L. N. Kurtova, N. N. Mot'kina, Consideration of a singular series of the asymptotic formula of Kloosterman's problem, *Chebyshevskii Sb.*, 2023, Volume 24, Issue 2, 228–247

DOI: 10.22405/2226-8383-2023-24-2-228-247

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 24. Выпуск 2.

УДК 511.32 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-228-247

Рассмотрение особого ряда асимптотической формулы задачи Клоостермана

Л. Н. Куртова, Н. Н. Мотькина

Куртова Лилиана Николаевна —кандидат физико-математических наук, Белгородский государственный национальный исследовательский университет (г. Белгород).
e-mail: Kurtova@bsu.edu.ru

Мотькина Наталья Николаевна —кандидат физико-математических наук, Белгородский государственный национальный исследовательский университет (г. Белгород).
e-mail: Motkina@bsu.edu.ru

Аннотация

В данной работе рассматривается задача о представлении натурального числа n диагональной квадратичной формой с четырьмя переменными $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$, где a, b, c, d – заданные положительные целые числа. Ставится вопрос — определить, при каких условиях на коэффициенты a, b, c, d не существует такого представления для заданного n. Такие условия, полученные на основании теории сравнений или без доказательства, приводятся в работе Клоостермана (1926).

Клоостерман также получил асимптотическую формулу для числа решений уравнения $n = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$. Главный член формулы является рядом $\sum\limits_{q=1}^{+\infty} \Phi(q)$ от мультипликативной функции $\Phi(q)$, содержащей одномерные суммы Гаусса с коэффициентами a, b, c, d. Наша работа связана с изучением представления этого особого ряда в виде произведения по простым числам $\prod\limits_{p|q}(1 + \Phi(p) + \Phi(p^2) + \cdots)$.

Ранее авторы рассмотрели случай, когда $p \neq 2$. С использованием точных формул для одномерных сумм Гаусса, суммы Рамануджана и обобщенной суммы Рамануджана от степени простого числа доказаны условия на коэффициенты a, b, c, d, n, при которых уравнение $n = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ не имеет решений.

В этой работе рассматривается случай, когда $p = 2$ и n – нечетное. С учетом формул для одномерных сумм Гаусса от степени двойки возникают некоторые суммы, родственные сумме Клоостермана, которые ранее не изучались. Для таких сумм от степени двойки нами были получены точные значения. Это позволило привести полное доказательство условий для коэффициентов a, b, c, d, хотя бы два из которых четные. При этих условиях нечетное натуральное число нельзя представить диагональной квадратичной формой с четырьмя переменными. Отметим, что некоторые из этих условий являются новыми и не упоминаются в работе Клоостермана.

Ключевые слова: асимптотическая формула, сумма Гаусса, сумма Клоостермана.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:

Л. Н. Куртова, Н. Н. Мотькина. Рассмотрение особого ряда асимптотической формулы задачи Клоостермана // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 2, с. 228–247.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 24. No. 2.

UDC 511.32 DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-228-247

Consideration of a singular series of the asymptotic formula of Kloosterman's problem

L. N. Kurtova, N. N. Mot'kina

Kurtova Liliana Nikolaevna —candidate of physical and mathematical sciences, Belgorod State National Research University (Belgorod).

e-mail: Kurtova@bsu.edu.ru

Mot'kina Natalia Nikolaevna —candidate of physical and mathematical sciences, Belgorod State National Research University (Belgorod).

e-mail: Motkina@bsu.edu.ru

Abstract

The representation problem of a natural number n in the diagonal quadratic form with four variables $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$, where a, b, c, d are given positive integers, is considered in this paper. The question is posed to define under what conditions on the coefficients a, b, c, d such representation does not exist for a given n. These conditions, which obtained based on the theory of congruences or without proof, are given in the Kloosterman's work (1926).

Kloosterman also has obtained an asymptotic formula for the number of solutions to the equation $n = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$. The main term of this formula is a series $\sum\limits_{q=1}^{+\infty} \Phi(q)$ of a multiplicative function $\Phi(q)$ containing the one-dimensional Gaussian sums with coefficients a, b, c, d. Our work is related to the study of the representation of this special series as a product over primes $\prod\limits_{p|q}(1 + \Phi(p) + \Phi(p^2) + \cdots)$.

Previously, the authors have been considered the case when $p \neq 2$. Conditions for the coefficients a, b, c, d, n under which the equation $n = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ has no solutions have been proved with using exact formulas for the one-dimensional Gaussian sums, Ramanujan sum and the generalized Ramanujan sum from the power of a prime.

The case for $p = 2$ and n odd is considering in this paper. Taking into account formulas for the one-dimensional Gaussian sums from the power of two, the some not previously studied sums that are close to the Kloosterman sum, are appeared. For such sums from the power of two, we obtained the exact values. This allowed us to give a complete proof of the conditions on the coefficients a, b, c, d, at least two of which are even. Under these conditions an odd natural number cannot be represented by a diagonal quadratic form with four variables. Note that some of these conditions are new and are not mentioned in Kloosterman's work.

Keywords: asymptotic formula, Gaussian sum, Kloosterman sum.

Bibliography: 18 titles.

For citation:

L. N. Kurtova, N. N. Mot'kina, 2023, "Consideration of a singular series of the asymptotic formula of Kloosterman's problem", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 2, pp. 228–247.

1. Введение

В 1770 году Ж. Лагранж [1] доказал, что каждое натуральное число есть сумма не более четырех квадратов натуральных чисел

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 = n$$

(*задача Лагранжа*).

До этого времени П. Ферма, Л. Эйлер и другие математики изучали квадратичные формы частного вида. Именно Ж. Лагранж показал связь между представимостью чисел квадратичной формой и существованием решений соответствующего сравнения второй степени. К. Ф. Гаусс, позднее Л. Дирихле [2], продолжили исследования Л. Эйлера, создав теорию представления натуральных чисел квадратичными формами [3]. К. Ф. Гаусс ввел в рассмотрение тригонометрические суммы

$$S(q,a,b) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant q} e^{2\pi i (aj^2+bj)/q}$$

(*суммы Гаусса*), показал их полезность в решении задач теории чисел [4].

Пусть a, b, c, d, n — положительные целые числа и $N(a,b,c,d;n)$ определяет число решений уравнения

$$n = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2,$$

где $(x,y,z,t) \in \mathbb{Z}^4$.

В 1828 году Якоби, используя эллиптические функции, доказал, что

$$N(1,1,1,1;n) = 8 \sum_{\substack{d|n \\ d \not\equiv 0 \pmod 4}} d.$$

В 1847 году Эйзенштейн [5] получил формулы для $N(1,1,1,3;n)$ и $N(1,1,1,5;n)$. С 1859 по 1866 годы Лиувилль в серии работ указал около 90 предположений о точных значениях для $N(a,b,c,d;n)$. Большинство гипотез Лиувилля были доказаны (см. [6]–[10], обзорная статья Купера [11]).

