

Усреднение уравнения Лаврентьева – Бицадзе в области, периодически перфорированной вдоль линии смены типа уравнения

Кервенов К. Е.¹ , Мамунова Т. Р.² 

(Статья представлена членом редакционной коллегии Алхутным Ю.А.)

¹ Карагандинский национальный исследовательский университет имени академика Е. А. Букетова,
Казахстан, 100024, г. Караганда, ул. Университетская, д. 28
kervenev@bk.ru

² Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Россия, 119991, г. Москва, Ленинские горы, д. 1
tomirismamunova@gmail.com

Аннотация. Рассмотрена задача для уравнения Лаврентьева – Бицадзе в модельной области, перфорированной вдоль линии смены типа уравнения и имеющей характерный размер микрон неоднородностей ε , с однородным краевым условием Дирихле на границе полостей и однородным условием Дирихле на внешней части границы. Для этой задачи построена усреднённая задача и доказана сходимость решений исходной задачи к решению усреднённой. При этом обнаружено, что предельная (усреднённая) задача вырождается в «гиперболической» части области.

Ключевые слова: уравнение Лаврентьева – Бицадзе, перфорированная область, уравнение смешанного типа, усреднение

Финансирование: Статья подготовлена при финансовой поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики (грант Минобрнауки России № 075-15-2025-345).

Для цитирования: Кервенов К.Е., Мамунова Т.Р. Усреднение уравнения Лаврентьева – Бицадзе в области, периодически перфорированной вдоль линии смены типа уравнения. *Прикладная математика & Физика*. 2026;58(2):137–146. DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-2-137-146 EDN NTVWDK

Original Research

Homogenization of Lavrentiev – Bitsadze Equation in a Domain Periodically Perforated Along the Line of the Equation Type Change

Kabylgazy E. Kervenev¹ , Tomiris R. Mamunova² 

(Article submitted by a member of the editorial board Alkhutov Yu. A.)

¹ Buketov Karaganda National Research University,
28 Universitetskaya St., Karaganda 100024, Kazakhstan
kervenev@bk.ru

² Lomonosov Moscow State University,
1 Leninskie Gory, Moscow 119991, Russia
tomirismamunova@gmail.com

Abstract. A problem for the Lavrentiev – Bitsadze equation in a model domain perforated along the line of the equation type change with a characteristic size of micro-inhomogeneities ε is considered. Homogeneous Dirichlet boundary conditions are set on the boundary of the cavities and on the external part of the boundary. The homogenized problem is constructed for this problem, and the convergence of solutions of the original problem to the solution of the homogenized one is proved. It is found that the limiting (homogenized) problem degenerates in the “hyperbolic” part of the domain.

Keywords: Lavrentiev – Bitsadze equation, perforated domain, mixed-type equation, homogenization

Funding: This article was supported by the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics (grant of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation No. 075-15-2025-345).

For citation: Kervenev KE., Mamunova TR. Homogenization of Lavrentiev – Bitsadze Equation in a Domain Periodically Perforated Along the Line of the Equation Type Change. *Applied Mathematics & Physics*. 2026;58(2):137–146. (In Russ.). DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-2-137-146 EDN NTVWDK

1. Введение. Усреднение задач в микрон неоднородных средах является важной прикладной задачей и существенной частью теории дифференциальных уравнений. Такие задачи возникают во многих областях науки, таких как химия, физика, биология, биофизика и биохимия, геология, инженерия, материаловедение и др. Исследования в данной области приводят к математическим постановкам, включающим

уравнения и краевые условия с малыми параметрами, характеризующими размеры микронеоднородностей в областях со сложной геометрией, имеющей нетривиальную микронеоднородную структуру. Часто рассматриваются уравнения в частично перфорированных областях, которые требуют применения методов асимптотического анализа, теории усреднения, теории пограничного слоя и т. д. Случай уравнения Стокса рассмотрен в [43, 34, 38, 39, 35]. Модельные задачи для оператора Лапласа с различными граничными условиями на границе полостей рассмотрены в работах [7, 36, 37, 15, 16, 8]. Отметим, что краевые условия третьего рода на границе полостей рассматривались в работах [33, 32, 3, 31, 4]. Надо сказать, что также изучались диссипативные эволюционные дифференциальные уравнения, интересные результаты получены для сходимости аттракторов в перфорированных областях. В работах [19, 21] рассмотрена ситуация случайных полостей, т. е. рассматривалось случайное усреднение аттракторов. Двумерное уравнение Навье – Стокса изучено в [1, 2, 14]. В этих работах доказана слабая сходимость аттракторов. Сильная сходимость доказана в [20]. Уравнения Гинзбурга – Ландау изучены в [22, 23, 18]. В этих работах рассмотрены докритический, критический и закритический случаи.

Отметим работы в областях, перфорированных вдоль многообразий (см. [4, 7, 9, 10, 12, 8, 5, 6, 17]). В этих работах применены методы теории усреднения для асимптотического анализа краевых задач в микронеоднородных областях. При этом выявлено макровлияние микронеоднородностей в области. Подробнее о работе [4]. В ней для уравнения Пуассона с гладкой правой частью в многомерной перфорированной области рассматриваются следующие типы задач: на границах множеств малого диаметра, «разбросанных» внутри области, ставится условие Неймана, а на границе самой области – однородное условие Дирихле; на границах малых множеств ставится третье краевое условие, а на границе самой области – условие Дирихле; условие Дирихле как на границе области, так и на границах малых множеств. Показана сходимость решений и собственных значений усредненных задач к решениям соответствующих предельных задач, кроме того, получены оценки на скорость сходимости решений и собственных значений при дополнительных предположениях на размеры малых множеств. Эти же типы задач рассмотрены в области, разделенной перфорированной перегородкой. Показано, что предельная задача будет иметь скачок в граничных условиях на перегородке в случае смешанной задачи и задачи Дирихле при условии, что размеры перфорации достаточно малы. Если же в задаче Дирихле диаметры малых множеств достаточно «велики», то в пределе граничное условие на перегородке вовсе исчезает. Для такой области также получены оценки на скорость сходимости решений и собственных значений усредненных задач к решениям и собственным значениям соответствующих предельных задач.

В работах [10, 11] моделировались задачи, связанные с изучением физико-химических свойств струи газа в камере сгорания и сопле жидкостного реактивного двигателя.

В настоящей работе рассматривается уравнение переменного типа Лаврентьева – Бицадзе в области, перфорированной вдоль линии смены типа уравнения. Предполагается, что перфорация находится только в «эллиптической» части области, а в «гиперболической» она отсутствует. Ещё предполагается, что правая часть уравнения в «гиперболической» части области равна нулю.

