

Краевая задача для уравнения Лапласа на плоскости с особенностью в младшем коэффициенте

Расулов А. Б.^{}, Капицына Т. В.^{}, Тарасова О. А.^{},

(Статья представлена членом редакционной коллегии Солдатовым А. П.)

Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт»,
Россия, 111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, 14
rasulzoda55@gmail.com, kapitsynatv@mpei.ru, tarasovaOA@mpei.ru

Аннотация. В работе в ограниченной области на плоскости рассматривается одно эллиптическое уравнение второго порядка с полярной особенностью в младшем коэффициенте, главным оператором которого является оператор Лапласа. Изучены вопросы построения явного интегрального представления общего решения. Отдельно рассмотрен случай с полярной особенностью первого порядка с использованием видоизмененного интеграла Помпейю – Векуа. Полученное интегральное представление применяется в нахождении единственного решения задачи типа Дирихле. Полученное явное решение рассматриваемого уравнения также дает возможность непосредственно ставить и исследовать задачи типа линейного сопряжения и Римана – Гильберта.

Ключевые слова: уравнение Лапласа, полярная особенность, задача Дирихле

Для цитирования: Расулов А.Б., Капицына Т.В., Тарасова О.А. Краевая задача для уравнения Лапласа на плоскости с особенностью в младшем коэффициенте. *Прикладная математика & Физика*. 2026;58(2):168–175.

DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-2-168-175 EDN BYARBE

Original Research

A Boundary Value Problem for the Laplace Equation on a Plane with a Peculiarity in the Least Coefficient

Abdurauf B. Rasulov^{}, Tatyana V. Kapitsyna^{}, Oksana A. Tarasova^{}

(Article submitted by a member of the editorial board Soldatov A. P.)

National Research University "Moscow Power Engineering Institute",
14 Krasnokazarmennaya St., Moscow 111250, Russia
rasulzoda55@gmail.com, kapitsynatv@mpei.ru, tarasovaOA@mpei.ru

Abstract. In a bounded domain on a plane, a second-order elliptic equation with a polar singularity in the lower-order coefficient is considered, whose principal operator is the Laplace operator. The problem of constructing an explicit integral representation of the general solution is studied. The case with a first-order polar singularity is considered separately using a modified Pompeiu – Vekua integral. The obtained integral representation is applied to find the unique solution of the Dirichlet-type problem. The obtained explicit solution of the considered equation also allows for the direct formulation and investigation of linear conjugation and Riemann – Hilbert type problems.

Keywords: Laplace Equation, Polar Singularity, Dirichlet Problem

For citation: Rasulov AB., Kapitsyna TV., Tarasova OA. A Boundary Value Problem for the Laplace Equation on a Plane with a Peculiarity in the Least Coefficient. *Applied Mathematics & Physics*. 2026;58(2):168–175. (In Russ.).

DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-2-168-175 EDN BYARBE

1. Введение. Уравнения Лапласа с сингулярными коэффициентами в младших членах — это особый класс эллиптических уравнений, коэффициенты или правая часть которых могут быть разрывными или даже бесконечными в определенных точках. Это усложняет их исследование. Такие уравнения встречаются в физике при описании неоднородных сред, например, при моделировании распространения волн в материалах с дефектами.

В работе [1] найдены интегральные представления для некоторых классов дифференциальных уравнений эллиптического типа с сингулярными гиперплоскостями через решение уравнений с регулярными коэффициентами. Более подробную информацию по эллиптическим уравнениям с сингулярными коэффициентами можно найти в работах [2, 3, 4].

Пусть область D содержит начало координат, ограничена границей Γ , ориентированной против часовой стрелки. В дальнейшем $D_0 = D \setminus \{0\}$.

Настоящая работа посвящена построению интегрального представления общего решения уравнения Лапласа в ограниченной области D на плоскости с полярной особенностью первого порядка в младшем коэффициенте. Полученные интегральные представления применяются к исследованию краевых задач.