В 1926 году Х. Клоостерман [12] получил асимптотическую формулу для $N(a,b,c,d;n)$ (*задача Клоостермана*) и привел примеры отдельных случаев, когда число представлений целого положительного числа диагональной квадратичной формой с четырьмя целыми переменными равно нулю.

Случаи, когда n или некоторые из коэффициентов a,b,c,d делятся на $p=2$, рассмотрены Клоостерманом более подробно, чем для нечетного простого p.

Применение точных формул для сумм Гаусса ([13]–[16]) позволило нам дополнить случаи, при которых уравнение

$$n = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2,$$

где a, b, c, d, n — положительные целые числа, не имеет решения. В [17] изучались представления главного члена асимптотической формулы для $N(a,b,c,d;n)$ в виде произведений по простым числам $p \neq 2$, и приведены точные доказательства случаев, когда нечетное n невозможно представить в виде линейной комбинации с четырьмя квадратами.

В данной работе рассматривается случай, когда $p=2$ и n – нечетное. Получены следующие условия на коэффициенты a,b,c,d [18].

Теорема 1. *Пусть n и 2 взаимно просты и один коэффициент квадратичной формы $ax^2+by^2+cz^2+dt^2$ делится на 2:*

$$a = 2^\alpha a_1, (a_1,2)=1, (b,2)=1, (c,2)=1, (d,2)=1.$$

Уравнение $n = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ *не имеет решения, если*

$$3 \le \alpha, \quad b \equiv c \equiv d \not\equiv n \pmod 4, \quad \left(\frac{2}{bcdn}\right) = 1.$$

Теорема 2. *Пусть* n *и* 2 *взаимно просты и два коэффициента квадратичной формы* $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ *делятся на* 2*:*

$$a = 2^\alpha a_1, (a_1, 2) = 1, b = 2^\beta b_1, (b_1, 2) = 1, (c, 2) = 1, (d, 2) = 1.$$

Уравнение $n = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ *не имеет решения, если* $2 \le \alpha \le \beta$, $c \equiv d \not\equiv n \pmod 4$.

У Клоостермана ([12], с. 453) есть этот случай, но нет условий с коэффициентами.

Теорема 3. *Пусть* n *и* 2 *взаимно просты и и три коэффициента квадратичной формы* $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ *делятся на* 2*:*

$$a = 2^\alpha a_1, b = 2^\beta b_1, c = 2^\gamma c_1, (a_1, 2) = (b_1, 2) = (c_1, 2) = 1, (d, 2) = 1.$$

Уравнение $n = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ *не имеет решений в случаях:*
1. если $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma \ge 3$ *и*

$$a_1 \equiv b_1 \equiv d \not\equiv n \pmod 4, \quad \left(\frac{2}{dn}\right) = 1;$$

2. если $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma \ge 3$, *два коэффициента из трех* a_1, b_1, d *и число* n *сравнимы по модулю* 4, *но не сравнимы с третьим коэффициентом из* a_1, b_1, d *по модулю* 4 *и*

$$\left(\frac{2}{dn}\right) = -1;$$

3. если $\alpha = 1$, $3 \le \beta \le \gamma$,

$$a_1 \equiv d \equiv n \pmod 4, \quad \left(\frac{2}{dn}\right) = -1;$$

4. если $\alpha = 1$, $3 \le \beta \le \gamma$,

$$a_1 \equiv d \not\equiv n \pmod 4, \quad \left(\frac{2}{dn}\right) = 1;$$

5. если $\alpha = 1$, $3 \le \beta \le \gamma$,

$$a_1 \not\equiv d \pmod 4, \quad \left(\frac{2}{dn}\right) = -1;$$

6. если $2 = \alpha \le \beta \le \gamma$ *и*

$$\left(\frac{-1}{dn}\right) = -1;$$

7. если $3 \le \alpha \le \beta \le \gamma$,

$$\left(\frac{-1}{dn}\right) = -1 \quad \text{или} \quad \left(\frac{2}{dn}\right) = -1.$$

Уравнение $n = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ не имеет решения, если $(n, 2) = 1$ и все коэффициенты a, b, c, d делятся на 2.

Случаи с $p = 2$ сформулированы в работе Клоостермана с помощью теории сравнений и приведены без доказательства. Случай 7 теоремы 6 является новым.

При доказательстве теорем возникают некоторые суммы, родственные суммам Клоостемана. Для этих сумм были получены точные значения от степени двойки.

2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *(Равенства для одномерной суммы Гаусса)*
Справедливы следующие утверждения:
1. Если $(l,2)=1$, *то*

$$S(2^\alpha,l,0)=\begin{cases}0, & \text{если } \alpha=1,\\ \left(\frac{2}{l}\right)^\alpha 2^{\alpha/2}(1+i^l), & \text{если } \alpha>1.\end{cases}$$

2. Если $(q,l)=n$, *то*

$$S(q,l,m)=\begin{cases} nS(q/n,l/n,m/n), & \text{если } n\mid m,\\ 0, & \text{если } n\nmid m.\end{cases}$$

Доказательство. [13], с. 20.

Лемма 2. *(Равенства для множителей, входящих в одномерные суммы Гаусса)*
1. Пусть $(a,2)=(b,2)=(l,2)=1$, *тогда справедливы следующие равенства:*

$$(1+i^{al})(1+i^{bl})=c_2(a,b,l)=\begin{cases}2i^l, & \text{если } a,b\equiv 1 \pmod 4,\\ 2, & \text{если } a\equiv 3 \pmod 4 \text{ и } b\equiv 1 \pmod 4,\\ -2i^l, & \text{если } a,b\equiv 3 \pmod 4.\end{cases}$$

2. Пусть $(a,2)=(b,2)=(c,2)=(l,2)=1$, *тогда справедливы следующие равенства:*

$$(1+i^{al})(1+i^{bl})(1+i^{cl})=c_3(a,b,c,l)=$$
$$=\begin{cases}-2+2i^l, & \text{если } a,b,c\equiv 1 \pmod 4,\\ 2+2i^l, & \text{если } a\equiv 3 \pmod 4 \text{ и } b,c\equiv 1 \pmod 4,\\ 2-2i^l, & \text{если } a,b\equiv 3 \pmod 4 \text{ и } c\equiv 1 \pmod 4,\\ -2-2i^l, & \text{если } a,b,c\equiv 3 \pmod 4.\end{cases}$$