Доказательство существования и единственности решения такой задачи в полуперфорированной области можно найти в [10]. Отметим, что вопросы существования и единственности решений задач для уравнения Лаврентьева – Бицадзе поднимались ранее. В работе [42] изучалась смешанная задача для такого уравнения. Там установлена нормальная разрешимость задачи в весовых пространствах, весами при этом являются степени расстояния до угловых точек области. Отметим также, что в случае, когда область, в которой рассматривается задача, является односвязной (например, она может быть конформно отображена на полукруг), однозначная разрешимость в Соболевском пространстве W_2^1 установлена в [12].

В работе показано, что при определённом распределении включений (пор), на которых выставлено однородное условие Дирихле, решение задачи разделяется на нетривиальное в «эллиптической» части области и нулевое – в «гиперболической» части.

2. Предварительные определения и постановка задачи. Для простоты будем рассматривать двумерную область.

Рассматривается уравнение вида

$$-u_{yy}^\varepsilon - (\operatorname{sign} y) u_{xx}^\varepsilon = f(x, y) \quad (1)$$

в области D_ε , периодически перфорированной вдоль линии смены типа уравнения в полуплоскости $y > 0$, с характерным размером ε , а часть, лежащая в нижней полуплоскости $y < 0$, имеет однородную структуру. На части внешней границе области и на границе включений выставлено однородное условие Дирихле. Исследуется асимптотическое поведение решения при стремлении малого параметра ε к нулю. Полагаем, что $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ и равна нулю при $y < 0$.

Перейдём к строгому определению области и краевой задачи в этой области.

Определим сначала область, перфорированную вдоль линии смены типа уравнения. Пусть D^1 – полукруг, лежащий в полуплоскости $y > 0$, граница области ∂D^1 состоит из двух частей Γ_0 и Γ , где Γ_0 – является частью окружности единичного радиуса с центром в точке $(x = 1, y = 0)$, а Γ – отрезок $[0, 2]$ на

оси абсцисс $y = 0$. Всюду далее $\varepsilon = \frac{1}{2N+1}$ – малый параметр, N – натуральное число, $N \gg 1$. Будем также использовать следующие обозначения.

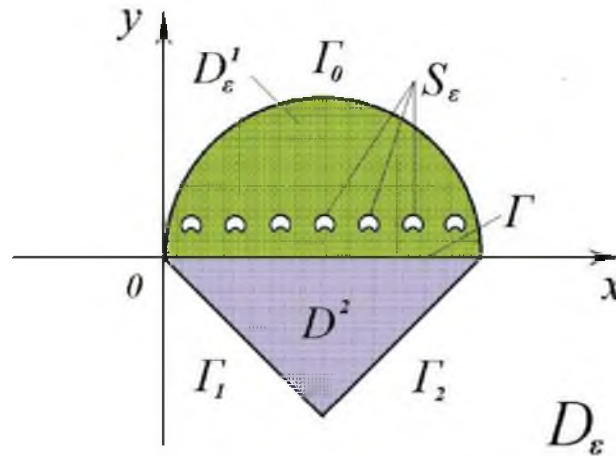


Рис. 1. Двумерная полуперфорированная область

Fig. 1. Two-dimensional partially perforated domain

Пусть B – произвольная двумерная область с гладкой границей, лежащая в круге $K = \{\xi : \xi_1^2 + (\xi_2 - \frac{1}{2})^2 < a^2\}$, $0 < a < \frac{1}{2}$. Обозначим $B_\varepsilon^j = \{x \in \Omega : \varepsilon^{-1}(x_1 - j, x_2) \in B\}$, $j \in \mathbb{Z}$, $B_\varepsilon = \bigcup_j B_\varepsilon^j$. Определим область Ω_ε как $\Omega \setminus \overline{B_\varepsilon}$. Будем также обозначать $S_\varepsilon = \partial B_\varepsilon$ – граница объединения полостей.

Следует отметить, что перфорация области подходит непосредственно к оси $\{y = 0\}$ при стремлении малого параметра ε к нулю. Поэтому ожидается влияние перфорации на эффективное поведение решения в окрестности интерфейса Γ .

Теперь остаётся добавить к «эллиптической» области D_ε^1 «гиперболическую» часть D^2 , которую мы определяем как часть полуплоскости $y < 0$, ограниченную сверху отрезком Γ , а снизу – отрезками прямых («характеристик» уравнения) $\Gamma_1 := \{(x, y) : x = -y, x \in [0, 1]\}$ и $\Gamma_2 := \{(x, y) : x = y + 2, x \in [1, 2]\}$. Итак, построена область $D_\varepsilon = D_\varepsilon^1 \cup (\text{int } \Gamma) \cup D^2$ (см. рис. 1). Рассматривается задача

$$\begin{cases} -u_{yy}^\varepsilon - (\text{sign } y)u_{xx}^\varepsilon = f(x, y) & \text{в } D_\varepsilon, \\ u^\varepsilon = 0 & \text{на } \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup S_\varepsilon, \end{cases} \quad (2)$$

где $n_\varepsilon(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon})$ – внутренняя нормаль к границе включений. Предполагается, что коэффициент q является неотрицательной достаточно гладкой функцией в D^1 , а также 1-периодической по третьему и четвёртому аргументу. Будем исследовать асимптотическое поведение решения $u^\varepsilon(x, y)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Решение краевой задачи (2) может быть разбито на две части. Сначала мы решаем уравнение в «гиперболической» части D^2 . В этой области функция $u(x, y) = F(x + y) + G(x - y)$, где $F(s)$ и $G(t)$ – произвольные достаточно гладкие функции. С учётом краевых условий на Γ_1 получаем, что $F(0) + G(2x) = 0$ и, следовательно, $G \equiv 0$, а $F(0) = 0$. Такое решение иницирует на «интерфейсе» Γ между «эллиптической» и «гиперболической» частями области D_ε условие $u_x = u_y$. Решая отдельно краевую задачу для уравнения Пуассона в области D_ε^1 вида

$$\begin{cases} \Delta u^\varepsilon = -f(x, y) & \text{в } D_\varepsilon^1, \\ u^\varepsilon = 0 & \text{на } \Gamma_0 \cup S_\varepsilon, \\ u_x^\varepsilon = u_y^\varepsilon & \text{на } \Gamma, \end{cases} \quad (3)$$

получаем условия для однозначного нахождения функции $F(s)$ (см. аналогично [42]).

