

Теорема 1. *Пусть* $\alpha < \beta \le 1$ *и выполнено условие 1. Тогда задача*

$$D^{\alpha} u(t) = A u(t), \quad t > 0, \tag{9}$$

$$\lim_{t \to 0} D^{\alpha - 1} u(t) = u_0 \tag{10}$$

равномерно корректна и ее разрешающий оператор имеет вид

$$T_{\alpha}(t) u_0 = \int_0^{\infty} f_{\tau,\nu}(t) T_{\beta}(\tau) u_0 \, d\tau, \tag{11}$$

где $\nu = \alpha/\beta$, *а функция* $f_{\tau,\nu}(t)$ *определяется равенством (7).*

Доказательство. Отметим, что сходимость интеграла в (11) вытекает из оценки (5) и следующего неравенства для функции Райта (см. [10, лемма 1.2.7]):

$$\phi(-\nu, 0; -x) \le M_4 (1 + x^n) \exp(-\rho x^{1/(1-\nu)}),$$

$$n \in \boldsymbol{N}, \quad n \ge \frac{1}{1-\nu}, \quad \rho = (1-\nu)\nu^{\nu/(1-\nu)}, \quad x \ge 0.$$

Для доказательства того, что определяемая равенством (11) функция $T_{\alpha}(t) u_0$ является решением задачи (9), (10), можно воспользоваться соотношениями

$$D^{\alpha} \int_0^{\infty} f_{\tau,\nu}(t) T_{\beta}(\tau) u_0 \, d\tau = \int_0^{\infty} f_{\tau,\nu}(t) D^{\beta} T_{\beta}(\tau) u_0 \, d\tau = A T_{\alpha}(t) u_0,$$

$$\lim_{t \to 0} D^{\alpha - 1} \int_0^{\infty} f_{\tau,\nu}(t) T_{\beta}(\tau) u_0 \, d\tau = u_0,$$

которые являются частным случаем формул (2.2.18) и (2.2.28), установленных в [10] для числовых функций. Их доказательство для абстрактных функций проводится аналогично.

Учитывая равенства (см. [10, формулы (2.2.3), (2.2.31)])

$$\int_0^{\infty} f_{\tau,\nu}(t) \tau^{\beta - 1} \, d\tau = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\nu\beta)} t^{\nu\beta - 1}, \quad \int_0^{\infty} f_{\tau,\nu}(t) e^{\omega\tau} \, d\tau = t^{\nu - 1} E_{\nu,\nu}(\omega t^{\nu}),$$

где $E_{\mu,\rho}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k / \Gamma(\mu k + \rho)$ – функция типа Миттаг–Леффлера (см., например, [2, с. 33]), будем иметь

$$\|T_{\alpha}(t)\| \le \int_0^{\infty} f_{\tau,\nu}(t) \|T_{\beta}(\tau)\| \, d\tau \le M_1 \int_0^{\infty} f_{\tau,\nu}(t) \, \tau^{\beta - 1} e^{\omega\tau} \, d\tau \le$$

$$\le M_5 \int_0^{\infty} f_{\tau,\nu}(t) \tau^{\beta - 1} \, d\tau + M_5 \int_0^{\infty} f_{\tau,\nu}(t) e^{\omega\tau} \, d\tau = M_5 \left(\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\nu\beta)} t^{\alpha - 1} + t^{\nu - 1} E_{\nu,\nu}(\omega t^{\nu}) \right). \tag{12}$$

В силу известного (см. [11, с. 134]) асимптотического поведения функции Миттаг–Леффлера при $0 < \mu < 2$

$$E_{\mu,\rho}(z) = \frac{1}{\mu} z^{(1-\rho)/\mu} \exp(z^{1/\mu}) - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\Gamma(\rho - \mu j) z^j} + O\left(\frac{1}{|z|^{n+1}} \right), \quad z \in R, \quad z \to +\infty, \tag{13}$$

из (12) выводим неравенство

$$\|T_\alpha(t)\| \le M_6 t^{\alpha-1}\exp(\omega_0 t), \quad \omega_0 > \omega^{1/\nu}. \tag{14}$$

Таким образом, чтобы завершить доказательство теоремы, согласно определению 2, нам осталось установить единственность решения задачи (9), (10). Пусть $u_1(t)$ и $u_2(t)$ – два различных решения задачи (9), (10), удовлетворяющие неравенству (5). Тогда

$$\lambda^\alpha L(u_1(t)-u_2(t)) = AL(u_1(t)-u_2(t)),$$

где L – преобразование Лапласа. Тем самым мы пришли к противоречию, поскольку при $L(u_1(t)-u_2(t)) \ne 0$ все точки λ^α, для которых $\operatorname{Re}\lambda > \omega$, будут принадлежать точечному спектру оператора A, чего не может быть, так как в силу необходимого условия равномерной корректности [6] эти точки должны быть регулярными. Теорема доказана.

Замечание 1. В частном случае $\nu = \alpha/\beta = 1/2$ имеем (см. [9, с. 369, формула (32)])

$$f_{\tau,1/2}(t) = \frac{\tau}{2t\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{\tau^2}{4t}\right),$$

и равенство (11) принимает вид

$$T_{\beta/2}(t)u_0 = \frac{1}{2t\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^\infty \tau\exp\left(-\frac{\tau^2}{4t}\right)T_\beta(\tau)u_0\,d\tau. \tag{15}$$

Представление (15) может обеспечить эффект сглаживания (см. условие 2iii)) для разрешающего оператора $T_{\beta/2}(t)$ в случае, когда для оператора $T_\beta(t)$ его не было, например, если операторы A и B дифференциальные.