3. Пусть $(a,2)=(b,2)=(c,2)=(d,2)=(l,2)=1$, *тогда справедливы следующие равенства:*

$$(1+i^{al})(1+i^{bl})(1+i^{cl})(1+i^{dl})=c_4(a,b,c,d,l)=$$
$$=\begin{cases}-4, & \text{если } a,b,c,d\equiv 1 \pmod 4 \text{ или } a,b,c,d\equiv 3 \pmod 4,\\ 4i^l, & \text{если } a\equiv 3 \pmod 4 \text{ и } b,c,d\equiv 1 \pmod 4,\\ 4, & \text{если } a,b\equiv 3 \pmod 4 \text{ и } c,d\equiv 1 \pmod 4,\\ -4i^l, & \text{если } a,b,c\equiv 3 \pmod 4 \text{ и } d\equiv 1 \pmod 4.\end{cases}$$

Доказательство.
Если $a\equiv 1 \pmod 4$, то $1+i^{al}=1+i^l$. Если $a\equiv 3 \pmod 4$, то $1+i^{al}=1-i^l$. В дальнейшем будем учитывать, что l — нечетное число.
1. Рассмотрим произведение $(1+i^{al})(1+i^{bl})$.
Пусть $a,b\equiv 1 \pmod 4$, тогда $(1+i^{al})(1+i^{bl})=(1+i^l)^2=1+2i^l+(-1)^l=2i^l$.
Пусть $a,b\equiv 3 \pmod 4$, тогда $(1+i^{al})(1+i^{bl})=(1-i^l)^2=-2i^l$.
Пусть $a\equiv 3 \pmod 4$ и $b\equiv 1 \pmod 4$, тогда $(1+i^{al})(1+i^{bl})=(1-i^l)(1+i^l)=1-(-1)^l=2$.
2. Рассмотрим произведение $(1+i^{al})(1+i^{bl})(1+i^{cl})$.
Пусть $a,b,c\equiv 1 \pmod 4$, тогда

$$(1+i^{al})(1+i^{bl})(1+i^{cl})=(1+i^l)^3=1+3i^l+3(-1)^l-i^l=-2+2i^l.$$

Пусть $a, b, c \equiv 3 \pmod 4$, тогда

$$(1+i^{al})(1+i^{bl})(1+i^{cl}) = (1-i^l)^3 = 1 - 3i^l + 3(-1)^l + i^l = -2 - 2i^l.$$

Пусть $a \equiv 3 \pmod 4$ и $b, c \equiv 1 \pmod 4$, тогда

$$(1+i^{al})(1+i^{bl})(1+i^{cl}) = (1-i^l)(1+i^l)^2 = (1-i^l)2i^l = 2 + 2i^l.$$

Пусть $a, b \equiv 3 \pmod 4$ и $c \equiv 1 \pmod 4$, тогда

$$(1+i^{al})(1+i^{bl})(1+i^{cl}) = (1-i^l)^2(1+i^l) = -2i^l(1+i^l) = 2 - 2i^l.$$

3. Проведем исследование для $(1+i^{al})(1+i^{bl})(1+i^{cl})(1+i^{dl})$.
Пусть $a, b, c, d \equiv 1 \pmod 4$, тогда

$$(1+i^{al})(1+i^{bl})(1+i^{cl})(1+i^{dl}) = (1+i^l)^4 = 1 + 4i^l + 6(-1)^l - 4i^l + 1 = -4.$$

Пусть $a, b, c, d \equiv 3 \pmod 4$, тогда

$$(1+i^{al})(1+i^{bl})(1+i^{cl})(1+i^{dl}) = (1-i^l)^4 = 1 - 4i^l + 6i^{2l} - 4i^{3l} + i^{4l} =$$

$$= 1 - 4i^l + 6(-1)^l + 4i^l + 1 = 2 + 6(-1)^l = -4.$$

Пусть $a \equiv 3 \pmod 4$ и $b, c, d \equiv 1 \pmod 4$, тогда

$$(1+i^{al})(1+i^{bl})(1+i^{cl})(1+i^{dl}) = (1-i^l)(1+i^l)^3 = (1-i^{2l})(1+i^l)^2 =$$

$$= (1-(-1)^l)(1+2i^l+(-1)^l) = 4i^l.$$

Пусть $a, b \equiv 3 \pmod 4$ и $c, d \equiv 1 \pmod 4$, тогда

$$(1+i^{al})(1+i^{bl})(1+i^{cl})(1+i^{dl}) = (1-i^l)^2(1+i^l)^2 = (1-i^{2l})^2 =$$

$$= (1-(-1)^l)^2 = 4.$$

Пусть $a, b, c \equiv 3 \pmod 4$ и $d \equiv 1 \pmod 4$, тогда

$$(1+i^{al})(1+i^{bl})(1+i^{cl})(1+i^{dl}) = (1-i^l)^3(1+i^l) = (1-i^{2l})(1-i^l)^2 =$$

$$= (1-(-1)^l)(1-2i^l+(-1)^l) = -4i^l.$$

Лемма 3. *(Точные формулы для суммы Клоостермана)*
Пусть

$$K(2^\alpha, n, 0) = \sum_{\substack{l=1 \\ (l,2)=1}}^{2^\alpha} e^{-2\pi i \frac{nl}{2^\alpha}}$$

— сумма Клоостермана.
При $(n, 2) = 1$, $\alpha > 1$

$$K(2, n, 0) = -1, \quad K(2^\alpha, n, 0) = 0.$$

Доказательство.
При нечетном n и $\alpha > 1$ имеем

$$K(2, n, 0) = e^{-\pi i n} = -1;$$

$$K(2^\alpha, n, 0) = e^{-2\pi i \frac{n}{2^\alpha}} + e^{-2\pi i \frac{3n}{2^\alpha}} + \ldots + e^{-2\pi i \frac{(2^\alpha-1)n}{2^\alpha}} = e^{-2\pi i \frac{n}{2^\alpha}} \frac{e^{-2\pi i n} - 1}{e^{-2\pi i \frac{n}{2^{\alpha-1}}} - 1} = 0.$$

Лемма 4. *(Точные формулы для измененной суммы Клоостермана)* *Пусть*

$$K_i(2^\alpha, n, 0) = \sum_{\substack{l=1\\(l,2)=1}}^{2^\alpha} i^l e^{-2\pi i \frac{nl}{2^\alpha}}$$

— измененная сумма Клоостермана.

Пусть $(n, 2) = 1$. *Тогда*

$$K_i(2, n, 0) = -i,$$

$$K_i(4, n, 0) = 2 \cdot \left(\frac{-1}{n}\right),$$

$$K_i(2^\alpha, n, 0) = 0, \quad \alpha > 2.$$

Доказательство.