В стандартных обозначениях $2\partial_{\bar{z}} = \partial_x + i\partial_y$, $2\partial_z = \partial_x - i\partial_y$, $4\partial_z\partial_{\bar{z}} = \Delta$, $u = u_1 + iu_2$ в области D_0 рассмотрим следующее сингулярное уравнение Лапласа с особенностью в младшем коэффициенте:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} - \left(\frac{a}{\bar{z}} + A \right) \frac{\partial u}{\partial z} = f, \quad (1)$$

причем $a = a_1 + ia_2 \in \mathbb{C}$ — комплексное число, функции $A(z), f(z) \in L_p(D)$, $p > 2$.

Для уточнения класса решений уравнения (1) напомним некоторые известные факты из теории эллиптических систем, изложенные в работах [5, 6].

Заметим, что функция f принадлежит соболевскому пространству $W^{1,p}(D_0)$, если в любой подобласти $G_0 \in D_0$ ее обобщенные производные $f_z, f_{\bar{z}} \in L^p_{loc}(G_0)$, $p > 2$.

Пусть в некотором открытом множестве G на плоскости задана линейная эллиптическая система первого порядка с постоянными старшими коэффициентами, младшие коэффициенты и правая часть которой принадлежат $L^p_{loc}(G)$, т. е. принадлежат $W^{1,p}(G_0)$ в любой ограниченной области G_0 , лежащей в G вместе со своей границей. Тогда на основании внутренней регулярности любое слабое решение u этого уравнения регулярно в том смысле, что оно принадлежит классу $W^{1,p}_{loc}(G)$ и удовлетворяет рассматриваемой системе. В силу теоремы вложения функция u в действительности принадлежит классу $C^\mu(\bar{G}_0)$ с показателем $\mu \leq (p-2)/p$. Этот факт был доказан И.Н. Векуа (см. [5]). В соответствии с внутренней регулярностью решений в дальнейшем решение линейной эллиптической системы первого порядка предполагается регулярным в открытом множестве D_0 .

Так как уравнение (1) сводится к интегрированию двух эллиптических уравнений первого порядка в соответствии с внутренней регулярностью решений, в дальнейшем решение уравнения (1) предполагается регулярным в открытом множестве D_0 .

Более точно функцию $u(z) \in W^{1,p}_{loc}(D_0)$, где $p > 2$, удовлетворяющую уравнению (1), почти всюду называем его регулярным решением.

2. Интегральные представления решений. Введем операторы Помпейю – Векуа ([5, с. 29])

$$(T\varphi)(z) = -\frac{1}{\pi} \int_D \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d_2\zeta, \quad (2)$$

где $d_2\zeta$ — элемент площади. Хорошо известно, что при $p > 2$ этот оператор действует $L^p(D) \rightarrow W^{1,p}(D) \subseteq H(\bar{D})$ и удовлетворяет уравнению

$$(T\varphi)_{\bar{z}} = \varphi, \quad (3)$$

а также

$$(\bar{T}f)(z) = -\frac{1}{\pi} \int_D \frac{f(\zeta)}{\bar{\zeta} - \bar{z}} d_2\zeta, \quad (4)$$

с плотностью $f \in L^p(D)$, $p > 2$. Здесь и ниже $d_2\zeta$ означает элемент площади. В частности (см. [5]), оператор $\bar{T}$ также компактен в пространствах $L^p(D)$ и $C(\bar{D})$, и

$$((\bar{T}f))_z = f. \quad (5)$$

В обозначениях

$$\operatorname{Re} a = a_1, \quad \omega = 2a \ln |z|, \quad h(z) = (TA)(z) + \frac{a}{\pi i} \int_{\partial\Gamma} \frac{\ln |\zeta|}{\zeta - z} d\zeta \quad (6)$$

о представлении решения уравнения (1) справедлива следующая

Теорема 1. Пусть $-1 < 2a_1 < 1$ и функция $A(z) \in L^p(D)$, $p > 2$. Тогда при $|z|^{-2a} f \in L^p(D)$, $p > 2$ любое регулярное решение уравнения (1) в области D_0 задается формулой

$$u = \bar{\psi} + \bar{T}|z|^{2a} e^h \phi + \bar{T}|z|^{2a} e^h T|z|^{-2a} e^{-h} f, \quad (7)$$

где $\bar{\psi}$ — антианалитическая функция, и функция ϕ аналитична в области D_0 , причем $|z|^{-2a} \phi \in L^p(D)$, $p > 2$. Функции ψ и ϕ определяются однозначно по функции u и ее производной u_z .