Сформулируем теорему о разрешимости задачи типа Коши для неоднородного уравнения.

Теорема 2. *Пусть* $\beta < 1$, *выполнено условие 1, а функция* $h(t) \in C((0,\infty),E)$ *абсолютно интегрируема в нуле, принимает значения в* $D(A)$, $Ah(t) \in C((0,\infty),E)$ *и также абсолютно интегрируема в нуле. Тогда задача*

$$D^\beta u(t) = Au(t) + h(t), \quad t > 0, \tag{16}$$

$$\lim_{t\to 0} D^{\beta-1}u(t) = u_0 \tag{17}$$

имеет единственное решение, которое определяется равенством

$$u(t) = T_\beta(t)u_0 + \int\limits_0^t T_\beta(t-\xi)h(\xi)\,d\xi. \tag{18}$$

Доказательство. Достаточно проверить, что функция

$$v(t) = \int\limits_0^t T_\beta(t-\xi)h(\xi)\,d\xi$$

удовлетворяет уравнению (16) и нулевому начальному условию (17). При $t > 0$ имеем

$$D^\beta v(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t (t-\tau)^{-\beta}\,d\tau\int\limits_0^\tau T_\beta(\tau-\xi)h(\xi)\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{d}{dt} \int_0^t d\xi \int_\xi^t (t-\tau)^{-\beta} T_\beta(\tau-\xi) h(\xi)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{d}{dt} \int_0^t d\xi \int_0^{t-\xi} (t-\xi-x)^{-\beta} T_\beta(x) h(\xi)\, dx.$$

Поскольку под знаком интеграла по ξ находится непрерывная по $t-\xi$ функция, то

$$D^\beta v(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \lim_{\xi\to t} \int_0^{t-\xi} (t-\xi-x)^{-\beta} T_\beta(x) h(\xi)\, dx +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t d\xi \frac{d}{dt} \int_0^{t-\xi} (t-\xi-x)^{-\beta} T_\beta(x) h(\xi)\, dx =$$

$$= \lim_{t-\xi\to+0} D^{\beta-1} T_\beta(t-\xi) h(\xi) + \int_0^t D^\beta T_\beta(t-\xi) h(\xi)\, d\xi =$$

$$= h(t) + \int_0^t T_\beta(t-\xi) A h(\xi)\, d\xi = h(t) + Av(t),$$

следовательно, функция $v(t)$ удовлетворяет уравнению (16).

Проверим далее, что функция $v(t)$ удовлетворяет нулевому начальному условию (17). Имеем

$$\lim_{t\to+0} D^{\beta-1} v(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \lim_{t\to+0} \int_0^t (t-\tau)^{-\beta}\, d\tau \int_0^\tau T_\beta(\tau-\xi) h(\xi)\, d\xi.$$

Поскольку для $T_\beta(t)$ справедлива оценка (5), то для $t \in [0,1]$

$$\left\| \int_0^t (t-\tau)^{-\beta}\, d\tau \int_0^\tau T_\beta(\tau-\xi) h(\xi)\, d\xi \right\| \le$$

$$\le M_1 \int_0^t (t-\tau)^{-\beta}\, d\tau \int_0^\tau (\tau-\xi)^{\beta-1} \|h(\xi)\|\, d\xi = M_1 B(\beta, 1-\beta) \int_0^t \|h(\xi)\|\, d\xi,$$

где $B(\cdot,\cdot)$ – бета-функция. Следовательно, функция $v(t)$ удовлетворяет нулевому начальному условию (17). Теорема доказана.

Замечание 2. В работе [12] теорема о разрешимости задачи типа Коши для неоднородного уравнения (16) установлена в предположении, что функция $h(t)$ имеет суммируемую в смысле определения 2.4 [2] дробную производную $D^\beta h(t)$. Нетрудно убедиться в том, что этим требованием можно заменить условие 2ii) в доказываемых ниже утверждениях.

Теорема 3. *Пусть $\alpha < \beta \le 1$ и выполнены условия 1, 2. Тогда задача (1), (2) имеет единственное решение и существуют такие постоянные $M > 0$, $\omega_1 > \omega^{1/\nu}$, что справедлива оценка*

$$\|u(t)\| \le M t^{\alpha-1} e^{\omega_1 t} \|u_0\|. \tag{19}$$

Доказательство. Учитывая теоремы 1 и 2, задачу (1), (2) сведем к интегральному уравнению, которое в силу (11), (18) запишем в виде

$$u(t)=\int_0^\infty f_{\tau,\nu}(t)T_\beta(\tau)u_0\,d\tau+\int_0^t\int_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s)T_\beta(\tau)B(s)u(s)\,d\tau\,ds, \tag{20}$$

где $u_0,\ T_\beta(\tau)u_0\in D(A)\subset D,\ \ \nu=\alpha/\beta.$ Обозначив $w(t)=B(t)u(t),$ получим уравнение

$$w(t)=\int_0^\infty f_{\tau,\nu}(t)B(t)T_\beta(\tau)u_0\,d\tau+\int_0^t\int_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s)B(t)T_\beta(\tau)w(s)\,d\tau\,ds. \tag{21}$$

Для решения интегрального уравнения (21) применим метод последовательных приближений, положив

$$w_0(t)=0,\quad w_1(t)=\int_0^\infty f_{\tau,\nu}(t)B(t)T_\beta(\tau)u_0\,d\tau,$$

$$w_{n+1}(t)=\int_0^\infty f_{\tau,\nu}(t)B(t)T_\beta(\tau)u_0\,d\tau+\int_0^t\int_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s)B(t)T_\beta(\tau)w_n(s)\,d\tau\,ds,\quad n\in N.$$