Пусть $(n, 2) = 1$, $\alpha > 2$, тогда имеем

$$K_i(2, n, 0) = \sum_{\substack{l=1\\(l,2)=1}}^{2} i^l e^{-2\pi i \frac{nl}{2}} = ie^{-2\pi i \frac{n}{2}} = ie^{-\pi i n} = i \cos \pi n = -i.$$

$$K_i(4, n, 0) = \sum_{\substack{l=1\\(l,2)=1}}^{4} i^l e^{-2\pi i \frac{nl}{4}} = ie^{-2\pi i \frac{n}{4}} - ie^{-2\pi i \frac{3n}{4}} = \sin \frac{\pi n}{2} - \sin \frac{3\pi n}{2} =$$

$$= \begin{cases} 2, & \text{если } n \equiv 1 \pmod 4, \\ -2, & \text{если } n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases} = 2 \cdot \left(\frac{-1}{n}\right).$$

$$K_i(2^\alpha, n, 0) = \sum_{\substack{l=1\\(l,2)=1}}^{2^\alpha} i^l e^{-2\pi i \frac{nl}{2^\alpha}} = ie^{-2\pi i \frac{n}{2^\alpha}} - ie^{-2\pi i \frac{3n}{2^\alpha}} + \dots + ie^{-2\pi i \frac{(2^\alpha - 3)n}{2^\alpha}} - ie^{-2\pi i \frac{(2^\alpha - 1)n}{2^\alpha}} =$$

$$= ie^{-2\pi i \frac{n}{2^\alpha}} \frac{(-e^{-2\pi i \frac{n}{2^{\alpha-1}}})^{2^{\alpha-1}} - 1}{-e^{-2\pi i \frac{n}{2^{\alpha-1}}} - 1} = ie^{-2\pi i \frac{n}{2^\alpha}} \frac{e^{-2\pi i n} - 1}{-e^{-2\pi i \frac{n}{2^{\alpha-1}}} - 1} = 0.$$

Лемма 5. *(Точные формулы для обобщенной суммы Клоостермана)* *Пусть*

$$K_2(2^\alpha, n, 0) = \sum_{\substack{l=1\\(l,2)=1}}^{2^\alpha} \left(\frac{2}{l}\right) e^{-2\pi i \frac{nl}{2^\alpha}}$$

— обобщенная сумма Клоостермана.

Пусть $(n, 2) = 1$. *Тогда*

$$K_2(2, n, 0) = -1, \quad K_2(4, n, 0) = -2i \cdot \left(\frac{-1}{n}\right),$$

$$K_2(8, n, 0) = 2\sqrt{2} \left(\frac{2}{n}\right); \quad K_2(2^\alpha, n, 0) = 0, \quad \alpha > 3.$$

Доказательство.
Пусть $(n,2)=1$, $\alpha>3$, тогда

$$K_2(2,n,0)=\sum_{\substack{l=1\\(l,2)=1}}^{2}\left(\frac{2}{l}\right)e^{-2\pi i\frac{nl}{2}}=e^{-2\pi i\frac{n}{2}}=\cos\pi n=-1.$$

$$K_2(4,n,0)=\sum_{\substack{l=1\\(l,2)=1}}^{4}\left(\frac{2}{l}\right)e^{-2\pi i\frac{nl}{4}}=e^{-2\pi i\frac{n}{4}}-e^{-2\pi i\frac{3n}{4}}=-i\sin\frac{\pi n}{2}+i\sin\frac{3\pi n}{2}=-2i\cdot\left(\frac{-1}{n}\right).$$

$$K_2(8,n,0)=\sum_{\substack{l=1\\(l,2)=1}}^{8}\left(\frac{2}{l}\right)e^{-2\pi i\frac{nl}{8}}=e^{-2\pi i\frac{n}{8}}-e^{-2\pi i\frac{3n}{8}}-e^{-2\pi i\frac{5n}{8}}+e^{-2\pi i\frac{7n}{8}}=$$

$$=e^{-2\pi i\frac{n}{8}}\left(1-e^{-2\pi i\frac{n}{4}}\right)-e^{-2\pi i\frac{5n}{8}}\left(1-e^{-2\pi i\frac{n}{4}}\right)=$$

$$=e^{-2\pi i\frac{n}{8}}\left(1-e^{-2\pi i\frac{n}{4}}\right)\left(1-e^{-2\pi i\frac{n}{2}}\right)=$$

$$=2e^{-\pi i\frac{n}{4}}\left(1-e^{-\pi i\frac{n}{2}}\right)=2\left(e^{-\pi i\frac{n}{4}}-e^{-\pi i\frac{3n}{4}}\right)=$$

$$=2\left(\cos(\pi n/4)-\cos(3\pi n/4)+i(\sin(3\pi n/4)-\sin(\pi n/4))\right)=$$

$$=4\left(\sin(\pi n/4)\cdot\sin(\pi n/2)+i\sin(\pi n/4)\cdot\cos(\pi n/2)\right)=$$

$$=4\sin(\pi n/4)\cdot\sin(\pi n/2)=$$

$$=\begin{cases}4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}, & \text{если } n\equiv 1\pmod 8 \text{ или } n\equiv 7\pmod 8,\\ -4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}, & \text{если } n\equiv 3\pmod 8 \text{ или } n\equiv 5\pmod 8\end{cases}=2\sqrt{2}\left(\frac{2}{n}\right).$$

$$K_2(2^\alpha,n,0)=\sum_{\substack{l=1\\(l,2)=1}}^{2^\alpha}\left(\frac{2}{l}\right)e^{-2\pi i\frac{nl}{2^\alpha}}=e^{-2\pi i\frac{n}{2^\alpha}}-e^{-2\pi i\frac{3n}{2^\alpha}}-e^{-2\pi i\frac{5n}{2^\alpha}}+e^{-2\pi i\frac{7n}{2^\alpha}}+\cdots-$$

$$-e^{-2\pi i\frac{(2^\alpha-3)n}{2^\alpha}}+e^{-2\pi i\frac{(2^\alpha-1)n}{2^\alpha}}=e^{-2\pi i\frac{n}{2^\alpha}}(1-e^{-2\pi i\frac{2n}{2^\alpha}})-e^{-2\pi i\frac{5n}{2^\alpha}}(1-e^{-2\pi i\frac{2n}{2^\alpha}})+\cdots-$$

$$-e^{-2\pi i\frac{(2^\alpha-3)n}{2^\alpha}}(1-e^{-2\pi i\frac{2n}{2^\alpha}})=$$

$$=e^{-2\pi i\frac{n}{2^\alpha}}(1-e^{-2\pi i\frac{n}{2^{\alpha-1}}})(1-e^{-2\pi i\frac{4n}{2^\alpha}}+\cdots-e^{-2\pi i\frac{(2^\alpha-4)n}{2^\alpha}})=$$

$$=e^{-2\pi i\frac{n}{2^\alpha}}(1-e^{-2\pi i\frac{n}{2^{\alpha-1}}})\frac{(-e^{-2\pi i\frac{4n}{2^\alpha}})^{2^{\alpha-2}}-1}{-e^{-2\pi i\frac{4n}{2^\alpha}}-1}=e^{-2\pi i\frac{n}{2^\alpha}}(1-e^{-2\pi i\frac{n}{2^{\alpha-1}}})\frac{e^{-2\pi in}-1}{-e^{-2\pi i\frac{4n}{2^\alpha}}-1}=0.$$