Доказательство. Вначале установим существование интегральных операторов в обобщенном решении и их принадлежности классу Гельдера, из которых составлено интегральное представление (7). С этой целью необходимо предварительно напомнить действие в различных пространствах интегрального оператора вида

$$(K_0\varphi)(z) = \int_D \frac{\varphi(\zeta)}{|\zeta|^m |\zeta - z|^\alpha} d_2\zeta, \quad z \in D, \quad (8)$$

где положительные m, α удовлетворяют условиям

$$0 < m < 1 \leq \alpha < (3 - m)/2, \quad (9)$$

таким образом $0 < 3 - m - 2\alpha < 1$.

Лемма 1. Пусть

$$p > 2/(3 - m - 2\alpha), \quad \mu = 3 - m - 2\alpha - 2/p. \quad (10)$$

Тогда оператор K_0 ограничен $L^p(D) \rightarrow C^\mu(\bar{D})$.

Доказательство леммы 1 можно найти в [7].

Применяем лемму 1 к интегральным операторам в формуле (7):

$$(K_1 f)(z) \equiv (T|z|^{-2\alpha} e^{-h} f)(z) = \int_D \frac{e^{-h} f(\zeta)}{|\zeta|^{2\alpha} (\zeta - z)} d_2 \zeta, \quad z \in D,$$

где положительные $m = 2\alpha, \alpha = 1$, удовлетворяют условиям леммы 1, при этом $h, e^{-h} \in C^\mu(\bar{D})$. Следовательно, оператор K_1 ограничен $L^p(D) \rightarrow C^{\mu_1}(\bar{D})$, $0 < \mu_1 < 1$;

$$(K_2 K_1 f)(z) \equiv (T|z|^{2\alpha} e^{-h} K_1 f)(z) = \int_D \frac{|\zeta|^{2\alpha} e^h K_1 f(\zeta)}{\bar{\zeta} - \bar{z}} d_2 \zeta, \quad z \in D,$$

где положительные $m = 2\alpha, \alpha = 1$ удовлетворяют условиям леммы 1, при этом $h, e^h \in C^\mu(\bar{D})$. Следовательно, оператор K_2 ограничен $L^p(D) \rightarrow C^{\mu_2}(\bar{D})$, $0 < \mu_2 < 1$.

Аналогично, при $|z|^{2\alpha} \phi \in L^p(D)$, $p > 2$ оператор

$$(K_3 \phi)(z) \equiv (T|z|^{2\alpha} e^{-h} \phi)(z), \quad z \in D,$$

ограничен $L^p(D) \rightarrow C^{\mu_3}(\bar{D})$, $0 < \mu_3 < 1$.

Уравнение (1) сводится к интегрированию двух уравнений первого порядка вида

$$\begin{cases} U_{\bar{z}} - \left(\frac{a}{z} + A\right) U = f, \\ u_z = U. \end{cases} \quad (11)$$

Положим

$$\Omega = \omega + h, \quad \text{где } \omega = 2a \ln |z|, \quad (12)$$

$h(z)$ определяется согласно формуле (6).

При доказательстве теоремы 1 существенную роль играет следующая

Лемма 2. Пусть в первом однородном уравнении (11) коэффициент $A \in L^p(D)$, $p > 2$. Тогда функция Ω удовлетворяет уравнению

$$\Omega_{\bar{z}} = \frac{a}{z} + A. \quad (13)$$

Доказательство. Приведем доказательство леммы 2 сначала с обратного. Действительно, поскольку

$$2 \frac{\partial |z|}{\partial \bar{z}} = \frac{z}{|z|},$$

и согласно свойству (3) оператора Помпейю – Векуа, получим

$$(TA)_{\bar{z}} = A.$$

С учетом этих соображений, справедливость равенства (13) установлена.

