

Об одном нелинейном уравнении Коши – Римана с особенностью в младшем коэффициенте

Якивчик Н. В.

(Статья представлена членом редакционной коллегии Солдатовым А. П.)

Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт»,

Россия, 111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, 14

YakivchikNV@mpei.ru

Аннотация. В настоящей работе рассматривается один класс нелинейных уравнений с оператором Коши – Римана. Такое уравнение подстановкой сводится к линейному уравнению; сформулированы условия, при которых указанная подстановка обеспечивает взаимно-однозначное отображение. Коэффициент уравнения при неизвестной функции имеет изолированную сильную степенную особенность в нуле, после устранения которой он достаточно число раз непрерывно дифференцируем в окрестности нуля. Применяя разложение коэффициента по формуле Тейлора и прямое интегрирование полиномиальной части, с помощью оператора Помпейю – Векуа построено интегральное представление решений этого уравнения.

Ключевые слова: оператор Коши – Римана, сильные изолированные особенности, интегральный оператор Помпейю – Векуа

Для цитирования: Якивчик Н.В. Об одном нелинейном уравнении Коши – Римана с особенностью в младшем коэффициенте. *Прикладная математика & Физика*. 2026;58(2):176–182. DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-2-176-182 EDN EFSJLX

Original Research

On One Type of Nonlinear Cauchy – Riemann Equation with a Singularity in the Lowest Coefficient

Natalia V. Yakivchik

(Article submitted by a member of the editorial board Soldatov A. P.)

National Research University "Moscow Power Engineering Institute",

14 Krasnokazarmennaya St., Moscow 111250, Russia

YakivchikNV@mpei.ru

Abstract. In this paper, one class of nonlinear equations with the Cauchy – Riemann operator is considered. Such equation is reduced to a linear equation by a substitution; conditions under which this substitution makes a one-to-one mapping are formulated. The coefficient of the equation at the unknown function has an isolated strong power singularity at zero, and after its elimination it is continuously differentiable in a neighborhood of zero sufficiently many times. Using the Taylor expansion of the coefficient and direct integration of the polynomial part, by means of the Pompeiu – Vekua operator an integral representation of solutions to this equation is obtained.

Keywords: Cauchy – Riemann Operator, Strong Isolated Singularities, Pompeiu – Vekua Integral Operator

For citation: Yakivchik NV. On One Type of Nonlinear Cauchy – Riemann Equation with a Singularity in the Lowest Coefficient. *Applied Mathematics & Physics*. 2026;58(2):176–182. (In Russ.). DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-2-176-182 EDN EFSJLX

1. Постановка задачи. Пусть гладкий контур Γ разбивает комплексную плоскость $\mathbb{C}$ на «конечную» – D и «бесконечную» – D' области. Для определенности пусть $0 \in D$ и $D_0 = D \setminus \{0\}$.

В конечной области $D_0 \subset \mathbb{C}$ рассматривается эллиптическое уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + au + b\bar{u} = f \quad (1)$$

с функциями $a(z)$, $b(z)$, $f(z)$, заданными в ограниченной области D , причем коэффициенты a , b этого уравнения могут допускать в множестве $l \subset D$ степенные особенности по z . Здесь и ниже используется стандартное обозначение $2\partial_{\bar{z}} = \partial_x + i\partial_y$.

Если младшие коэффициенты a и b и правая часть f уравнения (1) принадлежат пространству суммируемых функций со степенью $p > 2$, то теория этого уравнения построена И. Н. Векуа [1] и называется теорией *регулярных* обобщенных аналитических функций.

В построении теории регулярных обобщенных аналитических функций и исследовании уравнения (1) существенную роль играет интегральный оператор Помпейю – Векуа [1, с. 31]

$$(Tf)(z) = -\frac{1}{\pi} \int_D \frac{f(\zeta) d_2\zeta}{\zeta - z}; \quad (2)$$

здесь и ниже $d_2\zeta$ обозначает элемент площади.

Хорошо известно, что при $p > 2$ этот оператор действует $L^p(D) \rightarrow W^{1,p}(D) \subseteq H(\overline{D})$ и удовлетворяет уравнению

$$(Tf)_z = f. \quad (3)$$

Когда $b \equiv 0$ и $a, f \in L^p(D)$, $p > 2$, с помощью этого оператора общее решение уравнения (1) в обозначении

$$\Omega(z) = (Ta)(z) \quad (4)$$

дается формулой

$$u = e^\Omega \phi + e^\Omega T(e^{-\Omega} f) \quad (5)$$

с произвольной аналитической в области D функцией ϕ .