Лемма 6. *(Точные формулы для обобщенной измененной суммы Клоостермана) Пусть*

$$K_{2i}(2^\alpha,n,0)=\sum_{\substack{l=1\\(l,2)=1}}^{2^\alpha}\left(\frac{2}{l}\right)i^l e^{-2\pi i\frac{nl}{2^\alpha}}$$

— обобщенная измененная сумма Клоостермана.
Пусть $(n,2)=1$. Тогда

$$K_{2i}(2,n,0)=-i,\quad K_{2i}(4,n,0)=0$$

$$K_{2i}(8,n,0)=2\sqrt{2}\left(\frac{-1}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right),\quad K_{2i}(2^\alpha,n,0)=0,\quad \alpha>3.$$

Доказательство.
Пусть $(n,2)=1$, $\alpha>3$, тогда

$$K_{2i}(2,n,0)=\sum_{\substack{l=1\\(l,2)=1}}^{2}\left(\frac{2}{l}\right)i^{l}e^{-2\pi i\frac{nl}{2}}=ie^{-2\pi i\frac{n}{2}}=i\cos\pi n=-i.$$

$$K_{2i}(4,n,0)=\sum_{\substack{l=1\\(l,2)=1}}^{4}\left(\frac{2}{l}\right)i^{l}e^{-2\pi i\frac{nl}{4}}=ie^{-2\pi i\frac{n}{4}}+ie^{-2\pi i\frac{3n}{4}}=e^{-2\pi i\frac{n}{4}}(1+e^{-2\pi i\frac{2n}{4}})=$$

$$=e^{-2\pi i\frac{n}{4}}(1+\cos\pi n)=0.$$

$$K_{2i}(8,n,0)=\sum_{\substack{l=1\\(l,2)=1}}^{8}\left(\frac{2}{l}\right)i^{l}e^{-2\pi i\frac{nl}{8}}=i\left(e^{-2\pi i\frac{n}{8}}+e^{-2\pi i\frac{3n}{8}}-e^{-2\pi i\frac{5n}{8}}-e^{-2\pi i\frac{7n}{8}}\right)=$$

$$=ie^{-2\pi i\frac{n}{8}}\left(1+e^{-2\pi i\frac{n}{4}}\right)-ie^{-2\pi i\frac{5n}{8}}\left(1+e^{-2\pi i\frac{n}{4}}\right)=$$

$$=ie^{-2\pi i\frac{n}{8}}\left(1+e^{-2\pi i\frac{n}{4}}\right)\left(1-e^{-2\pi i\frac{n}{2}}\right)=$$

$$=2ie^{-\pi i\frac{n}{4}}\left(1+e^{-2\pi i\frac{n}{4}}\right)=2i\left(e^{-\pi i\frac{n}{4}}+e^{-\pi i\frac{3n}{4}}\right)=$$

$$=2i\left(\cos(\pi n/4)+\cos(3\pi n/4)-i(\sin(\pi n/4)+\sin(3\pi n/4))\right)=$$

$$=4i\left(\cos(\pi n/4)\cdot\cos(\pi n/2)-i\cos(\pi n/4)\cdot\sin(\pi n/2)\right)=$$

$$=4\cos(\pi n/4)\cdot\sin(\pi n/2)=$$

$$=\begin{cases}4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}, & \text{если } n\equiv 1\pmod 8 \text{ или } n\equiv 3\pmod 8,\\ -4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}, & \text{если } n\equiv 5\pmod 8 \text{ или } n\equiv 7\pmod 8\end{cases}=2\sqrt{2}\left(\frac{-1}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right).$$

$$K_{2i}(2^{\alpha},n,0)=\sum_{\substack{l=1\\(l,2)=1}}^{2^{\alpha}}\left(\frac{2}{l}\right)i^{l}e^{-2\pi i\frac{nl}{2^{\alpha}}}=ie^{-2\pi i\frac{n}{2^{\alpha}}}+ie^{-2\pi i\frac{3n}{2^{\alpha}}}-ie^{-2\pi i\frac{5n}{2^{\alpha}}}-ie^{-2\pi i\frac{7n}{2^{\alpha}}}+\cdots-$$

$$-ie^{-2\pi i\frac{(2^{\alpha}-3)n}{2^{\alpha}}}-ie^{-2\pi i\frac{(2^{\alpha}-1)n}{2^{\alpha}}}=ie^{-2\pi i\frac{n}{2^{\alpha}}}(1+e^{-2\pi i\frac{2n}{2^{\alpha}}})-ie^{-2\pi i\frac{5n}{2^{\alpha}}}(1+e^{-2\pi i\frac{2n}{2^{\alpha}}})+\cdots-$$

$$-ie^{-2\pi i\frac{(2^{\alpha}-3)n}{2^{\alpha}}}(1+e^{-2\pi i\frac{2n}{2^{\alpha}}})=$$

$$=ie^{-2\pi i\frac{n}{2^{\alpha}}}(1+e^{-2\pi i\frac{n}{2^{\alpha-1}}})(1-e^{-2\pi i\frac{4n}{2^{\alpha}}}+\cdots-e^{-2\pi i\frac{(2^{\alpha}-4)n}{2^{\alpha}}})=$$

$$=ie^{-2\pi i\frac{n}{2^{\alpha}}}(1+e^{-2\pi i\frac{n}{2^{\alpha-1}}})\frac{(-e^{-2\pi i\frac{4n}{2^{\alpha}}})^{2^{\alpha-2}}-1}{-e^{-2\pi i\frac{4n}{2^{\alpha}}}-1}=ie^{-2\pi i\frac{n}{2^{\alpha}}}(1+e^{-2\pi i\frac{n}{2^{\alpha-1}}})\frac{e^{-2\pi in}-1}{-e^{-2\pi i\frac{4n}{2^{\alpha}}}-1}=0.$$

3. Доказательства теорем 1–3

Для числа решений $N(a,b,c,d;n)$ уравнения $n = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ была получена асимптотическая формула [12]:

$$N(a,b,c,d;n) = \frac{\pi^2}{\sqrt{abcd}} nS(n) + O(n^{17/18+\varepsilon}),$$

где

$$S(n) = \sum_{q=1}^{\infty} q^{-4} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,q)=1}}^{q} e^{-\frac{2\pi inl}{q}} S(q,al,0)S(q,bl,0)S(q,cl,0)S(q,dl,0).$$

Для особого ряда $S(n)$ рассмотрим функцию

$$\Phi(q) = q^{-4} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,q)=1}}^{q} e^{-\frac{2\pi inl}{q}} S(q,al,0)S(q,bl,0)S(q,cl,0)S(q,dl,0).$$

Она является мультипликативной. По свойству мультипликативной функции получим представление особого ряда $S(n)$ в виде произведения

$$S(n) = \prod_{p \setminus q} (1 + \Phi(p) + \Phi(p^2) + ...).$$

Найдем явные формулы для всех таких возможных произведений при нечетном n и $p = 2$.