Используя неравенство (6), оценим норму разности:

$$\|w_2(t)-w_1(t)\|\le\int_0^t\int_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s)\|B(t)T_\beta(\tau)w_1(s)\|\,d\tau\,ds\le$$

$$\le M_2^2\|u_0\|\int_0^t\int_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s)\tau^{-\gamma}e^{\omega\tau}\int_0^\infty f_{\xi,\nu}(s)\xi^{-\gamma}e^{\omega\xi}\,d\xi\,d\tau\,ds. \tag{22}$$

Заменив в неравенствах (12), (14) β на $1-\gamma,$ получим оценку

$$\int_0^\infty f_{\xi,\nu}(s)\xi^{-\gamma}e^{\omega\xi}\,d\xi\le Cs^{\nu(1-\gamma)-1}e^{\omega_2 s},\quad \omega_2>\omega^{1/\nu}. \tag{23}$$

Дважды применяя оценку (23) в неравенстве (22) и вычисляя полученный интеграл [13, 2.2.5.1], будем иметь

$$\|w_2(t)-w_1(t)\|\le CM_2^2\|u_0\|\int_0^t\int_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s)\tau^{-\gamma}e^{\omega\tau}s^{\nu(1-\gamma)-1}e^{\omega_2 s}\,d\tau\,ds\le$$

$$\le C^2M_2^2\|u_0\|\int_0^t(t-s)^{\nu(1-\gamma)-1}e^{\omega_2(t-s)}s^{\nu(1-\gamma)-1}e^{\omega_2 s}\,ds=$$

$$=C^2M_2^2e^{\omega_2 t}\|u_0\|\int_0^t(t-s)^{\nu(1-\gamma)-1}s^{\nu(1-\gamma)-1}\,ds=\frac{C^2M_2^2\Gamma^2(\nu(1-\gamma))}{\Gamma(2\nu(1-\gamma))}\,t^{2\nu(1-\gamma)-1}e^{\omega_2 t}\|u_0\|. \tag{24}$$

Учитывая (24), по индукции получаем неравенство

$$\|w_n(t)-w_{n-1}(t)\| \le \frac{C^n M_2^n \Gamma^n(\nu(1-\gamma))}{\Gamma(n\nu(1-\gamma))}\, t^{n\nu(1-\gamma)-1} e^{\omega_2 t}\|u_0\|, \quad n \in N. \tag{25}$$

Действительно, пусть формула (25) верна при $n = m$. Тогда из неравенств (6), (23) и предположения индукции имеем

$$\|w_{m+1}(t)-w_m(t)\| \le \int\limits_0^t \int\limits_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s)\|B(t)T_\beta(\tau)(w_m(s)-w_{m-1}(s))\|\,d\tau\,ds \le$$

$$\le \frac{C^m M_2^{m+1}\Gamma^m(\nu(1-\gamma))\|u_0\|}{\Gamma(m\nu(1-\gamma))} \int\limits_0^t \int\limits_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s)\tau^{-\gamma} s^{m\nu(1-\gamma)-1} e^{\omega_2 s}\,d\tau\,ds \le$$

$$= \frac{C^{m+1} M_2^{m+1}\Gamma^m(\nu(1-\gamma))\|u_0\|}{\Gamma(m\nu(1-\gamma))} \int\limits_0^t (t-s)^{\nu(1-\gamma)-1} e^{\omega_2(t-s)} s^{m\nu(1-\gamma)-1} e^{\omega_2 s}\,ds =$$

$$= \frac{C^{m+1} M_2^{m+1}\Gamma^{m+1}(\nu(1-\gamma))}{\Gamma((m+1)\nu(1-\gamma))}\, t^{(m+1)\nu(1-\gamma)-1} e^{\omega_2 t}\|u_0\|,$$

что и доказывает формулу (25).

Следовательно, ряд

$$\sum_{n=1}^\infty (w_n(t)-w_{n-1}(t))$$

сходится равномерно в любом интервале $[t_0,t_1]$, $0<t_0<t_1$. Поэтому $w_n(t)$ на том же промежутке равномерно сходится к непрерывной на $[t_0,t_1]$ функции $w(t)$, которая удовлетворяет интегральному уравнению (21). В силу (25) для нее справедлива оценка

$$\|w(t)\| \le \sum_{n=1}^\infty \|w_n(t)-w_{n-1}(t)\| \le \sum_{k=0}^\infty \frac{C^{k+1} M_2^{k+1}\Gamma^{k+1}(\nu(1-\gamma)) t^{(k+1)\nu(1-\gamma)-1} e^{\omega_2 t}\|u_0\|}{\Gamma((k+1)\nu(1-\gamma))} \le$$

$$\le CM_2\Gamma(\nu(1-\gamma)) t^{\nu(1-\gamma)-1} e^{\omega_2 t} \sum_{k=0}^\infty \frac{C^k M_2^k \Gamma^k(\nu(1-\gamma)) t^{k\nu(1-\gamma)}\|u_0\|}{\Gamma(k\nu(1-\gamma)+\nu(1-\gamma))} =$$

$$= CM_2\Gamma(\nu(1-\gamma)) t^{\nu(1-\gamma)-1} e^{\omega_2 t} E_{\nu(1-\gamma),\nu(1-\gamma)}(CM_2\Gamma(\nu(1-\gamma)) t^{\nu(1-\gamma)})\|u_0\|,$$

где $E_{\mu,\rho}(\cdot)$ – функция типа Миттаг–Леффлера, $t \in [t_0,t_1]$, $0<t_0<t_1$.