Интегральное представление (5) решений уравнения (1) при $b(z) = 0$ называется интегральным представлением *первого рода*; в его построении центральное место занимает построение функции $\Omega(z)$ по формуле (4). Интегральное представление решений уравнения (1) при $b(z) \neq 0$ называется интегральным представлением *второго рода*, и при его построении используется представление первого рода (5).

Теперь переходим к случаю, когда младшие коэффициенты a и b и правая часть f уравнения (1) не принадлежат пространству суммируемых функций. В этом случае полученные результаты по исследованию уравнения (1) относятся к теории *сингулярных* обобщенных аналитических функций. Для краткого обзора по этой теории удобно ввести класс функций $C_{-\alpha}(\overline{D}, 0)$.

Обозначим $C_{-\alpha}(\overline{D}, 0)$, где $\alpha > 0$, пространство всех непрерывных в $\overline{D} \setminus \{0\}$ функций $\varphi(z)$ с поведением $O(|z|^{-\alpha})$ при $z \rightarrow 0$.

Основная трудность заключается в построении функции $\Omega(z)$ по формуле (4), так как при $a \in C_{-\alpha}(\overline{D}, 0)$, $\alpha \geq 1$, интеграл Ta является расходящимся интегралом. Поэтому в работах различных авторов были использованы разнообразные методы исследования. Например, представления решения уравнения (1) в виде рядов по степеням z и $\bar{z}$ в окрестности сингулярной точки $z = 0$, также исходя из представления $z = re^{i\varphi}$, $r = |z|$, $\varphi = \arg z$, метод разделения переменных по переменным (r, φ) , метод сведения уравнения (1) к эквивалентному линейному уравнению, типа метода Фукса и т. п.

Построению интегральных представлений решений и исследованию краевых задач для уравнения (1) с коэффициентами из класса $C_{-\alpha}(\overline{D}, 0)$, где $\alpha > 0$, посвящены работы Л. Г. Михайлова [2], З. Д. Усманова [3], Н. Р. Раджабова [4], Н. Begehr [5], A. Meziani [6], А. П. Солдатова и А. Б. Расулова [7], А. Б. Тунгатарова [8] и др.

Но, к сожалению, использование вышеперечисленных методов не дало таких полноценных результатов, как в теории регулярных обобщенных аналитических функций И. Н. Векуа.

В последние десятилетия на пути исследования обобщенного уравнения Коши – Римана с коэффициентами $a \in C_{-\alpha-1}$, где $\alpha \geq 0$, и $b \in C_{-1}$ со специальными видами (когда $a(z) = z|z|^{-\alpha-1}a_0(z)$, где $a_0 \in C(D)$, т. е. когда коэффициент имеет специальный множитель $z|z|^{-1} = e^{i\varphi}$), получен ряд результатов (см., например, [9]) с использованием сингулярного оператора Помпейю – Векуа (2). Заметим, что этот множитель играл важную роль при построении функции $\Omega(z)$ и в вопросе существования глобального решения. Именно в случае такого типа коэффициентов для решений уравнения (1) построена функция $\Omega(z)$ и получены интегральные представления первого рода и второго рода. Заметим, что при этом случаи $a \in C_{-1}$ и $a \in C_{-\alpha}$, $\alpha > 1$, исследованы независимо.

В настоящей работе снято условие ограниченности с коэффициента $a \in C_{-\alpha}$, $\alpha \geq 1$, и получено представление общего решения для одного нелинейного уравнения Коши – Римана с изолированной сильной особенностью в младшем коэффициенте.

В области D_0 рассмотрим нелинейное уравнение

$$\partial_z u - \frac{a(z)}{|z|^\alpha} u(z) = f(z) \frac{u(z)}{\sqrt[m]{u(z)}}, \quad m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \quad (6)$$

с коэффициентом $a(z) \in C(\overline{D})$, который n раз непрерывно дифференцируем в окрестности нуля, где $\alpha \geq 1$, а $n = [\alpha]$ – целая часть α .

В правой части (6) функция f принадлежит классу $L^p_{\text{loc}}(D_0)$, $p > 2$. Число $m \geq 2$ – некоторое фиксированное натуральное число.

Как сказано выше, результаты, полученные в случае $\alpha \geq 1$, относятся к теории сингулярных обобщенных аналитических функций.