3.1. 1. Случай, когда коэффициенты a, b, c, d — нечетные

По лемме 1 имеем $S(2,al,0) = 0$, тогда $\Phi(2) = 0$. При $\mu > 1$ по лемме 2

$$\Phi(2^\mu) = 2^{-2\mu} \left(\frac{2}{abcd}\right)^{\mu} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,2)=1}}^{2^\mu} (1+i^{al})(1+i^{bl})(1+i^{cl})(1+i^{dl}) e^{-\frac{2\pi inl}{2^\mu}} =$$

$$= 2^{-2\mu+2} \left(\frac{2}{abcd}\right)^{\mu} \cdot \begin{cases} -K(2^\mu,n,0), & \text{если } a,b,c,d \equiv 1 \pmod 4 \text{ или } a,b,c,d \equiv 3 \pmod 4, \\ K_i(2^\mu,n,0), & \text{если } a \equiv 3 \pmod 4 \text{ и } b,c,d \equiv 1 \pmod 4, \\ K(2^\mu,n,0), & \text{если } a,b \equiv 3 \pmod 4 \text{ и } c,d \equiv 1 \pmod 4, \\ -K_i(2^\mu,n,0), & \text{если } a,b,c \equiv 3 \pmod 4 \text{ и } d \equiv 1 \pmod 4. \end{cases}$$

Из лемм 3, 4 следует, что

$$\Phi(4) = 1/2 \cdot C_0(a,b,c,d,n),$$

где

$$C_0(a,b,c,d,n) = \begin{cases} 0, & \text{если } a,b,c,d \equiv 1 \pmod 4 \text{ или } a,b,c,d \equiv 3 \pmod 4, \\ \left(\frac{-1}{n}\right), & \text{если } a \equiv 3 \pmod 4 \text{ и } b,c,d \equiv 1 \pmod 4, \\ 0, & \text{если } a,b \equiv 3 \pmod 4 \text{ и } c,d \equiv 1 \pmod 4, \\ -\left(\frac{-1}{n}\right), & \text{если } a,b,c \equiv 3 \pmod 4 \text{ и } d \equiv 1 \pmod 4, \end{cases}$$

$$\Phi(2^\mu) = 0, \quad \mu > 2.$$

Получаем множитель в представлении особого ряда в виде произведений по степеням двойки:

$$\prod_{\substack{(a,2)=1\\(b,2)=1\\(c,2)=1\\(d,2)=1\\(n,2)=1}} (1+1/2\cdot C_0(a,b,c,d,n))>0.$$

3.2. 2. Случай, когда один из коэффициентов a, b, c, d делится на 2

Пусть $a=2^{\alpha}a_1, (a_1,2)=1$ и $(b,2)=1, (c,2)=1, (d,2)=1, (n,2)=1$.

По лемме 1 имеем

$$S(2^{\alpha+1},al,0)=S(2^{\alpha+1},2^{\alpha}a_1l,0)=2^{\alpha}S(2,a_1l,0)=0$$

и $S(2,bl,0)=0$, тогда $\Phi(2)=0$, $\Phi(2^{\alpha+1})=0$.

При $\mu>3$ любая из возможных сумм $K(2^{\mu},n,0)$, $K_i(2^{\mu},n,0)$, $K_2(2^{\mu},n,0)$, $K_{2i}(2^{\mu},n,0)$, которая может входить в $\Phi(2^{\mu})$ (лемма 2), равна 0 (леммы 3–6). Тогда имеем $\Phi(2^{\mu})=0$ при $\mu>3$.

Рассмотрим $\Phi(4)$ и $\Phi(8)$ для следующих трех случаев.

2.1. $\alpha=1$.

$$\Phi(4)=0,$$

$$\Phi(8)=2^{-11/2}\left(\frac{2}{bcd}\right)\sum_{\substack{l=1\\(l,2)=1}}^{8} c_4(a_1,b,c,d,l)\left(\frac{2}{l}\right)e^{-\frac{2\pi inl}{8}}=$$

$$=2^{-7/2}\left(\frac{2}{bcd}\right)\cdot\begin{cases}-K_2(8,n,0), & \text{если } a_1,b,c,d\equiv 1 \pmod 4 \text{ или } a_1,b,c,d\equiv 3 \pmod 4,\\ K_{2i}(8,n,0), & \text{если } a_1\equiv 3 \pmod 4 \text{ и } b,c,d\equiv 1 \pmod 4,\\ K_2(8,n,0), & \text{если } a_1,b\equiv 3 \pmod 4 \text{ и } c,d\equiv 1 \pmod 4,\\ -K_{2i}(8,n,0), & \text{если } a_1,b,c\equiv 3 \pmod 4 \text{ и } d\equiv 1 \pmod 4\end{cases}=$$

$$=1/4\cdot C_{\alpha=1}(a_1,b,c,d,l)\left(\frac{2}{bcdn}\right),$$

где

$$C_{\alpha=1}(a_1,b,c,d,l)=\begin{cases}-1, & \text{если } a_1,b,c,d\equiv 1 \pmod 4 \text{ или } a_1,b,c,d\equiv 3 \pmod 4,\\ \left(\frac{-1}{n}\right), & \text{если } a_1\equiv 3 \pmod 4 \text{ и } b,c,d\equiv 1 \pmod 4,\\ 1, & \text{если } a_1,b\equiv 3 \pmod 4 \text{ и } c,d\equiv 1 \pmod 4,\\ -\left(\frac{-1}{n}\right), & \text{если } a_1,b,c\equiv 3 \pmod 4 \text{ и } d\equiv 1 \pmod 4.\end{cases}$$

Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{a=2a_1,(a_1,2)=1\\(b,2)=1\\(c,2)=1\\(d,2)=1\\(n,2)=1}}\left(1+1/4\cdot C_{\alpha=1}(a_1,b,c,d,l)\left(\frac{2}{bcdn}\right)\right)>0.$$

2.2. $\alpha=2$.