Теперь рассмотрим прямое доказательство леммы 2. Напомним классическую формулу Помпейю. Если $u(z) \in C^1(D) \cap C(\bar{D})$, то имеет место тождество, которое называется классической формулой Помпейю:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} u(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi} \int_D u_{\bar{\zeta}}(\zeta) \frac{d_2 \zeta}{\zeta - z}, \quad z \in D,$$

где интеграл по области понимается как несобственный интеграл, $d_2 \zeta = d\bar{\xi} d\eta$ — элемент площади.

На основе формулы Помпейю нетрудно получить формулу, дающую все решения уравнения

$$\partial_{\bar{z}} u = f(z).$$

Как известно, если плотность f суммируема в области D и в каждом замкнутом круге $B \subseteq D$ принадлежит $L^p(B)$ с любым $p > 2$, то функция $u = Tg$ принадлежит $W^{1,p}(B)$ и удовлетворяет неоднородному уравнению Коши – Римана, то

$$u(z) = \phi(z) + (Tf)(z), \quad \phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{u(\zeta) d\zeta}{\zeta - z},$$

где

$$(Tf)(z) = -\frac{1}{\pi} \int_D \frac{f(\zeta) d_2\zeta}{\zeta - z}.$$

Рассмотрим уравнение

$$U = |z|^{2a} e^h [\phi + T(|z|^{-2a} e^{-h} f)].$$

Тогда формула Помпейю для функции Ω , производная которой имеет полярную особенность первого порядка в точке $z = 0$, в предположении $a \in \mathbb{C}$, $A \in L^p(D)$ представима в виде

$$\Omega = 2a \ln |z| + \frac{a}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\ln |\zeta|}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{\pi} \int_D \frac{A(\zeta)}{\zeta - z} d_2\zeta,$$

которая вблизи особой точки $z = 0$ имеет поведение

$$\Omega = O(\ln |z|) \quad \text{при } z \rightarrow 0.$$

Обозначая через $h(z)$ последние два слагаемые, приходим к формуле (12).

Лемма 3. Пусть функция $\Omega(z)$ определена формулой (12) и функция $|z|^{-2a} e^{-h} f \in L^p(D)$, $p > 2$. Тогда общее решение первого уравнения (11) в классе $C(D \setminus 0)$ задается формулой

$$U = |z|^{2a} e^h [\phi + T(|z|^{-2a} e^{-h} f)], \quad (14)$$

где функция $\phi \in C(\overline{D} \setminus 0)$ аналитична в открытом множестве $D \setminus 0$.

Доказательство. Легко проверить, что функции $U = e^{\Omega}$ удовлетворяет однородное уравнение

$$U_{\bar{z}} - \left(\frac{a}{\rho} + A \right) U = f.$$

Тогда для функции $V = e^{-\Omega} U$ имеем соотношение

$$V_{\bar{z}} = e^{-\Omega} U_{\bar{z}} - (A) e^{-\Omega} U = e^{-\Omega} f.$$

Из этой формулы, с помощью оператора T , получим $V = \phi + T(e^{-\Omega} f)$, где функция $\phi \in C(\overline{D} \setminus 0)$ аналитична в открытом множестве $D \setminus 0$. В результате приходим к представлению (14). Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы 1.

Рассмотрим вопрос интегрирования второго уравнения (11):

$$u_z = U.$$

В получении общего решения данного уравнения и в его описании существенную роль играет интегральный оператор (4) Помпейю – Векуа. Следовательно, общее решение этого уравнения задается формулой ([5, с. 29])

$$u = \bar{\psi} + \bar{T}U \quad (15)$$

с произвольной в D антианалитической функцией $\bar{\psi}$. Подставляя значение $U(z)$ из формулы (14), в формуле (15) получим интегральное представление (7).

Находим формулу обращения полученного интегрального представления. Из формулы (14), в случае $-1 < 2a < 1$ с учетом $u_z = U$, а также из формулы (15) получим

$$\phi = |z|^{2a} u_z - T(e^{-\Omega} f),$$

$$\psi = \bar{u} - \bar{T}u_z.$$

Теорема 1 доказана.

Следствие. Если $\psi \in C^{\mu_1}(\overline{D})$, тогда в интегральном представлении (7) регулярное решение уравнения (1) также принадлежит классу Гельдера $u \in C^v(\overline{D})$, где $v = \min\{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4\}$.