Введём обозначения пространств

$$\begin{aligned} W_{\delta_1 \delta_2}^2(D_\varepsilon^1) &:= \left\{ u : \int_{D_\varepsilon^1} \left(|\nabla^2 u|^2 \rho_1^{\delta_1} \rho_2^{\delta_2} + |\nabla u|^2 \rho_1^{\delta_1-2} \rho_2^{\delta_2-2} + u^2 \rho_1^{\delta_1-4} \rho_2^{\delta_2-4} \right) dx dy < +\infty \right\}, \\ W_{\delta_1 \delta_2}^2(D_\varepsilon, \Gamma_0 \cup S_\varepsilon) &:= \left\{ u : u \in W_{\delta_1 \delta_2}^2(D_\varepsilon^1), u = 0 \text{ на } \Gamma_0 \cup S_\varepsilon, u_x = u_y \text{ на } \Gamma \right\}, \end{aligned}$$

где $\delta_j \in (0, 1/2]$, $j = 1, 2$, $\rho_1 = \rho_1(x, y)$ – расстояние до начала координат, $\rho_2 = \rho_2(x, y)$ – расстояние до точки $(2, 0)$, здесь $|\nabla^2 u|^2$ – сумма квадратов обобщённых частных производных второго порядка, а равенства $u_x = u_y$ и $\frac{\partial u}{\partial n_\varepsilon} = -\varepsilon^\alpha q u$ понимаются в смысле следов функций.

Пусть $u \in W_{\delta_1, \delta_2}^2(D_\varepsilon^1)$. Обозначим $v_1 = \rho_1^{\frac{\delta_1}{2}} \rho_2^{\frac{\delta_2}{2}} u$, $v_2 = \rho_1^{\frac{\delta_1}{2}-1} \rho_2^{\frac{\delta_2}{2}-1} u$. Ясно, что функции $v_1 \in W_2^2(D_\varepsilon^1)$, $v_2 \in H^1(D_\varepsilon^1)$. В силу классической теоремы о следе $v_1 \in W_2^1(\Gamma)$, $v_2 \in L_2(\Gamma)$, и следовательно,

$$\int_{\Gamma} |\nabla u|^2 \rho_1^{\delta_1} \rho_2^{\delta_2} dx < \infty, \quad \int_{\Gamma} u^2 \rho_1^{\delta_1-2} \rho_2^{\delta_2-2} dx < \infty. \quad (4)$$

Решение задачи (3) понимается как элемент пространства $W_{\delta_1, \delta_2}^2(D_\varepsilon^1, \Gamma_0 \cup S_\varepsilon)$, который удовлетворяет уравнению задачи (3) почти всюду, а граничные значения понимаются в смысле следов.

В работе [42] изучалась задача (3) в однородной области без перфорации с целью решения модели Лаврентьева – Бицадзе для смешанной задачи. Там установлена нормальная разрешимость задачи (3) в весовых пространствах, весами при этом являются степени расстояния до точек $(0, 0)$ и $(2, 0)$.

Принципиальным же является вопрос об однозначной разрешимости (которая в общем случае не следует из нормальной). Доказательство однозначной разрешимости в пространстве $W_{\delta_1, \delta_2}^2(D_\varepsilon^1, \Gamma_0)$ с некоторыми $\delta_1, \delta_2 \in (0, 1/2]$ для перфорированной области с условием Неймана на границе полостей проведено в [10]. Доказательство для задачи с третьим краевым условием на границе полостей совершенно аналогично доказательству из [10], которое опирается на лемму Хопфа – Олейник (см. [14]), а также на вложение $W_{\delta_1, \delta_2}^2(D_\varepsilon^1, \Gamma_0) \hookrightarrow C(\overline{D_\varepsilon^1})$ (см. [10, предложение 1]), доказательство которого опирается на результаты из [9, 13], и мы его здесь не приводим.

Умножим уравнение задачи на u^ε и проинтегрируем по частям. Запишем это равенство:

$$\int_{D_\varepsilon^1} |\nabla u^\varepsilon|^2 dx dy - \int_{\Gamma} u_x^\varepsilon u^\varepsilon dx = \int_{D_\varepsilon^1} f u^\varepsilon dx dy. \quad (5)$$

Здесь u_x^ε понимается в смысле следа функции. При этом (см. (4)) имеем

$$\int_{\Gamma} |u_x^\varepsilon u^\varepsilon| dx \leq \int_{\Gamma} |u_x^\varepsilon|^2 \rho_1^{\delta_1} \rho_2^{\delta_2} dx + \int_{\Gamma} |u^\varepsilon|^2 \rho_1^{-\delta_1} \rho_2^{-\delta_2} dx < \infty.$$

3. Априорные оценки. Для того, чтобы перейти к рассмотрению вопросов усреднения, предварительно мы должны получить априорные оценки решений задачи (3). Имеет место следующая теорема. Для того, чтобы перейти к рассмотрению вопросов усреднения, предварительно мы должны получить априорные оценки решений задачи (3). Имеет место следующая теорема.

Теорема 3.1. *Решение u^ε задачи (3) удовлетворяет неравенству*

$$\|u^\varepsilon\|_{W_2^1(D_\varepsilon^1, \Gamma_0)} \leq K \|f\|_{L_2(D^1)}, \quad (6)$$

где константа $K > 0$ не зависит от ε .

Доказательство. В равенстве (5) рассмотрим третье слагаемое в левой части. Имеем

$$\int_{\Gamma} u_x^\varepsilon u^\varepsilon dx = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \frac{\partial ((u^\varepsilon)^2)}{\partial x} dx \equiv 0.$$

Далее, используя стандартную технику интегральных оценок, учитывая неравенство типа Фридрихса

$$\int_{D_\varepsilon^1} (u^\varepsilon)^2 dx dy \leq C \int_{D_\varepsilon^1} |\nabla u^\varepsilon|^2 dx dy,$$

получаем необходимую оценку. Теорема доказана.

4. Усреднение в «эллиптической» части области и сходимость. Этот раздел посвящён изучению асимптотического поведения решений уравнения Пуассона $\Delta u^\varepsilon = -f(x, y)$ в области D_ε^1 с краевыми условиями $u^\varepsilon = 0$ на Γ_0 , $u_x^\varepsilon = u_y^\varepsilon$ на Γ и $u^\varepsilon = 0$ на S_ε . В дальнейших рассуждениях будем отождествлять функции из пространства $W_2^1(D_\varepsilon^1, \Gamma_0 \cup S_\varepsilon)$ с функциями из $W_2^1(D^1, \Gamma_0)$, равными нулю в B_ε , а функции из пространства $L_2(D_\varepsilon^1)$ с функциями из $L_2(D^1)$, равными нулю в B_ε . С другой стороны, для сужения функций из $L_2(D^1)$ на D_ε^1 будем сохранять их обозначения.