$$\Phi(4) = 2^{-3} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,2)=1}}^{4} c_3(b,c,d,l) e^{-\frac{2\pi inl}{4}} =$$

$$= 2^{-2} \cdot \begin{cases} -K(4,n,0) + K_i(4,n,0), & \text{если } b,c,d \equiv 1 \pmod 4, \\ K(4,n,0) + K_i(4,n,0), & \text{если } b \equiv 3 \pmod 4 \text{ и } c,d \equiv 1 \pmod 4, \\ K(4,n,0) - K_i(4,n,0), & \text{если } b,c \equiv 3 \pmod 4 \text{ и } d \equiv 1 \pmod 4, \\ -K(4,n,0) - K_i(4,n,0), & \text{если } b,c,d \equiv 3 \pmod 4 \end{cases} =$$

$$= 1/2 \cdot C_{\alpha=2}(b,c,d) \left(\frac{-1}{n}\right),$$

где

$$C_{\alpha=2}(b,c,d) = \begin{cases} 1, & \text{если } b,c,d \equiv 1 \pmod 4, \\ 1, & \text{если } b \equiv 3 \pmod 4 \text{ и } c,d \equiv 1 \pmod 4, \\ -1, & \text{если } b,c \equiv 3 \pmod 4 \text{ и } d \equiv 1 \pmod 4, \\ -1, & \text{если } b,c,d \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

$$\Phi(8) = 0.$$

Получаем множитель:

$$\prod_{\substack{a=4a_1,(a_1,2)=1 \\ (b,2)=1 \\ (c,2)=1 \\ (d,2)=1 \\ (n,2)=1}} \left(1 + 1/2 \cdot C_{\alpha=2}(b,c,d) \left(\frac{-1}{n}\right)\right) > 0.$$

2.3. $\alpha \geqslant 3$.

Как и в случае 2.2

$$\Phi(4) = 1/2 \cdot C_{\alpha=2}(b,c,d) \left(\frac{-1}{n}\right).$$

Из лемм 2, 5, 6 имеем

$$\Phi(8) = 2^{-9/2} \left(\frac{2}{bcd}\right) \sum_{\substack{l=1 \\ (l,2)=1}}^{8} c_3(b,c,d,l) \left(\frac{2}{l}\right) e^{-\frac{2\pi inl}{8}} =$$

$$= 2^{-7/2} \left(\frac{2}{bcd}\right) \cdot \begin{cases} -K_2(8,n,0) + K_{2i}(8,n,0), & \text{если } b,c,d \equiv 1 \pmod 4, \\ K_2(8,n,0) + K_{2i}(8,n,0), & \text{если } b \equiv 3 \pmod 4 \text{ и } c,d \equiv 1 \pmod 4, \\ K_2(8,n,0) - K_{2i}(8,n,0), & \text{если } b,c \equiv 3 \pmod 4 \text{ и } d \equiv 1 \pmod 4, \\ -K_2(8,n,0) - K_{2i}(8,n,0), & \text{если } b,c,d \equiv 3 \pmod 4 \end{cases} =$$

$$= 1/4 \cdot C_{\alpha \geqslant 3}(b,c,d,n) \left(\frac{2}{bcdn}\right),$$

где

$$C_{\alpha \geqslant 3}(b,c,d,n) = \begin{cases} -1 + \left(\frac{-1}{n}\right), & \text{если } b,c,d \equiv 1 \pmod 4, \\ 1 + \left(\frac{-1}{n}\right), & \text{если } b \equiv 3 \pmod 4 \text{ и } c,d \equiv 1 \pmod 4, \\ 1 - \left(\frac{-1}{n}\right), & \text{если } b,c \equiv 3 \pmod 4 \text{ и } d \equiv 1 \pmod 4, \\ -1 - \left(\frac{-1}{n}\right), & \text{если } b,c,d \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{a=2^\alpha a_1,(a_1,2)=1\\ \alpha\geqslant 3\\ (b,2)=1\\ (c,2)=1\\ (d,2)=1\\ (n,2)=1}} \left(1+1/2\cdot C_{\alpha=2}(b,c,d)\left(\frac{-1}{n}\right)+1/4\cdot C_{\alpha\geqslant 3}(b,c,d,n)\left(\frac{2}{bcdn}\right)\right).$$

Если $b,c,d\equiv 1 \pmod 4$, то имеем множитель

$$\left(1+1/2\cdot\left(\frac{-1}{n}\right)+1/4\cdot(-1+\left(\frac{-1}{n}\right))\left(\frac{2}{bcdn}\right)\right).$$

Он равен нулю, если $n\equiv 3 \pmod 4$ и $\left(\frac{2}{bcdn}\right)=1$.

Если $b\equiv 3 \pmod 4$ и $c,d\equiv 1 \pmod 4$, то имеем множитель

$$\left(1+1/2\cdot\left(\frac{-1}{n}\right)+1/4\cdot(1+\left(\frac{-1}{n}\right))\left(\frac{2}{bcdn}\right)\right)\geqslant\frac{1}{2}.$$

Если $b,c\equiv 3 \pmod 4$ и $d\equiv 1 \pmod 4$, то имеем множитель

$$\left(1-1/2\cdot\left(\frac{-1}{n}\right)+1/4\cdot(1-\left(\frac{-1}{n}\right))\left(\frac{2}{bcdn}\right)\right)\geqslant\frac{1}{2}.$$

Если $b,c,d\equiv 3 \pmod 4$, то имеем множитель

$$\left(1-1/2\cdot\left(\frac{-1}{n}\right)+1/4\cdot(-1-\left(\frac{-1}{n}\right))\left(\frac{2}{bcdn}\right)\right).$$

Множитель равен 0, если $n\equiv 1 \pmod 4$ и $\left(\frac{2}{bcdn}\right)=1$.

Теорема 1 доказана.

3.3. 3. Случай, когда два коэффициента из a, b, c, d делятся на 2

Пусть $a=2^\alpha a_1,(a_1,2)=1, b=2^\beta b_1,(b_1,2)=1$ и $(c,2)=1,(d,2)=1,(n,2)=1$.

В дальнейшем будем считать, что $1\leqslant\alpha\leqslant\beta$. Имеем $\Phi(2)=0$, $\Phi(2^{\alpha+1})=0$, $\Phi(2^{\beta+1})=0$, $\Phi(2^\mu)=0$, если $\mu>3$. Вычислим $\Phi(4)$ и $\Phi(8)$ для следующих трех случаев.

3.1. $1=\alpha\leqslant\beta$.