3. Интегральные представления решений в особом случае. Обозначим $C_\lambda(\overline{D}, 0)$, $\lambda < 0$, пространство всех непрерывных в $\overline{D} \setminus \{0\}$ функций $\varphi(z)$ с поведением $O(|z|^\lambda)$ при $z \rightarrow 0$. Оно снабжается нормой

$$|\varphi| = \sup_{z \in D} |z|^{-\lambda} |\varphi(z)|,$$

относительно которой, очевидно, банахово.

Для исследования уравнения (1) в особом случае ($2a_1 = -1$), в дальнейшем удобнее иметь дело с видоизмененным интегралом Помпейю – Векуа

$$(T_0\varphi)(z) = \frac{1}{\pi} \int_D \frac{\varphi(t)}{t(t-z)} d_2t, \quad z \in D, \quad (16)$$

который, очевидно, имеет смысл для функций $\varphi \in C_\lambda(\overline{D}, 0)$ с $\lambda > -1$, которая была изучена в работах [8, 9, 10]. Мы воспользуемся леммой, приведенной в работе [9], которую для наглядности изложим с коротким ее доказательством.

Лемма 4. а) Оператор T_0 ограничен в пространстве $C_\lambda(\overline{D}, 0)$, $-1 < \lambda < 0$ и его норма $|T_0|_{\mathcal{L}}$ совпадает с постоянной

$$\sigma(\lambda) = \int_{\mathbb{C}} \frac{|t|^\lambda}{|t||t-1|} d_2t. \quad (17)$$

б) Функция $\sigma(\lambda)$ обладает свойством симметрии $\sigma(\lambda) = \sigma(-\lambda-1)$ на интервале $(-1, 0)$ и возрастает от $\sigma(-1/2)$ до $+\infty$ на интервале $(-1/2, 0)$.

Доказательство. а) Пусть $\varphi \in C_\lambda(\overline{D}, 0)$, $-1 < \lambda < 0$. Тогда

$$|z|^{-\lambda} |(T_0\varphi)(z)| \leq |\varphi|_{C_\lambda} \int_D \frac{|t|^\lambda}{|z|^\lambda |t(t-z)|} d_2t.$$

Легко видеть, что интеграл здесь не превосходит постоянной (17), так что функция $T_0\varphi \in C_\lambda(\overline{D}, 0)$ и по определению отсюда

$$|T_0\varphi|_{C_\lambda} \leq \sigma(\lambda) |\varphi|_{C_\lambda}. \quad (18)$$

Пусть $0 < r < 1$ столь мало, что проколотый круг $0 < |z| \leq \sqrt{r}$ содержится в D . Рассмотрим функцию $\varphi(z) \in C_\lambda$ единичной нормы, которая в круге $|z| \leq r$ совпадает с

$$\varphi(z) = |z|^\lambda \frac{z(z-r)}{|z(z-r)|}.$$

Тогда

$$(T_0\varphi)(r) \geq \frac{1}{\pi} \left(\int_{|t| \leq \sqrt{r}} - \int_{|t| \geq \sqrt{r}} \right) \frac{|t|^\lambda}{|t||t-r|} d_2t = \frac{r^\lambda}{\pi} \left(\int_{|t| \leq 1/\sqrt{r}} - \int_{|t| \geq 1/\sqrt{r}} \right) \frac{|t|^\lambda}{|t||t-1|} d_2t.$$

Следовательно,

$$r^{-\lambda} (T_0\varphi)(r) \geq \left(\sigma(\lambda) - \frac{2}{\pi} \int_{|t| \geq 1/\sqrt{r}} \frac{|t|^\lambda}{|t||t-1|} d_2t \right),$$

что в соединении с (18) означает, что норма оператора T_0 в пространстве C_λ в точности совпадает с $\sigma(\lambda)$.