Для уточнения класса решений уравнения (6) напомним некоторые известные факты из теории эллиптических систем, изложенные в монографии И. Н. Векуа [1] и в книге Л. Берса, Ф. Джона, М. Шехтера [10].

Заметим, что функция f принадлежит соболевскому пространству $W_{\text{loc}}^{1,p}(D_0)$, если в любой замкнутой подобласти $G_0 \subset D_0$ сама функция $f(z)$ и ее обобщенные производные $f_z, f_{\bar{z}}$ принадлежат $L^p(G_0)$, $p > 2$.

Пусть в некотором открытом множестве G на плоскости задана линейная эллиптическая система первого порядка с постоянными старшими коэффициентами, младшие коэффициенты и правая часть которой принадлежат $L_{\text{loc}}^p(G)$, т. е. принадлежат $L^p(G_0)$ в любой ограниченной области G_0 , лежащей в G вместе со своей границей. Тогда на основании внутренней регулярности (см. монографию И. Н. Векуа [1]) любое слабое решение u этого уравнения регулярно в том смысле, что оно принадлежит классу $W_{\text{loc}}^{1,p}(G)$ и удовлетворяет рассматриваемой системе. В силу теоремы вложения функция u в действительности принадлежит классу $C^\mu(\bar{G}_0)$ с показателем $\mu = (p-2)/p$. Этот факт был доказан И. Н. Векуа в [1]. В соответствии с внутренней регулярностью решений в дальнейшем решение уравнения (6) предполагается регулярным в открытом множестве D_0 . Более точно, функцию $u(z) \in W_{\text{loc}}^{1,p}(D_0)$, $p > 2$, удовлетворяющую уравнению (6) почти всюду, называем *регулярным решением*.

2. Интегральное представление решений. Напомним, что коэффициент уравнения (6), $a(z) \in C(\bar{D})$, n раз непрерывно дифференцируем в окрестности нуля, где $\alpha \geq 1$ и $n = [\alpha]$ – целая часть α . Следовательно, функцию $a(z)$ в окрестности особой точки $z = 0$ можно разложить по формуле Тейлора

$$a(z) = p_n(z) + a_0(z), \quad \text{где} \quad a_0(z) = o(z^n) \quad \text{при} \quad z \rightarrow 0.$$

Здесь $p_n(z) = \sum_{k_1+k_2 \leq n} a_{k_1 k_2} \cdot z^{k_1} \bar{z}^{k_2}$ – ее главная часть (полином), $a_{k_1 k_2}$ – коэффициенты Тейлора по степеням z и $\bar{z}$, а $a_0(z)$ – остаток в форме Пеано. Введем обозначение

$$\Omega(z) = \omega_n(z) + h(z), \quad (7)$$

где

$$\omega_n(z) = \frac{2}{m|z|^\alpha} \sum_{k_1+k_2 \leq n} a_{k_1 k_2} \frac{z^{k_1} \bar{z}^{k_2+1}}{2(k_2+1) - \alpha}, \quad \text{в случае} \quad \frac{\alpha}{2} \notin \mathbb{Z}, \quad \text{либо}$$

$$\omega_n(z) = \frac{2}{m|z|^\alpha} \sum_{\substack{k_1+k_2 \leq n \\ k_2 \neq k_0}} a_{k_1 k_2} \frac{z^{k_1} \bar{z}^{k_2+1}}{2(k_2+1) - \alpha} + \frac{1}{m} \sum_{k_1=0}^{n-k_0} a_{k_1 k_0} z^{k_1} \cdot \ln z, \quad \text{в случае} \quad \frac{\alpha}{2} - 1 = k_0 \in \mathbb{Z},$$

причем

$$h(z) = \left(T \frac{a_0(\zeta)}{m|\zeta|^\alpha} \right) (z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(T \frac{a_0(\zeta)}{m|\zeta|^\alpha} + \omega_n(\zeta) \right) \frac{d\zeta}{\zeta - z};$$

здесь $m \geq 2$ – некоторое фиксированное натуральное число.

Теорема. Пусть $\alpha \geq 1$, $n = [\alpha]$ – целая часть α , и дан коэффициент $a(z) \in C(\bar{D})$, который n раз непрерывно дифференцируем в окрестности нуля, $m \geq 2$ – некоторое фиксированное натуральное число.