Имеет место утверждение.

Теорема 4.1. *Пусть $f \in L_2(D^1)$. Тогда для решения краевой задачи (3) имеет место сходимость*

$$\|u^\varepsilon - u^0\|_{W_2^1(D^1)} \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (7)$$

где u^0 – решение предельной (усреднённой) краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta u^0 = -f & \text{в } D^1, \\ u^0 = 0 & \text{на } \partial D^1. \end{cases} \quad (8)$$

Обозначим через $W_2^1(D^1)$ пространство $W_2^1(D^1, \partial D^1)$. Для доказательства теоремы будем использовать следующее утверждение.

Лемма 4.1. Пусть $v_\varepsilon \in W_2^1(D_\varepsilon^1, \Gamma_0 \cup S_\varepsilon)$ и $v_\varepsilon \rightarrow v^*$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ слабо в $W_2^1(D^1)$. Тогда $v^* \in W_2^1(D^1)$.

Доказательство леммы 4.1. Пусть длина проекции B на ось ξ_1 равна b . Область D_ε^1 представим следующим образом:

$$D_\varepsilon^1 = \bigcup_{i=-N}^N (\Pi_{1,\varepsilon}^{i+} \cup \Pi_{1,\varepsilon}^{i-}) \cup \bigcup_{i=-N-1}^N \Pi_{2,\varepsilon}^i \cup R_\varepsilon,$$

где $\Pi_{1,\varepsilon}^{i+}$ – область (часть вертикальной полосы) ширины $b\varepsilon$, ограниченная снизу верхней частью границы i -й области B_ε^i , а сверху частью полуокружности Γ_0 ; область $\Pi_{1,\varepsilon}^{i-}$ – полоса ширины $b\varepsilon$, ограниченная сверху нижней частью границы i -й области B_ε^i , а снизу – прямой $y = 0$; $\Pi_{2,\varepsilon}^i$, $i = -N, \dots, N-1$, – полоса ширины $(1-b)\varepsilon$, ограниченная снизу прямой $y = 0$, а сверху – куском границы Γ_0 , имеющая общие вертикальные границы с областями $\Pi_{1,\varepsilon}^{i+}$ и $\Pi_{1,\varepsilon}^{i+1+}$ самая левая область $\Pi_{2,\varepsilon}^{-N-1}$ и самая правая область $\Pi_{2,\varepsilon}^N$ – вертикальные полосы, ограниченные снизу прямой $y = 0$, а сверху – куском границы Γ_0 , имеющие общие вертикальные границы с областями $\Pi_{1,\varepsilon}^{-N+}$ и $\Pi_{1,\varepsilon}^{N+}$, соответственно, и имеющие суммарную ширину $(1-b)\varepsilon$, наконец, R_ε – это оставшиеся части области D_ε^1 (быть может пустые), внешняя граница которых принадлежит Γ_0 .

Пусть $\omega > \varepsilon$. Обозначим через $\Pi_{1,\varepsilon}^{\omega,i+}$ – область $\Pi_{1,\varepsilon}^{i+} \cap \{y < \omega\}$.

Кроме того, пусть $\Gamma_{1,\varepsilon}^{\omega,i}$ – отрезок прямой $y = \omega$, ограничивающий сверху множество $\Pi_{1,\varepsilon}^{\omega,i+}$. Аналогично определяем множества $\Gamma_{2,\varepsilon}^{\omega,i}$ и $\Pi_{2,\varepsilon}^{\omega,i}$.

Не ограничивая общности, будем считать, что функции v_ε – вещественнозначные. Обозначим через $C_0^\infty(\overline{D_\varepsilon^1}, S_\varepsilon)$ функции из $C^\infty(\overline{D^1})$, которые обращаются в нуль в окрестности B_ε . Предположим в начале, что $v_\varepsilon \in C_0^\infty(\overline{D_\varepsilon^1}, S_\varepsilon)$. Пусть $(x, \omega) \in \Pi_{1,\varepsilon}^{i+}$, а точка $(x, \tilde{y})$ лежит на нижнем основании $\Pi_{1,\varepsilon}^{i+}$. Поскольку $v_\varepsilon(x, \tilde{y}) = 0$, то по формуле Ньютона – Лейбница имеем:

$$v_\varepsilon(x, \omega) = \int_{\tilde{y}}^{\omega} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y} dy.$$

Возведем обе части данного равенства в квадрат и применим неравенство Коши – Буняковского:

$$v_\varepsilon^2(x, \omega) = \left(\int_{\tilde{y}}^{\omega} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y} dy \right)^2 \leq \omega \int_{\tilde{y}}^{\omega} \left(\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y} \right)^2 dy \leq \omega \int_{\tilde{y}}^{\omega} |\nabla v_\varepsilon|^2 dy. \quad (9)$$

Проинтегрируем обе части этого неравенства по переменной x по $\Gamma_{1,\varepsilon}^{\omega,i}$, считая, что функция v_ε продолжена нулём в $B_\varepsilon^i \cup \Pi_{1,\varepsilon}^{i-}$. Получаем:

$$\int_{\Gamma_{1,\varepsilon}^{\omega,i}} v_\varepsilon^2(x, \omega) dx \leq \omega \int_{\Pi_{1,\varepsilon}^{\omega,i+}} |\nabla v_\varepsilon|^2 dx. \quad (10)$$

Рассмотрим теперь полосу $\Pi_{2,\varepsilon}^i$, $i = -N, \dots, N$, и пусть область B_ε^i касается её слева. Проведём касательные из левого и правого концов отрезка $\Gamma_{2,\varepsilon}^{\omega,i}$ к области B_ε^i . Легко видеть, что угол наклона касательных α лежит в пределах $(\alpha_0, \frac{\pi}{2})$, где $\alpha_0 > 0$ не зависит от ε и ω (напомним: мы предполагали, что $\omega > \varepsilon$). Это следует из того, что диаметр и расстояние между полостями имеют один и тот же порядок. Соединим все точки отрезка $\Gamma_{2,\varepsilon}^{\omega,i}$ с границей B_ε^i так, чтобы все эти прямые пересекались в точке пересечения касательных. У нас получился пучок прямых с направляющими $l(x)$, углы наклона которых лежат в промежутке $(\alpha_0, \frac{\pi}{2})$. Пусть $(x, \omega) \in \Gamma_{2,\varepsilon}^{\omega,i}$, а $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \partial B_\varepsilon^i \cap l(x, \omega)$. Поскольку $v_\varepsilon(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$, то снова по формуле Ньютона – Лейбница имеем:

$$v_\varepsilon(x, \omega) = \int_{(\tilde{x}, \tilde{y})}^{(x, \omega)} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial l} dl.$$