б) Равенство $\sigma(\lambda) = \sigma(-\lambda-1)$ получается заменой $t = 1/t'$ в интеграле (17). Аналогично убеждаемся, что производная

$$\sigma'(\lambda) = \int_{\mathbb{C}} \frac{(\ln|t|)|t|^\lambda}{|t||t-1|} d_2t = \int_{|t| < 1} \frac{(\ln|t|)(|t|^\lambda - |t|^{-\lambda-1})}{|t||t-1|} d_2t,$$

что доказывает второе утверждение в (b). Лемма 4 доказана.

Заметим, что положительная постоянная $\sigma(-1/2)$ достаточно сложным образом выражается через эллиптические интегралы первого и третьего рода.

Рассмотрим интеграл для функций $\varphi \in C_\lambda$ с $0 < \lambda < 1$. В этом случае он имеет смысл и при $z = 0$. Поскольку $\tilde{\varphi}(z) = z^{-1} \in C_{\lambda-1}$, на основании леммы 4 функция $T_0\tilde{\varphi}$ принадлежит $C_{\lambda-1}$. С учетом очевидного тождества

$$(T_0\varphi)(z) = (T_0\varphi)(0) = z(T_0\tilde{\varphi})(z)$$

заключаем, что оператор $(T_0\varphi)(z) = (T_0\varphi)(0)$ ограничен в пространстве C_λ и его норма совпадает с $\sigma(\lambda-1)$.

В случае $2a_1 = -1$, об интегральном представлении решения уравнения (1) имеет место следующая
Теорема 2. Пусть $2a_1 = -1$ и функция $A(z) \in L^p(D)$, $p > 2$. Тогда при $f \in L^p(D)$, $p > 2$ любое регулярное решение уравнения (1) в области D_0 и ограниченное в особой точке $z = 0$ задается формулой

$$u = \bar{\psi} + \bar{T}_0 |z|^{i2a_2} e^h \phi + \bar{T}_0 |z|^{i2a_2} e^h T |z|^{1-i2a_2} e^{-h} f, \quad (19)$$

где $\bar{\psi} \in C(\bar{D})$ — антианалитическая функция в области D , функция ϕ аналитична в области D_0 , причем $\phi \in L^p(D)$, $p > 2$. Функции ψ и ϕ определяются однозначно по функции u и ее производной u_z .

Напомним, что здесь через $\overline{(T_0)\phi}$ обозначено

$$(\overline{T_0\phi})(z) = -\frac{1}{\pi} \int_D \frac{\phi(\zeta)}{\bar{\zeta}(\zeta - z)} d_2 \zeta.$$

Доказательство. Непосредственной проверкой можно убедиться, что интегральное представление решений (19) действительно удовлетворяет уравнению (1) в случае $2a_1 = -1$. Поэтому достаточно проверить ее принадлежность к классу $W^{1,p}(D_0)$ и ограниченности при $z \rightarrow 0$. В интегральном представлении решений (19) второе слагаемое

$$\bar{T}_0 |z|^{i2a_2} e^h \phi$$

согласно условию $\phi(z) \in L^p$, $p > 2$ является ограниченной функцией при $z \rightarrow 0$, так как классы L^p , $p > 2$ и $C_\lambda(\bar{D}, 0)$, $-1 < \lambda < 0$ в данном случае совпадают.

В интегральном представлении решений (19) третье слагаемое

$$\bar{T}_0 |z|^{i2a_2} e^h T |z|^{1-i2a_2} e^{-h} f,$$

согласно лемме 4 является ограниченной функцией. С учетом функции $\bar{\psi} \in C(\bar{D})$ теорема доказана.

Полученное интегральное представление (19) также дает возможность ставить и исследовать различные краевые задачи.

Если простой контур $\Gamma = \partial D$ принадлежит классу $C^{1,\mu}$, тогда по теореме Келлога конформно можно отобразить эту область на единичный круг $\mathbb{D} = \{z : |z| \leq 1\}$. Поэтому при исследовании краевых задач мы ограничимся случаем, когда область является единичным кругом и при этом $\Gamma = \{z : |z| = 1\}$.