Учитывая асимптотическое поведение функции типа Миттаг–Леффлера (13), можем утверждать, что существуют постоянные $C_1>0$ и $\omega_1>\omega_2$, для которых

$$\|w(t)\| \le C_1 t^{\delta-1} e^{\omega_1 t}\|u_0\|, \quad \delta = \nu(1-\gamma) < 1. \tag{26}$$

Поскольку промежуток $[t_0,t_1]$ произвольный, то функция $w(t)$ – непрерывное на $(0,\infty)$ решение уравнения (21), удовлетворяющее на $(0,\infty)$ неравенству (26), т.е. абсолютно интегрируема в нуле. Более того, из равенства (21) и условия 2ii) мы заключаем, что $w(t) \in D(A)$, $Aw(t) \in C((0,\infty),E)$ и $Aw(t)$ абсолютно интегрируема в нуле.

Наконец, из равенства (20) с помощью теоремы 2 мы получаем решение $u(t)$ задачи (1), (2) в виде

$$u(t) = \int\limits_0^\infty f_{\tau,\nu}(t)T_\beta(\tau)u_0\,d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s)T_\beta(\tau)w(s)\,d\tau\,ds,$$

для которого в силу (5), (26) и (23) справедлива оценка

$$\|u(t)\| \le M_1\|u_0\| \int\limits_0^\infty f_{\tau,\nu}(t)\tau^{\beta-1}e^{\omega t}\,d\tau + C_1M_1\|u_0\| \int\limits_0^t \int\limits_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s)\tau^{\beta-1}e^{\omega\tau}s^{\delta-1}e^{\omega_1 s}\,d\tau\,ds \le$$

$$\le CM_1t^{\alpha-1}e^{\omega_2 t}\|u_0\| + CC_1M_1\|u_0\| \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}e^{\omega_2(t-s)}s^{\delta-1}e^{\omega_1 s}\,ds \le$$

$$\le CM_1t^{\alpha-1}e^{\omega_2 t}\|u_0\| + CC_1M_1e^{\omega_1 t}\|u_0\| \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}s^{\delta-1}\,ds \le Mt^{\alpha-1}e^{\omega_1 t}.$$

Установим далее единственность решения задачи (1), (2). Пусть имеется другое решение, которое мы обозначим $U(t)$. Тогда в силу теорем 1 и 2

$$U(t) = \int\limits_0^\infty f_{\tau,\nu}(t)T_\beta(\tau)u_0\,d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s)T_\beta(\tau)W(s)\,d\tau\,ds,$$

где $W(t)$ – решение интегрального уравнения (21).

Докажем единственность решения интегрального уравнения (21) в классе непрерывных на $(0,\infty)$ функций, допускающих оценку (26).

Пусть $b>0$, $t\in(0,b]$. Поскольку мы рассматриваем класс функций, удовлетворяющий неравенству (26), то положим

$$m = \sup_{t\in[0,b]} (t^{1-\delta}e^{-\omega_1 t}\|W(t)-w(t)\|).$$

Разность $W(t)-w(t)$ удовлетворяет уравнению (21) при $u_0=0$, поэтому, учитывая неравенство (23), будем иметь

$$\|W(t)-w(t)\| \le CM_2 \int\limits_0^t (t-s)^{\delta-1}e^{\omega_2(t-s)}\|W(s)-w(s)\|\,ds. \tag{27}$$

Следовательно,

$$\|W(t)-w(t)\| \le CM_2me^{\omega_1 t} \int\limits_0^t (t-s)^{\delta-1}s^{\delta-1}\,ds = CM_2\Gamma(\delta)me^{\omega_1 t}I^\delta(t^{\delta-1}). \tag{28}$$

Подставляя (28) в (27), получаем неравенство

$$\|W(t)-w(t)\| \le C^2M_2^2\Gamma^2(\delta)me^{\omega_1 t}I^{2\delta}(t^{\delta-1}).$$

Продолжая этот процесс, придем к неравенству

$$\|W(t)-w(t)\| \le C^kM_2^k\Gamma^k(\delta)me^{\omega_1 t}I^{k\delta}(t^{\delta-1}) =$$

$$= \frac{C^kM_2^k\Gamma^{k+1}(\delta)}{\Gamma((k+1)\delta)}t^{(k+1)\delta-1}e^{\omega_1 t}m \quad \forall\, k\in N, \tag{29}$$

откуда, переходя к супремуму, получаем неравенство

$$m \le \frac{C^k M_2^k \Gamma^{k+1}(\delta)}{\Gamma((k+1)\delta)}\, b^{k\delta} m.$$

Множитель

$$\frac{C^k M_2^k \Gamma^{k+1}(\delta)}{\Gamma((k+1)\delta)}\, b^{k\delta}$$

стремится к нулю при $k \to \infty$ в силу асимптотики гамма-функции [2, с. 30]

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{\frac{2\pi}{x}}\left(\frac{x}{e}\right)^x \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right), \quad x \to \infty.$$

Следовательно,

$$m = \sup_{t\in[0,b]} (t^{1-\delta} e^{-\omega_1 t} \|W(t) - w(t)\|) = 0,$$

откуда в силу произвольности $b > 0$ следует тождество $W(t) \equiv w(t)$ при $t > 0$, что и завершает доказательство единственности.