Аналогично (9), возводя обе части данного равенства в квадрат и применяя неравенство Коши – Буняковского, получаем неравенство:

$$v_\varepsilon^2(x, \omega) \leq \frac{\omega}{\sin \alpha_0} \int_{(\bar{x}, \bar{y})}^{(x, \omega)} \left(\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial l} \right)^2 dl \leq \frac{\omega}{\sin \alpha_0} \int_{(\bar{x}, \bar{y})}^{(x, \omega)} |\nabla v_\varepsilon|^2 dl.$$

Интегрируя обе части этого неравенства по x по $\Gamma_{2,\varepsilon}^{\omega,i}$ и заменяя правую часть на больший интеграл, получаем

$$\int_{\Gamma_{2,\varepsilon}^{\omega,i}} v_\varepsilon^2(x, \omega) dx \leq \frac{\omega}{\sin \alpha_0} \int_{\Pi_{2,\varepsilon}^{\omega,i} \cup \Pi_{1,\varepsilon}^{\omega,i+} \cup \Pi_{1,\varepsilon}^{\omega,i-}} |\nabla v_\varepsilon|^2 dx, \quad i = -N, \dots, N. \quad (11)$$

Осталось оценить интеграл по $\Gamma_{2,\varepsilon}^{\omega,-N-1}$. Используем ту же конструкцию, что и для остальных $\Gamma_{2,\varepsilon}^{\omega,i}$, $i = -N, \dots, N$, только рассмотрим область B_ε^{-N} , которая касается полосы $\Pi_{2,\varepsilon}^{-N-1}$ справа. Проводя аналогичные вычисления, получаем

$$\int_{\Gamma_{2,\varepsilon}^{\omega,-N-1}} v_\varepsilon^2(x, \omega) dx \leq C\omega \int_{\Pi_{2,\varepsilon}^{\omega,-N-1} \cup \Pi_{1,\varepsilon}^{\omega,-N+} \cup \Pi_{1,\varepsilon}^{\omega,-N-}} |\nabla v_\varepsilon|^2 dx. \quad (12)$$

Пусть $\Gamma^\omega = \overline{D^1} \cap (-\infty, \infty) \times \{\omega\}$ – хорда, параллельная отрезку Γ , в области D^1 на расстоянии ω от диаметра, т. е. $\Gamma^\omega = \bigcup_i \overline{\Gamma_{1,\varepsilon}^{\omega,i}} \cup \overline{\Gamma_{2,\varepsilon}^{\omega,i}}$. Просуммировав неравенства (10), (11) по i и прибавив (12), получаем оценку:

$$\int_{\Gamma^\omega} v_\varepsilon^2(x) dx \leq C_1 \omega \int_{D^1} |\nabla v_\varepsilon|^2 dx. \quad (13)$$

В силу плотности вложения $C_0^\infty(\overline{D_\varepsilon^1}, S_\varepsilon)$ в $W_2^1(D_\varepsilon^1, S_\varepsilon)$ следует, что оценка (13) справедлива и для любого $v_\varepsilon \in W_2^1(D_\varepsilon^1, S_\varepsilon)$. Тогда из ограниченности v_ε в $W_2^1(D^1)$ вытекает неравенство

$$\int_{\Gamma^\omega} v_\varepsilon^2(x) dx \leq \omega M.$$

Поскольку $W_2^1(D^1)$ компактно вкладывается в $L_2(\Gamma^\omega)$, а v_ε слабо сходится в $W_2^1(D^1)$, то переходя в этом неравенстве к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем:

$$\int_{\Gamma^\omega} (v^*)^2 dx \leq \omega M. \quad (14)$$

И, наконец, поскольку ω – произвольно малое положительное число, то из (14) следует, что $v^* = 0$ на границе Γ . Лемма доказана.

Доказательство теоремы 4.1. Пусть $\{\varepsilon_k\}$ – произвольная последовательность, сходящаяся к нулю при $k \rightarrow +\infty$. По теореме 3.1 из равномерной ограниченности семейства $\{u^\varepsilon\}$ следует, что существует подпоследовательность индексов $\{k'\}$, такая, что на этой подпоследовательности при $k' \rightarrow +\infty$ имеет место сходимость

$$u^{\varepsilon_{k'}} \rightarrow u^* \quad \text{сильно в } L_2(D^1) \text{ и слабо в } W_2^1(D^1). \quad (15)$$

При этом $u^* \in \overset{\circ}{W}_2^1(D^1)$ в силу леммы 4.1.

Умножая уравнение задачи (3) на $v \in C_0^\infty(D^1)$ и интегрируя по частям по области D^1 , получаем интегральное тождество

$$\int_{D^1} (\nabla u^{\varepsilon_{k'}}, \nabla v) dx dy = \int_{D^1} f v dx dy.$$

Переходя в этом равенстве к пределу, в силу (14) получаем новое интегральное тождество

$$\int_{D^1} (\nabla u^*, \nabla v) dx dy = \int_{D^1} f v dx dy,$$

которое совпадает с интегральным тождеством предельной задачи в D^1 . Из плотности вложения $C_0^\infty(D^1)$ в $W_2^1(D^1)$ и единственности решения предельной задачи (13) получаем, что $u^* = u^0$, а из произвола в выборе исходной последовательности $\{\varepsilon_k\}$ и сходимости (14) вытекает следующая сходимость:

$$u^\varepsilon \rightarrow u^0 \text{ сильно в } L_2(D^1) \text{ и слабо в } W_2^1(D^1) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (16)$$

Осталось усилить сходимость (15) до сходимости (12). Умножим уравнение предельной задачи на u^0 и проинтегрируем по частям по области D^1 . Вычитая это равенство из равенства (5) и учитывая (15), а также используя неравенство Коши – Буняковского и рассуждения в конце доказательства леммы 4.1, получаем

$$\|\nabla u^\varepsilon\|_{L_2(D^1)}^2 - \|\nabla u^0\|_{L_2(D^1)}^2 = \int_{D^1} f(u^\varepsilon - u^0) dx dy + \int_{\Gamma} u_x^\varepsilon u^\varepsilon dx \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (17)$$

Из (15) и (16) следует (12). Действительно, в силу (15) и (16)

$$\|\nabla(u^\varepsilon - u^0)\|_{L_2(D^1)}^2 = \|\nabla u^\varepsilon\|_{L_2(D^1)}^2 + \|\nabla u^0\|_{L_2(D^1)}^2 - 2 \int_{\Omega} (\nabla u^\varepsilon, \nabla u^0) dx \rightarrow 0$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. Из этой сходимости и сходимости (15) вытекает сходимость (12). Теорема доказана.