4. Краевые задачи. Краевая задача D. Найти решение $u(z) \in C(\bar{D})$ уравнения (1), удовлетворяющее на контуре Γ граничным условиям

$$\begin{cases} \operatorname{Re} |z|^{2a} u_z(t) = g_1(t), & t \in \Gamma, \\ \operatorname{Re} \bar{u}(t) = g_2(t), & t \in \Gamma, \\ u(z_0) = 0, \quad u_{\bar{z}}(z_0) = 0, & z_0 \in D, \end{cases} \quad (20)$$

где $g_k(t) \in C(\Gamma)$ ($k = 1, 2$) — заданные функции, z_0 — произвольная фиксированная точка области D .

Решение. На основе формулы (14) с учетом $U = u_z$, используя первое условие задачи D, приходим к новой формулировке:

Требуется найти решение первого уравнения из (11) класса $u \in C(\bar{D})$ в виде (14), в котором произвольная функция $\phi(z)$ удовлетворяет на контуре Γ граничному условию

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \phi|_{\Gamma} = \bar{g}_1(t), \\ \operatorname{Im} \phi(z_0) = 0, \quad z_0 \in D_0, \end{cases} \quad (21)$$

где $\bar{g}_1 = g_1 - \operatorname{Re} T |z|^{2a} f$ и $\bar{g}_1(t) \in C^v(\Gamma)$, $v < 1 - 2/p$, $p > 2$.

Точное решение (14) представимо в виде ([11, с. 124])

$$\phi = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \bar{g}_1(\zeta) d\zeta + ic_0, \quad (22)$$

где $c_0 = -\frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\operatorname{Im}(\zeta z_0)}{|\zeta - z_0|^2} \bar{g}_1(\zeta) d\zeta$.

Теперь, подставляя значение ϕ из формулы (22) в (7), а также используя второе условие из (16), т. е.

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \bar{u}(t) = g_2(t), & t \in \Gamma, \\ u(z_0) = 0, \quad z_0 \in D, \end{cases} \quad (23)$$

для нахождения неизвестной антианалитической функции $\bar{\psi}(z)$ приходим к следующей краевой задаче:

Требуется найти аналитическую функцию $\psi(z)$, которая удовлетворяет на контуре Γ граничному условию

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \psi|_{\Gamma} = \bar{g}_2(t), \\ \operatorname{Im} \psi(z_0) = 0, \quad z_0 \in D_0, \end{cases} \quad (24)$$

где $\bar{g}_2 = \bar{g}_2 + f_1(\bar{g}_1)$, $f_1(\bar{g}_1) = -\operatorname{Re}\{\bar{T}|\zeta|^{2a}e^{h\phi}(\bar{g}_1) + \bar{T}|\zeta|^{2a}e^{hT}|\zeta|^{-2a}e^{-h}f\}$ и $\bar{g}_2(t) \in C^v(\Gamma)$, $v < 1 - 2/p$, $p > 2$.

Точное решение задачи (24) представимо в виде ([11, с. 124])

$$\psi = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \bar{g}_2(\zeta) d\zeta + ic_1,$$

$$\text{где } c_1 = -\frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\operatorname{Im}(\zeta z_0)}{|\zeta - z_0|^2} \bar{g}_2(\zeta) d\zeta.$$

В результате приходим к решению исходной краевой задачи D.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 1 и $g_k(t) \in H(\Gamma)$, $k = 1, 2$. Тогда краевая задача D в классе $u(z) \in C^v(\bar{D})$ имеет единственное решение

$$u = I_0(g_2)(z) + \bar{T}|\zeta|^{2a}e^{h}I_0(g_1) + \bar{T}|\zeta|^{2a}e^{hT}|\zeta|^{-2a}e^{-h}f,$$

где

$$I_0(g_k)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left[\frac{\zeta + z}{\zeta - z} - \frac{2i \operatorname{Im}(\zeta z_0)}{|\zeta - z_0|^2} \right] \bar{g}_k(\zeta) d\zeta, \quad k = 1, 2,$$

где $\bar{g}_1, \bar{g}_2$ соответственно выражаются формулами, приведенными в (21) и (24) [12].

Замечание. Полученное выше интегральное представление также дает возможность ставить и исследовать задачи типа линейного сопряжения и Римана – Гильберта.