В заключение отметим, что неравенство, аналогичное (29), потребуется нам при доказательстве теоремы 5, а единственность решения интегрального уравнения (21) имеет место и в более широком классе функций, а именно в классе функций, непрерывных на $(0,\infty)$ и суммируемых при $t = 0$. Действительно, пусть $W(t)$ – решение интегрального уравнения (21) при $u_0 = 0$. Тогда учитывая (6), при $t \in [0,b]$ получаем неравенство

$$\|W(t)\| \le M_2 \int\limits_0^t \|W(s)\| \int\limits_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s)\tau^{-\gamma} e^{\omega\tau}\, d\tau\, ds =$$

$$= \int\limits_0^t (t-s)^{\delta-1} \Upsilon(t-s) \|W(s)\|\, ds \le m_1 I^\delta \|W(t)\|,$$

где функция

$$\Upsilon(t) = M_2 \int\limits_0^\infty \phi(-\nu, 0; -\xi)\xi^{-\gamma} \exp(\omega\xi t^\nu)\, d\xi$$

непрерывна при $t \ge 0$, а $m_1 = \Gamma(\delta) \max\limits_{t\in[0,b]} \Upsilon(t)$.

Применяя эту оценку k раз, получаем неравенство

$$\|W(t)\| \le m_1^k I^{k\delta} \|W(t)\| = \frac{m_1^k}{\Gamma(k\delta)} \int\limits_0^t (t-s)^{k\delta-1} \|W(s)\|\, ds$$

и, следовательно,

$$\int\limits_0^b \|W(t)\|\, dt \le \frac{m_1^k}{\Gamma(k\delta)} \int\limits_0^b \int\limits_0^t (t-s)^{k\delta-1} \|W(s)\|\, ds\, dt = \frac{m_1^k}{\Gamma(k\delta)} \int\limits_0^b \|W(s)\| \int\limits_s^b (t-s)^{k\delta-1}\, dt\, ds \le$$

$$\le \frac{m_1^k b^{k\delta}}{\Gamma(k\delta+1)} \int\limits_0^b \|W(s)\|\, ds.$$

Таким образом, $\int_0^b \|W(s)\|\,ds = 0$ и $\|W(t)\| = 0$ при $t \ge 0$ в силу произвольности $b > 0$. На этом доказательство теоремы 3 завершено.

Теорема 3 позволяет установить разрешимость задачи (1), (2) при любом α, таком, что $0 < \alpha < \beta \le 1$, если выполнены условия 1 и 2. Покажем, что в случае $0 < \alpha = \beta < 1$ также справедливы аналогичные результаты.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия 1, 2 и* $\alpha = \beta < 1$. *Тогда задача (1), (2) имеет единственное решение, для которого справедлива оценка (19).*

Доказательство. Учитывая теорему 2, сведем задачу (1), (2) к интегральному уравнению

$$u(t) = T_\alpha(t)u_0 + \int\limits_0^t T_\alpha(t-s)B(s)u(s)\,ds. \tag{30}$$

Обозначив $w(t) = B(t)u(t)$, получим уравнение

$$w(t) = B(t)T_\alpha(t)u_0 + \int\limits_0^t B(t)T_\alpha(t-s)w(s)\,ds, \tag{31}$$

которое решим методом последовательных приближений. Положим

$$w_0(t) = 0, \quad w_1(t) = B(t)T_\alpha(t)u_0, \quad w_{n+1}(t) = B(t)T_\alpha(t)u_0 + \int\limits_0^t B(t)T_\alpha(t-s)w_n(s)\,ds, \quad n \in N.$$

Используя неравенства (5), (6), оценим норму разности:

$$\|w_2(t) - w_1(t)\| \le M_2 \int\limits_0^t (t-s)^{-\gamma} e^{\omega(t-s)} \|w_1(s)\|\,ds \le M_2^2 \Gamma(1-\gamma) e^{\omega t} I^{1-\gamma}(t^{-\gamma})\|u_0\|. \tag{32}$$

Учитывая (32), как и при доказательстве неравенства (25), по индукции получаем неравенство

$$\|w_n(t) - w_{n-1}(t)\| \le \frac{M_2^n\,\Gamma^n(1-\gamma)}{\Gamma(n(1-\gamma))}\, t^{n(1-\gamma)-1} e^{\omega t}\|u_0\|, \quad n \in N.$$

Дальнейшие рассуждения, касающиеся существования единственного решения, проводятся аналогично доказательству теоремы 3, при этом для решения $w(t)$ интегрального уравнения (31) справедлива оценка

$$\|w(t)\| \le M_2 t^{-\gamma} e^{\omega t}\|u_0\| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_2^{k+1}\Gamma^{k+1}(1-\gamma) t^{(k+1)(1-\gamma)-1} e^{\omega t}\|u_0\|}{\Gamma((k+1)(1-\gamma))} \le M_0 t^{-\gamma} e^{\omega_3 t}\|u_0\| \tag{33}$$

с некоторыми постоянными $M_0 > 0$, $\omega_3 > \omega$. Используя (33), оценку (19) решения $u(t)$ задачи (1), (2) получаем из равенства (30). Теорема доказана.

Замечание 3. Утверждение, аналогичное теореме 4, можно сформулировать и доказать также и при $\alpha = \beta = 1$. В этом случае условие 2ii) следует заменить следующим требованием: для любого $x \in D$ функция $B(t)x$ принадлежит $C([0,\infty), E)$, принимает значения в $D(A)$ и $AB(t)x \in C([0,\infty), E)$.