Тогда соответственно в предположении $e^{-\Omega} f \in L^p(D)$ общее решение уравнения (6) в классе $u \in W_{\text{loc}}^{1,p}(D_0)$ для каждого фиксированного натурального числа $m = 2l + 1$, $l \in \mathbb{N}$, дается формулой

$$u = \left\{ e^{\phi} \left[\phi + \frac{1}{m} T(e^{-\Omega} f) \right] \right\}^m, \quad (8)$$

где $\phi \in C_{\text{loc}}^\mu(D_0)$ – произвольная аналитическая в области $D_0 = D \setminus \{0\}$ функция.

При четном $m = 2l$, $l \in \mathbb{N}$, и $1 \leq \alpha < 2$ также имеет место интегральное представление (8) в области $D_0 = D \setminus \{0\}$ с разрезом, соединяющим точку $z = 0$ с бесконечно удаленной точкой $z = \infty$.

Доказательство. Введем новую функцию $v(z)$, которая с исходной искомой функцией $u(z)$ связана соотношением

$$u(z) = v^m(z). \quad (9)$$

Сперва заметим, что мы решения уравнения (6) рассматриваем в классе $u \in W_{\text{loc}}^{1,p}(D_0)$ и в проколотой области $D_0 = D \setminus \{0\}$, которая является двусвязной областью.

Взаимно-однозначная (или однолистная) комплекснозначная функция в многосвязной области – это функция, которая отображает каждую точку области в единственное значение в другой области, при этом каждому значению в области значений соответствует единственная точка в исходной области. Другими словами, функция является и инъективной (различным элементам исходной области соответствуют различные элементы в области значений), и сюръективной (каждый элемент области значений имеет свой прообраз в исходной области). В многосвязной области, в отличие от односвязной, существуют замкнутые кривые, которые не могут быть стянуты в точку без выхода за пределы области.

Для наглядности рассмотрим степенную функцию $u(z) = z^\beta$, где показатель β – комплексное число. Ее однозначность определяется ее связью с логарифмической функцией и многозначностью последней. Поскольку логарифм комплексного числа является многозначной функцией (имеет бесконечно много значений для одного аргумента), то и степенная функция, выраженная через логарифм $z^\beta = \exp(\beta \ln z)$, также является многозначной, если показатель степени β не является целым числом. Если β – целое число, то функция z^β однозначна.

Представим функции $u(z)$ и $v^m(z)$ соответственно в виде

$$u(z) = |u(z)| e^{i(\operatorname{Arg} u + 2k\pi)}, \quad v^m(z) = |v(z)|^m e^{im(\operatorname{Arg} v + 2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

где z – произвольная фиксированная точка области D_0 , а $\operatorname{Arg} u$ и $\operatorname{Arg} v$ соответственно – главные значения аргументов чисел $u(z)$ и $v(z)$. Видно, что для всех таких точек двусвязной области D_0 модуль $|u(z)| = |v(z)|^m$, $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ (т. е. сохраняется взаимная однозначность модулей функций), а для аргумента $e^{i \operatorname{Arg} u} = e^{im \operatorname{Arg} v + 2imk\pi} = e^{im \operatorname{Arg} v}$, $k \in \mathbb{Z}$. Это означает, что при любом нечетном натуральном $m > 2$ между функциями $u(z)$ и $v(z)$ соотношение (9) устанавливает взаимно-однозначное соответствие. Но при четном $m = 2l$, $l \in \mathbb{N}$, может нарушиться эта взаимная однозначность, так как $u = (+v)^{2l} = v^{2l}$ и $u = (-v)^{2l} = v^{2l}$. Поэтому, чтобы соотношение (9) между функциями $u(z)$ и $v(z)$ устанавливало взаимно-однозначное соответствие при любом фиксированном натуральном $m \geq 2$, проведем разрез, соединяющий точку $z = 0$ с бесконечно удаленной точкой $z = \infty$. Тогда требование интегрируемости вблизи разреза накладывает ограничение $\alpha < 2$.

Очень важно отметить одинаковое поведение функций $u(z)$ и $v(z)$ при $z \rightarrow 0$:

$$\lim_{z \rightarrow 0} u(z) = \lim_{z \rightarrow 0} v(z) = \begin{cases} 0, & \text{при } \operatorname{Re} \Omega(z) < 0, \\ \infty, & \text{при } \operatorname{Re} \Omega(z) > 0. \end{cases}$$

Другой способ добиться однозначного соответствия между значениями функций $u(z)$ и $v(z)$ – рассматривать соотношение (9) в римановой поверхности – поверхности в многомерном комплексном пространстве, на которой данные функции становятся однозначными. Конечно, в рамках настоящей статьи этот способ мы не рассматриваем.