5. Предельная задача во всей области.

Чтобы завершить построение предельной задачи во всей области, надо вспомнить, что в «гиперболической» области решение имеет вид $F(x + y)$, которое, в свою очередь, иницирует на «интерфейсе» Γ условие $u_x = u_y$. После усреднения изменилась задача в «эллиптической» части области, а значит, и условие на «интерфейсе». Откуда следует, что на отрезке Γ имеем $F(x) = 0$. Таким образом, предельная задача во всей области принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \Delta u^0 = -f & \text{в } D^1, \\ u^0 = 0 & \text{на } \partial D^1, \\ u^0 \equiv 0 & \text{в } D^2. \end{cases} \quad (18)$$

Список литературы

1. Бекмаганбетов К.А., Толеубай А.М., Чечкин Г.А. Об аттракторах системы уравнений Навье–Стокса в двумерной пористой среде. *Проблемы математического анализа*. 2022;115:15–28.
2. Бекмаганбетов К.А., Толеубай А.М., Чечкин Г.А. Об асимптотике аттракторов системы Навье–Стокса в анизотропной среде с мелкими периодическими препятствиями. *Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления*. 2023;512:42–46.
3. Беляев А.Г., Пятницкий А.Л., Чечкин Г.А. Асимптотическое поведение решения краевой задачи в перфорированной области с осциллирующей границей. *Сибирский математический журнал*. 1998;39(4):621–644.
4. Беляев А.Г., Пятницкий А.Л., Чечкин Г.А. Усреднение в перфорированной области с осциллирующим третьим краевым условием. *Математический сборник*. 2001;192(7):3–20.
5. Гадыльшин Р.Р., Королева Ю.О., Чечкин Г.А. О сходимости решений и собственных элементов краевой задачи в области, перфорированной вдоль границы. *Дифференциальные уравнения*. 2010;46(5):665–677.
6. Гадыльшин Р.Р., Королева Ю.О., Чечкин Г.А. Об асимптотике простого собственного значения краевой задачи в области, перфорированной вдоль границы. *Дифференциальные уравнения*. 2011;47(6):819–828.
7. Егер В., Олейник О.А., Шамаев А.С. О задаче усреднения для уравнения Лапласа в частично перфорированной области. *Доклады Российской академии наук*. 1993;333(4):424–427.
8. Егер В., Олейник О.А., Шамаев А.С. Об асимптотике решений краевой задачи для уравнения Лапласа в частично перфорированной области с краевыми условиями третьего рода на границах полостей. *Труды Московского математического общества*. 1997;58:187–223.
9. Кондратьев В.А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими и угловыми точками. *Труды Московского математического общества*. 1967;16:209–292.
10. Кондратьев В.А., Чечкин Г.А. Усреднение уравнения Лаврентьева–Бицадзе в полуперфорированной области. *Дифференциальные уравнения*. 2002;38(10):1390–1396.
11. Кондратьев В.А., Чечкин Г.А. Об асимптотике решений уравнения Лаврентьева–Бицадзе в полуперфорированной области. *Дифференциальные уравнения*. 2003;39(5):645–655.
12. Моисеев Е.И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М.: Изд-во Моск. ун-в.; 1988. 149 с.
13. Назаров С.А., Пламеневский Б.А. Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. М.: Наука; 1991. 335 с.