Установим теперь теорему о непрерывной зависимости решения задачи (1), (2) от начальных условий.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы 3 и* $u_n(t)$ *– последовательность решений задачи*

$$D^\alpha u_n(t) = Au_n(t) + B(t)u_n(t), \quad t > 0, \tag{34}$$

$$\lim_{t\to 0} D^{\alpha-1}u_n(t) = g_n \in D(A). \tag{35}$$

Если $g_n \to u_0 \in D(A)$, $Ag_n \to Au_0$ *и* $B(t)g_n$ *сходится к* $B(t)u_0$ *равномерно по* $t \in [t_0, b]$ *для любых* $0 < t_0 < b$, *то последовательность* $u_n(t)$ *решений задачи (34), (35) сходится к решению* $u(t)$ *задачи (1), (2) равномерно по* $t \in [t_0, b]$ *для любых* $0 < t_0 < b$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность

$$U_n(t) = u_n(t) - \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, g_n,$$

которая является решением задачи

$$D^\alpha U_n(t) = AU_n(t) + B(t)U_n(t) + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}(Ag_n + B(t)g_n), \tag{36}$$

$$\lim_{t\to 0} D^{\alpha-1}U_n(t) = 0. \tag{37}$$

В силу теорем 1 и 2 функция $U_n(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$U_n(t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s)T_\beta(\tau)\biggl(B(s)U_n(s) + \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}(Ag_n + B(s)g_n)\biggr)\, d\tau\, ds.$$

Обозначив $W_n(t) = B(t)U_n(t)$, как и при доказательстве теоремы 3, получим представление

$$U_n(t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s)T_\beta(\tau)\biggl(W_n(s) + \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}(Ag_n + B(s)g_n)\biggr)\, d\tau\, ds, \tag{38}$$

где $W_n(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$W_n(t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s)B(t)T_\beta(\tau)\biggl(W_n(s) + \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}(Ag_n + B(s)g_n)\biggr)\, d\tau\, ds. \tag{39}$$

Пусть n, k – достаточно большие натуральные числа, $\varepsilon > 0$. Учитывая (39), как и при доказательстве неравенства (29), получаем оценку

$$\|W_n(t) - W_k(t)\| \le CM_2 \int\limits_0^t (t-s)^{\delta-1}e^{\omega_2(t-s)}\|W_n(s) - W_k(s)\|\, ds +$$

$$+ \frac{CM_2}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t (t-s)^{\delta-1}e^{\omega_2(t-s)}s^{\alpha-1}(\|Ag_n - Ag_k\| + \|B(s)g_n - B(s)g_k\|)\, ds,$$

$$m = \sup_{t\in[0,b]} (t^{1-\delta}e^{-\omega_1 t}\|W_n(t) - W_k(t)\|) \le M_0 m + \varepsilon, \quad M_0 < 1.$$

Следовательно, $m \le \varepsilon/(1 - M_0)$ и в силу полноты пространства E последовательность $t^{1-\delta}e^{-\omega_1 t}W_n(t)$ сходится равномерно по $t \in [0, b]$ к непрерывной на $[0, b]$ функции $t^{1-\delta}e^{-\omega_1 t}W(t)$. Таким образом, $W_n(t)$ сходится равномерно по $t \in [t_0, b]$, $0 < t_0 < b$, к функции $W(t)$, которая удовлетворяет неравенству (26), в силу условия 2ii) принадлежит $D(A)$, при этом $AW(t)\in C((0,\infty),E)$ и абсолютно интегрируема в нуле.

Из равенства (38) вытекает равномерная по $t\in[t_0,b]$ сходимость $U_n(t)$ к функции

$$U(t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s)T_\beta(\tau)\biggl(W(s)+\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}(Au_0+B(s)u_0)\biggr)\,d\tau\,ds,$$

которая является решением задачи (36), (37). Наконец, $u_n(t)$ равномерно по $t\in[t_0,b]$ сходится к функции

$$u(t)=U(t)+\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-1)}u_0,$$

которая удовлетворяет задаче (1), (2). Теорема доказана.

Замечание 4. Утверждение, аналогичное теореме 5, о непрерывной зависимости решения задачи (1), (2) от начальных условий можно сформулировать и доказать также и при $\alpha=\beta\le 1$.

Теорема 4 содержит в части однозначной разрешимости теорему 8 из [7] в частном случае, когда оператор B не зависит от t и ограничен. В этом случае в работе [7] доказано, что при $\alpha=\beta<1$ разрешающий оператор $T_\alpha(t,A+B)$ задачи (1), (2) имеет вид

$$T_\alpha(t,A+B)=\sum_{n=0}^\infty S_n(t),$$

где $S_0(t)=T_\alpha(t,A)$ – разрешающий оператор задачи (3), (4) при $\beta=\alpha$,

$$S_n(t)=\int\limits_0^t T_\alpha(t-s,A)BS_{n-1}(s)\,ds,\quad n=1,2,\ldots$$

Отметим также работу [14], в которой теорема о возмущении доказана для уравнения, содержащего в отличие от уравнения (1) дробную производную Капуто, в предположении, что оператор A – генератор аналитической полугруппы и $\beta=1$. Из этой же работы заимствован следующий пример.

Пример 1. Пусть $E=L_2(R^n)$. На множестве $D(A)=W_2^{2m}(R^n)$ определим оператор A следующим образом:

$$Au(t,x)=\sum_{|p|=2m}a_p(x)\frac{\partial^{p_1+\ldots+p_n}u(t,x)}{\partial x_1^{p_1}\cdots\partial x_n^{p_n}},$$

где для любых $x,\xi\in R^n$

$$\sum_{|p|=2m}a_p(x)\xi^p\ge(-1)^{m+1}M_0|\xi|^{2m},$$

а коэффициенты $a_p(x)$ при $|p|=2m$ удовлетворяют равномерному в R^n условию Гёльдера. Оператор A, как указано в работе [14], удовлетворяет условию 1 при $\beta=1$, $\omega=0$.