Следовательно, все наше действие происходит в области D_0 с разрезом, соединяющим точку $z = 0$ с бесконечно удаленной точкой $z = \infty$, и при этом соотношение (9) устанавливает взаимно-однозначное соответствие между значениями функций $u(z)$ и $v(z)$.

Тогда уравнение (6), где $m \geq 2$ – некоторое фиксированное натуральное число, сводится к эквивалентному линейному уравнению:

$$\partial_{\bar{z}} v - \frac{1}{m} \frac{a(z)}{|z|^\alpha} v(z) = \frac{1}{m} f(z), \quad m = 2, 3, \dots, \quad (10)$$

в силу взаимно-однозначного соответствия решений уравнений (6) и (10) согласно (9).

Кроме того, функции $u(z)$ и $v(z)$ принадлежат одному и тому же классу $u, v \in W_{\operatorname{loc}}^{1,p}(D_0)$, что видно из следующего соотношения между уравнениями (6) и (10):

$$\partial_{\bar{z}} u - \frac{a(z)}{|z|^\alpha} u(z) - f(z) \frac{u(z)}{\sqrt[m]{u(z)}} = m v^{m-1}(z) \left(\partial_{\bar{z}} v - \frac{1}{m} \frac{a(z)}{|z|^\alpha} v(z) - \frac{1}{m} f(z) \right) = 0.$$

Поэтому при выполнении условий теоремы проверка принадлежности $u, v \in W_{\operatorname{loc}}^{1,p}(D_0)$ сводится к проверке принадлежности к этому классу функций $e^{\Omega} f$, $e^{\Omega} T(e^{-\Omega} f)$.

Лемма. Если $\alpha \geq 1$, то существует регулярное решение $\Omega(z)$ уравнения

$$\Omega_{\bar{z}} = \frac{1}{m} \frac{a(z)}{|z|^\alpha}, \quad (11)$$

представимое в виде (7).

Прежде чем доказывать лемму, заметим, что функция $|z|^{-\alpha}$ является многозначной; при разрезе расширенной комплексной плоскости вдоль линии, соединяющей точки $z = 0$ и $z = \infty$ (например, луча $\arg z = \beta$), мы выбираем фиксированную ветвь данной функции и этот выбор в дальнейшем учитываем при дифференцировании. В самом деле, имеем равенство $|z|^{-\alpha} = z^{-\alpha/2} \bar{z}^{-\alpha/2} = e^{-\frac{\alpha}{2} \ln z} e^{-\frac{\alpha}{2} \ln \bar{z}}$. А так как логарифмы $\ln z = \ln |z| + i \arg z$ и $\ln \bar{z} = \ln |z| - i \arg z$ комплексно сопряжены и $\alpha \in \mathbb{R}$, то значение функции $|z|^{-\alpha}$ остается положительным вещественным числом. Обратим внимание, что функция $\omega_n(z)$ из формулы (7) является результатом прямого интегрирования функции $r(z, \bar{z}) = |z|^{-\alpha} p_n(z)$ по переменной $\bar{z}$, что объясняет появление логарифма в случае четного α , т. е. присутствия в некоторых слагаемых множителя $\bar{z}^{-1}$.

При первом варианте доказательства леммы достаточно проверить справедливость равенства (11) для функции $\Omega(z)$, представленной формулой (7), т. е. дифференцируя по $\bar{z}$ функцию $\Omega(z)$:

$$\Omega_{\bar{z}}(z) = ((\omega_n(z))_{\bar{z}} + (h(z))_{\bar{z}}).$$

Рассмотрим случай $\alpha/2 \notin \mathbb{Z}$; более конкретно, случай, когда $\alpha \neq 2(k_2 + 1)$ ни для какого неотрицательного целого $k_2 \leq n$. Имеем

$$\begin{aligned} (\omega_n(z))_{\bar{z}} &= \left(\frac{2}{m|z|^\alpha} \sum_{k_1+k_2 \leq n} a_{k_1 k_2} \frac{z^{k_1} \bar{z}^{k_2+1}}{2(k_2+1)-\alpha} \right)_{\bar{z}} = \\ &= \frac{2}{m} \sum_{k_1+k_2 \leq n} a_{k_1 k_2} z^{k_1-\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{\bar{z}^{k_2-\frac{\alpha}{2}+1}}{2(k_2+1)-\alpha} \right)_{\bar{z}} = \frac{p_n(z)}{m|z|^\alpha}. \end{aligned}$$