14. Олейник О.А. Лекции об уравнениях с частными производными: учебник. М.: Изд-во Моск. ун-в.; 2024. 275 с.
15. Олейник О.А., Шамаев А.С. Об усреднении решений краевой задачи для уравнения Лапласа в частично перфорированной области с условиями Дирихле на границе полостей. *Доклады Российской академии наук*. 1994;337(2):168–171.
16. Олейник О.А., Шапошникова Т.А. О задаче усреднения в частично перфорированной области с граничным условием смешанного типа на границе полостей, содержащим малый параметр. *Дифференциальные уравнения*. 1995;31(7):1150–1160.
17. Akimova E.A., Chechkin G.A. Random Homogenization of Lavrentiev–Bitsadze equation in Partially Perforated Domain. *Russian Journal of Mathematical Physics*. 2025;32(3):417–425.
18. Amirat Y., Bodart O., Chechkin G.A., Piatnitski A.L. Asymptotics of a spectral-sieve problem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2016;435(2):1652–1671.
19. Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V. "Strange term" in homogenization of attractors of reaction–diffusion equation in perforated domain. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2020;140:110208.
20. Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V. Application of Fatou's lemma for strong homogenization of attractors to reaction–diffusion systems with rapidly oscillating coefficients in orthotropic media with periodic obstacles. *Mathematics*. 2023;11(6):1448.
21. Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V. Homogenization of attractors to reaction–diffusion system in a medium with random obstacles. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*. 2024;44(11):3474–3490.
22. Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V., Tolemis A.A. Homogenization of attractors to Ginzburg–Landau equations in media with locally periodic obstacles: critical case. *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series*. 2023;3:11–27.
23. Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V., Tolemis A.A. Attractors of Ginzburg–Landau equations with oscillating terms in porous media. Homogenization procedure. *Applicable Analysis*. 2024;103(1):29–44.
24. Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V., Tolemis A.A. Homogenization of attractors to Ginzburg–Landau equations in media with locally periodic obstacles: sub- and supercritical cases. *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series*. 2024;2:40–56.
25. Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Toleubay A.M. Attractors of 2D Navier–Stokes system of equations in a locally periodic porous medium. *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series*. 2022;3:35–50.
26. Chechkin G.A. The Meyers Estimates for Domains Perforated Along the Boundary. *Mathematics*. 2021;9(23):3015.
27. Chechkin G.A., D'Apice C., De Maio U., Gadyl'shin R.R. On Singularly Perturbed Steklov Problem in Domain Perforated Along the Boundary. *Comptes Rendus Mécanique*. 2016;344(1):12–18.
28. Chechkin G.A., Friedman A., Piatnitski A.L. The Boundary Value Problem in Domains with Very Rapidly Oscillating Boundary. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1999;231(1):213–234.
29. Chechkin G.A., Koroleva Y.O., Persson L.E., Wall P. On Spectrum of the Laplacian in a Circle Perforated Along the Boundary: Application to a Friedrichs–Type Inequality. *International Journal of Differential Equations*. 2011;2011:619623.
30. Chechkin G.A., Koroleva Y.O., Persson L.E., Wall P. A New Weighted Friedrichs–Type Inequality for a Perforated Domain with a Sharp Constant. *Eurasian Mathematical Journal*. 2011;2(1):81–103.
31. Chechkin G.A., Piatnitski A.L. Homogenization of Boundary-Value Problem in a Locally Periodic Perforated Domain. *Applicable Analysis*. 1999;71(1-4):215–235.
32. Cioranescu D., Donato P. On a Robin Problem in Perforated Domains. In: *Homogenization and Applications to Material Sciences*. Tokyo: Gakkotosho; 1997. p. 123–136.
33. Cioranescu D., Saint Jean Paulin J. Truss Structures: Fourier Conditions and Eigenvalue Problems. In: *Boundary Variation*. Berlin–New York: Springer; 1992. p. 125–141.
34. Ene H.I., Sanchez-Palencia E. Equations et phénomènes de surface pour l'écoulement dans un modèle de milieu poreux. *Journal de Mécanique*. 1975;14:73–108.
35. Jäger W., Mikelić A. On the Flow Conditions at the Boundary between a Porous Medium and an Impermeable Solid. *Progress in partial differential equations*. London: Longman Scientific & Technical; 1994. p. 145–161.
36. Jäger W., Mikelić A. On the Boundary Conditions at the Contact Interface between a Porous Medium and a Free Fluid. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Classe di Scienze. Serie IV* 1996;23(3):403–465.
37. Jäger W., Mikelić A. Homogenization of the Laplace Equation in a Partially Perforated Domain. *Homogenization: In Memory of Serguei Kozlov*. River Edge: World Scientific Publishing; 1999. p. 259–284.
38. Larson R.E., Higdon J.J.L. Microscopic Flow Near the Surface of Two-Dimensional Porous Media. Part I — Axial Flow. *Journal of Fluid Mechanics*. 1986;166:449–472.
39. Larson R.E., Higdon J.J.L. Microscopic Flow near the surface of Two-Dimensional Porous Media. Part II — Traverse Flow. *Journal of Fluid Mechanics*. 1986;178:119–136.
40. Lions J.L., Magenes E. *Problèmes aux limites non homogènes et applications*. Vol. I. Paris: Dunod; 1968. 372 p.

41. Lobo M., Oleinik O.A., Pérez M.E., Shaposhnikova T.A. On homogenization of solutions of boundary value problems in domains perforated along manifolds. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Classe di Scienze. Serie IV.* 1997;25(3–4):611–629.
42. Osher S. Boundary Value Problems for Equations of Mixed Type I. The Lavrent'ev–Bitsadze Model. *Communications in Partial Differential Equations.* 1977;2(5):499–547.
43. Saffman P.G. On the Boundary Condition at the Surface of a Porous Medium. *Studies in Applied Mathematics.* 1971;1:93–101.

References

1. Bekmaganbetov KA., Toleubay AM., Chechkin GA. Attractors of the Navier–Stokes equations in a two-dimensional porous medium. *Journal of Mathematical Sciences.* 2022;115:15–28. (In Russ.)
2. Bekmaganbetov KA., Toleubay AM., Chechkin GA. On asymptotics of attractors of the Navier–Stokes system in anisotropic medium with small periodic obstacles. *Doklady Mathematics.* 2023;512:42–46. (In Russ.)
3. Belyaev AG., Piatnitski AL., Chechkin GA. Asymptotic behavior of a solution to a boundary value problem in a perforated domain with an oscillating boundary. *Siberian Mathematical Journal.* 1998;39(4):621–644. (In Russ.)
4. Belyaev AG., Piatnitski AL., Chechkin GA. Homogenization in a perforated domain with an oscillating third boundary condition. *Sbornik: Mathematics.* 2001;192(7):3–20. (In Russ.)
5. Gadyl'shin RR., Koroleva YuO., Chechkin GA. On the convergence of solutions and eigensubspaces of a boundary value problem in a domain perforated along the boundary. *Differential Equations.* 2010;46(5):665–677. (In Russ.)
6. Gadyl'shin RR., Koroleva YuO., Chechkin GA. On the asymptotics of a simple eigenvalue of a boundary value problem in a domain perforated along the boundary. *Differential Equations.* 2011;47(6):819–828. (In Russ.)
7. Jäger W., Oleinik OA., Shamaev AS. On the homogenization problem for the Laplace equation in a partially perforated domain. *Russian Academy of Sciences. Doklady. Mathematics.* 1993;333(4):424–427. (In Russ.)
8. Jäger W., Oleinik OA., Shamaev AS. Asymptotics of solutions of the boundary value problem for the Laplace equation in a partially perforated domain with third-kind boundary conditions on the boundaries of cavities. *Transactions of the Moscow Mathematical Society.* 1997;58:187–223. (In Russ.)
9. Kondrat'ev VA. Boundary value problems for elliptic equations in domains with conic and angular points. *Transactions of the Moscow Mathematical Society.* 1967;16:209–292. (In Russ.)
10. Kondrat'ev VA., Chechkin GA. Homogenization of the Lavrent'ev–Bitsadze equation in a partially perforated domain. *Differential Equations.* 2002;38(10):1390–1396. (In Russ.)
11. Kondrat'ev VA., Chechkin GA. On the asymptotics of solutions of the Lavrent'ev–Bitsadze equation in a partially perforated domain. *Differential Equations.* 2003;39(5):645–655. (In Russ.)
12. Moiseev EI. Equations of mixed type with a spectral parameter. Moscow: Moscow State University Publishing; 1988. 149 p. (In Russ.)
13. Nazarov SA., Plamenevsky BA. Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries. Moscow: Nauka; 1991. 335 p. (In Russ.)
14. Oleinik OA. Lectures on partial differential equations: a textbook. Moscow: Moscow State University Publishing; 2024. 275 p. (In Russ.)
15. Oleinik OA., Shamaev AS. On the homogenization of solutions of a boundary value problem for the Laplace equation in a partially perforated domain with the Dirichlet condition on the boundary of cavities. *Russian Academy of Sciences. Doklady. Mathematics.* 1994;337(2):168–171. (In Russ.)
16. Oleinik OA., Shaposhnikova TA. On the homogenization problem in a partially perforated domain with mixed boundary conditions on the boundary of cavities. *Differential Equations.* 1995;31(7):1150–1160. (In Russ.)
17. Akimova EA., Chechkin GA. Random Homogenization of Lavrentiev–Bitsadze equation in Partially Perforated Domain. *Russian Journal of Mathematical Physics.* 2025;32(3):417–425.
18. Amirat Y., Bodart O., Chechkin GA., Piatnitski AL. Asymptotics of a spectral-sieve problem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* 2016;435(2):1652–1671.
19. Bekmaganbetov KA., Chechkin GA., Chepyzhov VV. "Strange term" in homogenization of attractors of reaction–diffusion equation in perforated domain. *Chaos, Solitons & Fractals.* 2020;140:110208.
20. Bekmaganbetov KA., Chechkin GA., Chepyzhov VV. Application of Fatou's lemma for strong homogenization of attractors to reaction–diffusion systems with rapidly oscillating coefficients in orthotropic media with periodic obstacles. *Mathematics.* 2023;11(6):1448.
21. Bekmaganbetov KA., Chechkin GA., Chepyzhov VV. Homogenization of attractors to reaction–diffusion system in a medium with random obstacles. *Discrete and Continuous Dynamical Systems.* 2024;44(11):3474–3490.
22. Bekmaganbetov KA., Chechkin GA., Chepyzhov VV., Tolemis AA. Homogenization of attractors to Ginzburg–Landau equations in media with locally periodic obstacles: critical case. *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series.* 2023;3:11–27.