Оператор $B(t)$ определим на $D=W_2^{2m-1}(R^n)\supset D(A)$ равенством

$$B(t)u(t,x)=\sum_{|p|\le 2m-1}a_p(t,x)\frac{\partial^{p_1+\ldots+p_n}u(t,x)}{\partial x_1^{p_1}\cdots\partial x_n^{p_n}}+\int\limits_\Omega\sum_{|p|\le 2m-1}b_p(t,x,\xi)\frac{\partial^{p_1+\ldots+p_n}u(t,\xi)}{\partial \xi_1^{p_1}\cdots\partial \xi_n^{p_n}}\,d\xi,$$

где $\Omega\subset R^n$; коэффициенты $a_p(t,x)$ при $|p|\le 2m-1$ и каждом $t\ge 0$ непрерывны, ограничены по $x\in R^n$ и удовлетворяют условию Гёльдера с показателем $\mu>\alpha$ по t равномерно по $x\in R^n$; коэффициенты $b_p(t,x,\xi)$ непрерывны и

$$\int\limits_{R^n}\int\limits_\Omega|b_p(t,x,\xi)|^2\,d\xi\,dx<+\infty,$$

$$\int\limits_{R^n}\int\limits_{\Omega}|b_p(t_2,x,\xi)-b_p(t_1,x,\xi)|^2\,d\xi\,dx\le C|t_2-t_1|^{\mu},\quad \mu>\alpha,\quad C>0.$$

Оператор $B(t)$, как указано в работе [14], удовлетворяет условию 2 при $\omega=0$ и некотором $\gamma\in(0,1)$.

При $u_0(x)\in W_2^{2m}(R^n)$ и $\alpha<1$ в силу теорем 3, 5 задача (1), (2) (задача типа Коши для интегро-дифференциального уравнения) корректно поставлена и однозначно разрешима.

Прежде чем привести еще один пример применения теоремы 3, отметим, что если E – комплексное банахово пространство, $T(t)$ – равномерно ограниченная C_0-полугруппа с генератором A, то можно определить положительную дробную степень оператора $-A$ (см., например, [9, с. 357])

$$-(-A)^{\alpha}h=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\lambda^{\alpha-1}(\lambda I-A)^{-1}Ah\,d\lambda, \tag{40}$$

где $\alpha\in(0,1)$, $h\in D(A)$.

При этом если $g\in E$, то для резольвенты оператора $-(-A)^{\alpha}$, который в дальнейшем мы будем обозначать A_{α}, справедливо представление

$$(\mu I-A_{\alpha})^{-1}g=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\lambda^{\alpha}(\lambda I-A)^{-1}g}{\mu^2-2\mu\lambda^{\alpha}\cos\alpha\pi+\lambda^{2\alpha}}\,d\lambda. \tag{41}$$

Покажем, что с оператором A_{α} равномерно корректна следующая задача типа Коши:

$$D^{\alpha}v(t)=A_{\alpha}v(t),\quad t>0, \tag{42}$$

$$\lim_{t\to 0}D^{\alpha-1}v(t)=v_0,\quad v_0\in D(A). \tag{43}$$

Условие 3. Банахово пространство E обладает свойством Радона–Никодима (см. [15, с. 15]), т.е. каждая абсолютно непрерывная функция $F:\ R_+\to E$ почти везде дифференцируема.

Например, рефлексивные банаховы пространства обладают этим свойством (см. [15, следствие 1.2.7]), а пространства $L_1(a,b)$, $C[a,b]$, c_0 (пространство последовательностей, сходящихся к нулю) не обладают (см. [15, пример 1.2.8, предложения 1.2.9, 1.2.10]).

Если задача типа Коши (3), (4) равномерно корректна и в неравенстве (5) постоянная $\omega=0$, то, как доказано в [6], при $\operatorname{Re}\lambda>0$ число λ^{β} принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$ оператора A, для любого $x\in E$ справедливо представление резольвенты $R(\lambda^{\beta})=(\lambda^{\beta}I-A)^{-1}$ в виде

$$R(\lambda^{\beta})x=\int\limits_0^{+\infty}\exp(-\lambda t)T_{\beta}(t)x\,dt,$$

и при этом для всех целых $n\ge 0$

$$\left\|\frac{d^nR(\lambda^{\beta})}{d\lambda^n}\right\|\le\frac{M\Gamma(n+\beta)}{(\operatorname{Re}\lambda)^{n+\beta}},\quad \operatorname{Re}\lambda>0. \tag{44}$$

В банаховом пространстве E, обладающем свойством Радона–Никодима, выполнение неравенств (44) (даже для действительных $\lambda>0$) является и достаточным условием равномерной корректности задачи (3), (4). При этом разрешающий оператор имеет вид (см. формулу (13) в [6])

$$T_{\beta}(t)u_0=D^{1-\beta}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega_0-i\infty}^{\omega_0+i\infty}\lambda^{\beta-1}\exp(\lambda t)R(\lambda^{\beta})u_0\,d\lambda,\quad \omega_0>0.$$

Следует отметить, что в работе [6] условие 3 отсутствует, но в приведенном там методе доказательства равномерной корректности условие 3 нужно накладывать. Здесь мы устраняем этот недочет.