Согласно формуле (3),

$$\begin{aligned} (h(z))_{\bar{z}} &= \left(\left(T \frac{a_0(\zeta)}{m|\zeta|^\alpha} \right) (z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(T \frac{a_0(\zeta)}{m|\zeta|^\alpha} + \omega_n(\zeta) \right) \frac{d\zeta}{\zeta - z} \right)_{\bar{z}} = \left(T \frac{a_0(\zeta)}{m|\zeta|^\alpha} \right)_{\bar{z}} = \frac{1}{m} \frac{a_0(z)}{|z|^\alpha}, \\ \Omega_{\bar{z}}(z) &= (\omega_n(z))_{\bar{z}} + (h(z))_{\bar{z}} = \frac{p_n(z)}{m|z|^\alpha} + \frac{1}{m} \frac{a_0(z)}{|z|^\alpha} = \frac{1}{m} \frac{a(z)}{|z|^\alpha}, \end{aligned}$$

т. е. имеет место равенство (11).

Аналогичным образом проверяется и второй случай, т. е. когда $\alpha/2 - 1 = k_0 \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим второй вариант доказательства леммы.

Область D содержит точку $z = 0$ и ограничена гладким контуром Γ , ориентированным против часовой стрелки. Обозначим $D_\varepsilon = D \cap \{|z| > \varepsilon\}$.

Введем сингулярный интеграл

$$\Omega(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (T_\varepsilon(a(\zeta)|\zeta|^\alpha))(z) \equiv - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{D_\varepsilon} \frac{a(\zeta) d_2 \zeta}{|\zeta|^\alpha (\zeta - z)}, \quad (12)$$

где интегральный оператор T_ε определяется аналогично (2) по отношению к области D_ε .

Напомним, что если $f(x, y)$ – аналитическая функция переменных x и y , то можно указать формулу, которая несколько упрощает вычисление интеграла Помпейю – Векуа Tf . Сделав замену $x = 2^{-1}(z + \bar{z})$, $y = (2i)^{1-} (z - \bar{z})$ и вычислив неопределенный интеграл

$$F(z, \bar{z}) = \int f\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right) d\bar{z},$$

согласно формуле Бореля – Помпейю получим

$$(Tf)(z) = -\frac{1}{\pi} \int_D \frac{f(\zeta) d_2 \zeta}{\zeta - z} = F(z, \bar{z}) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}.$$

Рассмотрим случай $\alpha \neq 2(k_2 + 1)$. Используя представление коэффициента

$$a(z) = p_n(z) + a_0(z), \quad \text{где } a_0(z) = o(z^n) \quad \text{при } z \rightarrow 0,$$

в вышеприведенных обозначениях

$$\left(T_\varepsilon \frac{a(\zeta)}{|\zeta|^\alpha} \right) (z) = \left(T_\varepsilon \frac{p_n(\zeta)}{|\zeta|^\alpha} \right) (z) + \left(T_\varepsilon \frac{a_0(\zeta)}{|\zeta|^\alpha} \right) (z).$$

Так как $p_n(z)$ – некоторый многочлен по степеням z и $\bar{z}$, то согласно вышеприведенной формуле

$$\left(T_\varepsilon \frac{p_n(\zeta)}{|\zeta|^\alpha} \right) (z) = \left(T \frac{p_n(\zeta)}{|\zeta|^\alpha} \right) (z) = \omega_n(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega_n(z)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Вынесем отдельно малую окрестность особой точки $z = 0$, иначе говоря, представим область $\bar{D} = D \cup \Gamma = D_\varepsilon \cup \Gamma + \{|z| \leq \varepsilon\}$, где $D_\varepsilon = D \cap \{|z| > \varepsilon\}$. Согласно этому разбиению

$$\left(T_\varepsilon \frac{a_0(\zeta)}{|\zeta|^\alpha} \right) (z) = -\frac{1}{\pi} \int_D \frac{a_0(\zeta)}{|\zeta|^\alpha (\zeta - z)} d_2 \zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{T(a_0(\zeta)|\zeta|^{-\alpha})}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta| \leq \varepsilon} \frac{a_0(\zeta)}{|\zeta|^\alpha (\zeta - z)} d_2 \zeta,$$