Список литературы

1. Раджабов Н.Р. Интегральные представления для некоторых классов дифференциальных уравнений эллиптического типа с сингулярными гиперплоскостями через решение уравнений с регулярными коэффициентами. Доклады АН СССР. 1977;233(5):796–799.
2. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука; 1968. 511 с.
3. Солдатов А.П. Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи. I. Функциональный анализ, СМФН. 2017;63(1):1–189.
4. Radjabov N. An Introduction to the Theory of Partial Differential Equations With Super-Singular Coefficients. Tehran; 1996. 236 p.
5. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Наука; 1988. 510 с.
6. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. М.: Мир; 1966. 351 с.
7. Расулов А.Б. Об общем решении уравнения типа Коши – Римана со степенными особенностями в младших коэффициентах. Математические заметки. 2020;108(5):791–795.
8. Солдатов А.П. Краевая задача линейного сопряжения теории функций. Известия АН СССР. Серия математическая. 1979;43(1):184–202.
9. Soldatov AP., Rasulov AB. Generalized Cauchy – Riemann Equations with Power-law Singularities in Coefficients of Lower Order. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. 2021;357:535–548.
10. Солдатов А.П. Сингулярные интегро-функциональные операторы на кусочно-гладкой кривой. Новосибирск; 2024. 296 с.
11. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М.: Наука; 1982. 336 с.
12. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука; 1977. 640 с.

References

1. Radjabov NR. Integral representations for some classes of elliptic differential equations with singular hyperplanes through the solution of equations with regular coefficients. Doklady AN SSSR. 1977;233(5):796–799. (In Russ.).
2. Muskhelishvili NI. Singulyarnyye integral'nyye uravneniya [Singular integral equations]. Moscow: Nauka, 1968. 511 p.
3. Soldatov AP. Singular integral operators and elliptic boundary value problems. I. Funktsional'nyy analiz, SMFN. 2017;63(1):1–189. (In Russ.).
4. Radjabov N. An Introduction to the Theory of Partial Differential Equations With Super-Singular Coefficients. Tehran; 1996. 236 p.

5. Vekua IN. Obobshchennyye analiticheskiye funktsii [Generalized analytical functions]. Moscow: Nauka, 1988. 510 p.
6. Bers L., John F., Schechter M. Uravneniya s chastnymi proizvodnymi [Partial Differential Equations]. Moscow: Mir, 1966. 351 p.
7. Rasulov AB. On the general solution of a Cauchy – Riemann type equation with power singularities in the lower coefficients. *Matematicheskiye zametki*. 2020;108(5):791–795. (In Russ.)
8. Soldatov AP. Boundary value problem of linear conjugation of function theory. *Izvestiya AN SSSR. Seriya matematicheskaya*. 1979;43(1):184–202. (In Russ.)
9. Soldatov AP., Rasulov AB. Generalized Cauchy – Riemann Equations with Power-law Singularities in Coefficients of Lower Order. *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*. 2021;357:535–548.
10. Soldatov AP. Singulyarnyye integro-funktsional'nyye operatory na kusochno-gladkoy krivoy [Singular integro-functional operators on a piecewise smooth curve]. Novosibirsk; 2024. 296 p.
11. Bitsadze AV. Uravneniya matematicheskoy fiziki [Equations of Mathematical Physics]. Moscow: Nauka, 1982. 336 p.
12. Gakhov FD. Krayevyye zadachi [Boundary Value Problems]. Moscow: Nauka, 1977. 640 p.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 18.12.2025

Поступила после рецензирования 27.04.2026

Принята к публикации 04.05.2026

Received December 18, 2025

Revised April 27, 2026

Accepted May 4, 2026

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Расулов Абдурауф Бабаджанович – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры высшей математики, Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт», г. Москва, Россия

Капицына Татьяна Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт», г. Москва, Россия

Тарасова Оксана Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт», г. Москва, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Abdurauf B. Rasulov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Professor of the Department of the Higher Mathematics, National Research University "Moscow Power Engineering Institute", Moscow, Russia

Tatyana V. Kapitsyna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of the Higher Mathematics, National Research University "Moscow Power Engineering Institute", Moscow, Russia

Oksana A. Tarasova – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of the Higher Mathematics, National Research University "Moscow Power Engineering Institute", Moscow, Russia

К содержанию