Теорема 6. *Пусть выполнено условие 3, оператор A является генератором равномерно ограниченной C_0-полугруппы и оператор A_α определен равенством (40). Тогда задача типа Коши (42), (43) равномерно корректна.*

Доказательство. Как отмечено выше, для того чтобы задача (42), (43) была равномерно корректной, достаточно, чтобы при $\mu > 0$ резольвента $(\mu I - A_\alpha)^{-1}$ удовлетворяла неравенству

$$\left\| \frac{d^n(\mu^\alpha I - A_\alpha)^{-1}}{d\mu^n} \right\| \le \frac{M\Gamma(n+\alpha)}{\mu^{n+\alpha}}. \tag{45}$$

Обозначим $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$ и, используя представление (41), установим справедливость оценки (45). После замены переменной из (41) получим представление

$$(\mu^\alpha I - A_\alpha)^{-1} g = \frac{\mu^{1-\alpha}\sin\alpha\pi}{\alpha\pi} \int\limits_0^\infty \frac{s^{1/\alpha} R(\mu s^{1/\alpha}) g}{s^2 - 2s\cos\alpha\pi + 1}\, ds = \frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi} \int\limits_0^\infty \frac{s x^{1-\alpha} R(x) g}{s^2 - 2s\cos\alpha\pi + 1}\, ds,$$

где $x = \mu s^{1/\alpha}$ и, следовательно,

$$\frac{d^n(\mu^\alpha I - A_\alpha)^{-1} g}{d\mu^n} = \frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi} \int\limits_0^\infty \frac{s^{n/\alpha+1}}{s^2 - 2s\cos\alpha\pi + 1} \frac{d^n}{dx^n}(x^{1-\alpha} R(x) g)\, ds. \tag{46}$$

Используя формулу Лейбница и неравенство

$$\left\| \frac{d^n R(x)}{dx^n} \right\| \le \frac{Mn!}{x^{n+1}}, \quad x > 0,$$

которое справедливо в силу теоремы Хилле–Иосиды, оценим норму:

$$\left\| \frac{d^n}{dx^n}(x^{1-\alpha} R(x) g) \right\| \le \frac{M\|g\|}{x^{n+\alpha}} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} |(1-\alpha)(-\alpha)(-\alpha-1)\cdots(-\alpha-n+j+2)| j! =$$

$$= \frac{M\|g\|\Gamma(n+\alpha-1)}{|\Gamma(\alpha-1)| x^{n+\alpha}} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \binom{n+\alpha-2}{j}^{-1} =$$

$$= \frac{M\|g\|\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha) x^{n+\alpha}} \left(1 - \binom{n}{n+1} \binom{n+\alpha-1}{n+1}^{-1} \right) = \frac{M\|g\|\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha) x^{n+\alpha}}, \tag{47}$$

при этом мы воспользовались формулой 4.2.8.1 [13] и равенством $\binom{n}{n+1} = 0$. Из соотношений (46), (47) вытекает справедливость неравенства

$$\left\| \frac{d^n(\mu^\alpha I - A_\alpha)^{-1}}{d\mu^n} \right\| \le \frac{M_7\Gamma(n+\alpha)}{\mu^{n+\alpha}} \int\limits_0^\infty \frac{ds}{s^2 - 2s\cos\alpha\pi + 1} \le \frac{M_8\Gamma(n+\alpha)}{\mu^{n+\alpha}},$$

и теорема тем самым доказана.

Пример 2. Пусть $0 < \alpha \le \beta \le 1$, $-A$ – сильно позитивный оператор, тогда определяемый равенством (40) оператор $-A_\beta$ также сильно позитивный (см. [8, с. 299]). В силу теорем 3, 6 оператор A_β можно возмущать оператором $B(t)$, подчиненным дробной степени оператора $(-A_\beta)^\gamma$, $\gamma \in (0, 1)$, при этом корректность задачи (1), (2) с оператором A_β не нарушится.

Если ослабить ограничения на оператор A, потребовав вместо сильной позитивности выполнения оценки

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{M_3}{1+\lambda}, \quad \lambda \geq 0, \quad M_3 > 0,$$

то оператор $-A$ называется позитивным [8, с. 274]. Позитивные операторы не обязательно являются генераторами C_0-полугрупп, но определены их дробные степени $(-A)^{\beta}$, которые при $0 < \beta \leq 1/2$ являются сильно позитивными [8, с. 274, 299]. В этом случае задачу (1), (2) с оператором $A_{\beta} = -(-A)^{\beta}$, $0 < \beta \leq 1/2$, также можно возмущать оператором $B(t)$, подчиненным дробной степени $(-A_{\beta})^{\gamma}$, $\gamma \in (0,1)$.

Работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 10-01-00276).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М., 1972.
2. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987.
3. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М., 2003.
4. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and application of fractional differential equations. Elsevier, 2006.
5. *Костин В.А.* К задаче Коши для абстрактных дифференциальных уравнений с дробными производными // Докл. АН СССР. 1992. Т. 326. № 4. С. 597–600.
6. *Глушак А.В.* О задаче типа Коши для абстрактного дифференциального уравнения с дробной производной // Вестн. ВГУ. Физика, математика. Воронеж, 2001. № 2. С. 74–77.
7. *Глушак А.В., Поваляева Ю.В.* О свойствах решений задачи типа Коши для абстрактного дифференциального уравнения с дробной производной // Spectral and Evolution Problems. Simferopol, 2004. V. 14. P. 163–172.
8. *Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М., 1966.
9. *Иосида К.* Функциональный анализ. М., 1967.
10. *Псху А.В.* Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными дробного и континуального порядка. Нальчик, 2005.
11. *Джрбашян М.М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М., 1966.
12. *Глушак А.В.* О задаче типа Коши для неоднородного абстрактного дифференциального уравнения с дробной производной // Вестн. ВГУ. Физика, математика. Воронеж. 2002. № 1. С. 121–123.
13. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М., 1981.
14. *El-Borai M.M.* Some probablitiy densities and fundamental solutions of fractional evolution equations // Chaos. Solitons and Fractals. 2002. V. 14. P. 433–440.
15. *Arendt W., Batty C., Hieber M., Neubrander F.* Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems. Basel; Boston; Berlin, 2001.

Белгородский государственный университет

Поступила в редакцию
20.05.2008 г.