или, что равносильно,

$$\begin{aligned} \left(T_\varepsilon \frac{a(\zeta)}{|\zeta|^\alpha} \right) (z) = \omega_n(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\omega_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{\pi} \int_D \frac{a_0(\zeta)}{|\zeta|^\alpha (\zeta - z)} d_2\zeta + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{T(a_0(\zeta) |\zeta|^{-\alpha})}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta| \leq \varepsilon} \frac{a_0(\zeta)}{|\zeta|^\alpha (\zeta - z)} d_2\zeta, \quad |z| > \varepsilon. \end{aligned} \quad (13)$$

Убедимся, что семейство функций $\Omega_\varepsilon(z) = (T_\varepsilon(a(\zeta) |\zeta|^{-\alpha}))(z)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно сходится к функции $\Omega(z) = (T(a(\zeta) |\zeta|^{-\alpha}))(z)$ и, в частности, справедливо равенство (11) при $\alpha \neq 2(k_2 + 1)$. В самом деле, используя неравенство Гёльдера, можно показать, что последний интеграл в правой части (13) по модулю не превосходит $CL_p(a_0(\zeta) |\zeta|^{-\alpha}) \varepsilon^\delta$, где $C = C(d)$ – постоянная, d – диаметр области, $\delta = 1 - p^{-1}$, так что соответствующий интеграл равномерно стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$.

В результате приходим к равенству

$$\begin{aligned} \Omega(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(T_\varepsilon \frac{a(\zeta)}{|\zeta|^\alpha} \right) (z) \equiv \left(T \frac{a(\zeta)}{|\zeta|^\alpha} \right) (z) = \omega_n(z) - \frac{1}{\pi} \int_D \frac{a_0(\zeta)}{|\zeta|^\alpha (\zeta - z)} d_2\zeta + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\omega_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{T(a_0(\zeta) |\zeta|^{-\alpha})}{\zeta - z} d\zeta. \end{aligned}$$

С учетом наличия множителя $1/m$ в формуле (11), при исходном обозначении функции $\Omega(z)$ получим

$$\begin{aligned} \Omega(z) = \left(T \frac{a(\zeta)}{m |\zeta|^\alpha} \right) (z) = \frac{1}{m} \omega_n(z) - \frac{1}{m\pi} \int_D \frac{a_0(\zeta)}{|\zeta|^\alpha (\zeta - z)} d_2\zeta + \\ + \frac{1}{2m\pi i} \int_\Gamma \frac{\omega_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2m\pi i} \int_\Gamma \frac{T(a_0(\zeta) |\zeta|^{-\alpha})}{\zeta - z} d\zeta. \end{aligned}$$

Контурные интегралы по границе Γ в последней формуле можно объединить в один контурный интеграл, и тогда функция $h(z)$ выражается формулой

$$h(z) \equiv \left(T \frac{a_0(\zeta)}{m |\zeta|^\alpha} \right) (z) + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \left(T \frac{a_0(\zeta)}{m |\zeta|^\alpha} + \frac{1}{m} \omega_n(\zeta) \right) \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Заметим, что $h(t) \equiv (T(m^{-1} a_0(\zeta) |\zeta|^{-\alpha}))(t)$ при $t \in \Gamma$, где $a_0(t) |t|^{-\alpha} \in H(\Gamma)$, в частности, $h(t) \in C^\mu(\Gamma)$.

В результате для представления функции $\Omega(z)$ получим

$$\Omega(z) = \frac{1}{m} \omega_n(z) + h(z).$$

Заметим, что контурный интеграл в представлении функции $h(z)$ представляет собой аналитическую функцию от комплексного переменного z , производная которой по $\bar{z}$ равна нулю, так что

$$\left(\frac{1}{m} \omega_n(z) \right)_{\bar{z}} = \frac{p_n(z)}{m |z|^\alpha}$$

и согласно формуле (3)

$$\Omega_{\bar{z}}(z) = \frac{1}{m} (\omega_n(z))_{\bar{z}} + (h(z))_{\bar{z}} = \frac{p_n(z)}{m |z|^\alpha} + \frac{1}{m} \frac{a_0(z)}{|z|^\alpha} = \frac{1}{m} \frac{a(z)}{|z|^\alpha}.$$

Аналогичным образом рассматривается случай $\alpha/2 - 1 = k_0 \in \mathbb{Z}$. Лемма доказана.

Вернемся к доказательству теоремы.