23. Bekmaganbetov KA., Chechkin GA., Chepyzhov VV., Tolemis AA. Attractors of Ginzburg–Landau equations with oscillating terms in porous media. Homogenization procedure. *Applicable Analysis*. 2024;103(1):29–44.
24. Bekmaganbetov KA., Chechkin GA., Chepyzhov VV., Tolemis AA. Homogenization of attractors to Ginzburg–Landau equations in media with locally periodic obstacles: sub- and supercritical cases. *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series*. 2024;2:40–56.
25. Bekmaganbetov KA., Chechkin GA., Toleubay AM. Attractors of 2D Navier–Stokes system of equations in a locally periodic porous medium. *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series*. 2022;3:35–50.
26. Chechkin GA. The Meyers Estimates for Domains Perforated Along the Boundary. *Mathematics*. 2021;9(23):3015.
27. Chechkin GA., D’Apice C., De Maio U., Gadyl’shin RR. On Singularly Perturbed Steklov Problem in Domain Perforated Along the Boundary. *Comptes Rendus Mécanique*. 2016;344(1):12–18.
28. Chechkin GA., Friedman A., Piatnitski AL. The Boundary Value Problem in Domains with Very Rapidly Oscillating Boundary. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1999;231(1):213–234.
29. Chechkin GA., Koroleva YO., Persson LE., Wall P. On Spectrum of the Laplacian in a Circle Perforated Along the Boundary: Application to a Friedrichs–Type Inequality. *International Journal of Differential Equations*. 2011;2011:619623.
30. Chechkin GA., Koroleva YO., Persson LE., Wall P. A New Weighted Friedrichs–Type Inequality for a Perforated Domain with a Sharp Constant. *Eurasian Mathematical Journal*. 2011;2(1):81–103.
31. Chechkin GA., Piatnitski AL. Homogenization of Boundary-Value Problem in a Locally Periodic Perforated Domain. *Applicable Analysis*. 1999;71(1-4):215–235.
32. Cioranescu D., Donato P. On a Robin Problem in Perforated Domains. In: *Homogenization and Applications to Material Sciences*. Tokyo: Gakkōtoshō; 1997. p. 123–136.
33. Cioranescu D., Saint Jean Paulin J. Truss Structures: Fourier Conditions and Eigenvalue Problems. In: *Boundary Variation*. Berlin–New York: Springer; 1992. p. 125–141.
34. Ene HI., Sanchez-Palencia E. Equations et phénomènes de surface pour l’écoulement dans un modèle de milieu poreux. *Journal de Mécanique*. 1975;14:73–108.
35. Jäger W., Mikelić A. On the Flow Conditions at the Boundary between a Porous Medium and an Impermeable Solid. *Progress in partial differential equations*. London: Longman Scientific & Technical; 1994. p. 145–161.
36. Jäger W., Mikelić A. On the Boundary Conditions at the Contact Interface between a Porous Medium and a Free Fluid. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Classe di Scienze. Serie IV* 1996;23(3):403–465.
37. Jäger W., Mikelić A. Homogenization of the Laplace Equation in a Partially Perforated Domain. *Homogenization: In Memory of Serguei Kozlov*. River Edge: World Scientific Publishing; 1999. p. 259–284.
38. Larson RE., Higdon JLL. Microscopic Flow Near the Surface of Two-Dimensional Porous Media. Part I — Axial Flow. *Journal of Fluid Mechanics*. 1986;166:449–472.
39. Larson RE., Higdon JLL. Microscopic Flow near the surface of Two-Dimensional Porous Media. Part II — Traverse Flow. *Journal of Fluid Mechanics*. 1986;178:119–136.
40. Lions JL., Magenes E. *Problèmes aux limites non homogènes et applications*. Vol. I. Paris: Dunod; 1968. 372 p.
41. Lobo M., Oleinik OA., Pérez ME., Shaposhnikova TA. On homogenization of solutions of boundary value problems in domains perforated along manifolds. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Classe di Scienze. Serie IV*. 1997;25(3–4):611–629.
42. Osher S. Boundary Value Problems for Equations of Mixed Type I. The Lavrent’ev–Bitsadze Model. *Communications in Partial Differential Equations*. 1977;2(5):499–547.
43. Saffman PG. On the Boundary Condition at the Surface of a Porous Medium. *Studies in Applied Mathematics*. 1971;1:93–101.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 19.01.2026

Received January 19, 2026

Поступила после рецензирования 05.03.2026

Revised March 05, 2026

Принята к публикации 14.03.2026

Accepted March 14, 2026

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Кервенов Кабылгазы Ержепович – доцент, Карагандинский национальный исследовательский университет имени академика Е. А. Букетова, г. Караганда, Казахстан

Мамунова Томирис Руслановна – студентка, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Kabylgazy E. Kervenev – Associate Professor, Buketov Karaganda National Research University, Karaganda, Kazakhstan

Tomiris R. Mamunova – Student, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

[К содержанию](#)