Итак, на основе приведенной выше леммы и формулы (7), в предположении $e^{-\Omega} f \in L^p(D)$ общее решение (10) в классе $v \in W_{\text{loc}}^{1,p}(D_0)$ согласно формуле (5) дается формулой

$$v = e^{\Omega} \left[\phi + \frac{1}{m} T(e^{-\Omega} f) \right],$$

где $\phi \in C_{\text{loc}}^\mu(D_0)$ – произвольная аналитическая в области $D_0 = D \setminus \{0\}$ функция. Пользуясь формулой (9) и последующими замечаниями, убеждаемся в справедливости утверждения теоремы. Теорема доказана.

Полученное интегральное представление решений рассматриваемого уравнения позволяет решать краевые задачи: типа Дирихле, Римана – Гильберта и др.

Список литературы

1. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Наука; 1988. 512 с.
2. Михайлов Л.Г. Новые классы особых интегральных уравнений и их применение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. Душанбе; 1963. 183 с.
3. Усманов З.Д. Обобщенные системы Коши – Римана с сингулярной точкой. Душанбе; 1993. 244 с.
4. Раджабов Н.Р. Интегральные представления и граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярной линией или сингулярными поверхностями, ч. 2. Душанбе: Изд-во ТГУ; 1981. 170 с.
5. Begehr H., Dai D.-Q. On continuous solution of a generalized Cauchy–Riemann system with more than one singularity. *Journal of Differential Equations*. 2004;196(1):67–90.
6. Meziani A. Representation of solutions of a singular CR equation in the plane. *Complex Variables and Elliptic Equations*. 2008;53(12):1111–1130.
7. Расулов А.Б., Солдатов А.П. Краевая задача для обобщенного уравнения Коши – Римана с сингулярными коэффициентами. *Дифференциальные уравнения*. 2016;52(5):637–650.
8. Абдыманапов С.А., Тунгатаров А.Б. Некоторые классы эллиптических систем на плоскости с сингулярными коэффициентами. Алматы: Наука; 2005. 169 с.
9. Расулов А.Б. Интегральные представления для одной системы второго порядка со сверхсингулярной точкой. *Дифференциальные уравнения*. 2004;40(8):1133–1138.
10. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. М.: Мир; 1966. 352 с.

References

1. Vekua IN. Generalized Analytic Functions. London etc.: Pergamon Press; 1962. 668 p.
2. Mikhailov LG. Novye klassy singulyarnykh integralnykh uravnenii i ikh primeneniye k differentsialnym uravneniyam s singulyarnymi koeffitsientami [New classes of singular integral equations and their applications to differential equations with singular coefficients]. Dushanbe; 1963. 183 p.
3. Usmanov ZD. Obobshchennyye sistemy Koshi–Rimana s singulyarnoi tochko [Generalized Cauchy–Riemann systems with a singular point]. Dushanbe; 1993. 244 p.
4. Radzhabov NR. Integralnye predstavleniya i granichnye zadachi dlya nekotorykh differentsialnykh uravnenii s singulyarnoi liniy ili singulyarnymi poverkhnostyami, Chast 2 [Integral representations and boundary value problems for some differential equations with a singular line or singular surfaces, Part 2]. Dushanbe: Tajik State Univ. Press; 1981. 170 p.
5. Begehr H., Dai D.-Q. On continuous solution of a generalized Cauchy–Riemann system with more than one singularity. *Journal of Differential Equations*. 2004;196(1):67–90.
6. Meziani A. Representation of solutions of a singular CR equation in the plane. *Complex Variables and Elliptic Equations*. 2008;53(12):1111–1130.
7. Rasulov AB., Soldatov AP. Boundary value problem for a generalized Cauchy – Riemann equation with singular coefficients. *Differential Equations*. 2016;52(5):619–629.
8. Abdymanapov SA., Tungatarov AB. Nekotorye klassy ellipticheskikh sistem na ploskosti s singulyarnymi koeffitsientami [Some classes of elliptic systems in the plane with singular coefficients]. Almaty: Nauka; 2005. 169 p.
9. Rasulov AB. Integral representations for a second-order system with a supersingular point. *Differential Equations*. 2004;40(8):1200–1204.
10. Bers L., John F., Schechter M. Partial Differential Equations. New York etc.: Interscience; 1964. XIV + 343 p.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 06.03.2026

Received March 6, 2026

Поступила после рецензирования 29.04.2026

Revised April 29, 2026

Принята к публикации 04.05.2026

Accepted May 4, 2026

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Якивич Наталья Витальевна – старший преподаватель кафедры высшей математики, Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт», г. Москва, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Natalia V. Yakivchik – Senior Lecturer of the Department of Higher Mathematics, National Research University "Moscow Power Engineering Institute", Moscow, Russia

[К содержанию](#)