Тогда $\Phi(4)=0$.

$$S(8,al,0)S(8,bl,0)S(8,cl,0)S(8,dl,0)=2^7\left(\frac{2}{cd}\right)\cdot\begin{cases} c_4(a_1,b_1,c,d,l), & \text{если } \beta=1,\\ 0, & \text{если } \beta=2,\\ 2c_3(a_1,c,d,l), & \text{если } \beta\geqslant 3.\end{cases}$$

В зависимости от значений, которые принимают $c_4(a_1,b_1,c,d,l)$ и $c_3(a_1,c,d,l)$, $\Phi(8)$ будет содержать равные нулю суммы $K(8,n,0)$ или $K_i(8,n,0)$. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{a=2a_1,(a_1,2)=1\\ b=2^\beta b_1,(b_1,2)=1\\ 1\leqslant\beta\\ (c,2)=1\\ (d,2)=1\\ (n,2)=1}} (1)\,.$$

3.2. $2 = \alpha \leqslant \beta$.

По леммам 1–4 имеем

$$\Phi(4) = 1/4 \cdot \sum_{\substack{l=1\\(l,2)=1}}^{4} c_2(c,d,l) e^{-\frac{2\pi i n l}{4}} =$$

$$= 1/2 \cdot \begin{cases} K_i(4,n,0), & \text{если } c,d \equiv 1 \pmod 4 \\ K(4,n,0), & \text{если } c \equiv 3 \pmod 4 \text{ и } d \equiv 1 \pmod 4 \\ -K_i(4,n,0), & \text{если } c,d \equiv 3 \pmod 4 \end{cases} = C_{2,\beta}(c,d,n),$$

где

$$C_{2,\beta}(c,d,n) = \begin{cases} \left(\frac{-1}{n}\right), & \text{если } c,d \equiv 1 \pmod 4, \\ 0, & \text{если } c \equiv 3 \pmod 4 \text{ и } d \equiv 1 \pmod 4, \\ -\left(\frac{-1}{n}\right), & \text{если } c,d \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

По лемме 1 следует, что $\Phi(8) = 0$.

Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{a=4a_1,(a_1,2)=1\\ b=2^\beta b_1,(b_1,2)=1\\ 2\leqslant\beta\\ (c,2)=1\\ (d,2)=1\\ (n,2)=1}} \left(1 + C_{2,\beta}(c,d,n)\right).$$

Скобка равна нулю, если $c \equiv d \not\equiv n \pmod 4$.

3.3. $3 \leqslant \alpha \leqslant \beta$.

Как и в случае 3.2

$$\Phi(4) = C_{2,\beta}(c,d,n).$$

По лемме 1 имеем

$$\Phi(8) = 1/8 \cdot \left(\frac{2}{cd}\right) \cdot \sum_{\substack{l=1\\(l,2)=1}}^{8} c_2(c,d,l) e^{-\frac{2\pi i n l}{8}}.$$

Поскольку $\Phi(8)$ по лемме 2 будет содержать суммы $K(8,n,0)$ или $K_i(8,n,0)$, которые равны 0 (леммы 3–4), то $\Phi(8) = 0$.

Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{a=2^\alpha a_1,(a_1,2)=1\\ b=2^\beta b_1,(b_1,2)=1\\ 3\leqslant\alpha\leqslant\beta\\ (c,2)=1\\ (d,2)=1\\ (n,2)=1}} \left(1 + C_{2,\beta}(c,d,n)\right),$$

где

$$C_{2,\beta}(c,d,n) = \begin{cases} \left(\frac{-1}{n}\right), & \text{если } c,d \equiv 1 \pmod 4, \\ 0, & \text{если } c \equiv 3 \pmod 4 \text{ и } d \equiv 1 \pmod 4, \\ -\left(\frac{-1}{n}\right), & \text{если } c,d \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Скобка равна нулю, если $c \equiv d \not\equiv n \pmod 4$.

Теорема 2 доказана.

3.4. 4. Случай, когда три коэффициента из a, b, c, d делятся на 2

Пусть $a = 2^\alpha a_1, (a_1, 2) = 1, b = 2^\beta b_1, (b_1, 2) = 1, c = 2^\gamma c_1, (c_1, 2) = 1$, $1 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$ и $(d, 2) = 1, (n, 2) = 1$.

$\Phi(2^\mu) = 0$, если $\mu = 1$, $\mu = \alpha + 1$, $\mu = \beta + 1$, $\mu = \gamma + 1$.

$\Phi(2^\mu) = 0$, если $\mu > 3$, так как любая из возможных сумм $K(2^\mu, n, 0)$, $K_i(2^\mu, n, 0)$, $K_2(2^\mu, n, 0)$, $K_{2i}(2^\mu, n, 0)$, которая может входить в $\Phi(2^\mu)$, равна 0.

Поэтому нужно вычислить $\Phi(4)$ и $\Phi(8)$ для следующих трех случаев.

4.1. $1 = \alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$.

Из леммы 2 следует, что $\Phi(4) = 0$,

$$S(8, al, 0)S(8, bl, 0)S(8, cl, 0)S(8, dl, 0) =$$

$$= 2^{15/2}\left(\frac{2}{dl}\right)\cdot\begin{cases} c_4(a_1, b_1, c_1, d, l), & \text{если } \beta = \gamma = 1,\\ 0, & \text{если } \beta = 1, \gamma = 2 \text{ или } \beta = 2, \gamma \geqslant 2,\\ 2c_3(a_1, b_1, d, l), & \text{если } \beta = 1, \gamma \geqslant 3,\\ 4c_2(a_1, d, l), & \text{если } 3 \leqslant \beta \leqslant \gamma.\end{cases}$$

4.1.1. $1 = \alpha = \beta = \gamma$.

$$\Phi(8) = 2^{-5/2}\left(\frac{2}{d}\right)\cdot$$

$$\cdot\begin{cases} -K_2(8, n, 0), & \text{если } a_1, b_1, c_1, d \equiv 1 \pmod 4 \text{ или } a_1, b_1, c_1, d \equiv 3 \pmod 4,\\ K_{2i}(8, n, 0), & \text{если } a_1 \equiv 3 \pmod 4 \text{ и } b_1, c_1, d \equiv 1 \pmod 4,\\ K_2(8, n, 0), & \text{если } a_1, b_1 \equiv 3 \pmod 4 \text{ и } c_1, d \equiv 1 \pmod 4,\\ -K_{2i}(8, n, 0), & \text{если } a_1, b_1, c_1 \equiv 3 \pmod 4 \text{ и } d \equiv 1 \pmod 4\end{cases} =$$

$$= 1/2 \cdot C_{1,1,1}(a_1, b_1, c_1, d, n)\left(\frac{2}{dn}\right),$$

где

$$C_{1,1,1}(a_1, b_1, c_1, d, n) = \begin{cases} -1, & \text{если } a_1, b_1, c_1, d \equiv 1 \pmod 4 \text{ или } a_1, b_1, c_1, d \equiv 3 \pmod 4,\\ \left(\frac{-1}{n}\right), & \text{если } a_1 \equiv 3 \pmod 4 \text{ и } b_1, c_1, d \equiv 1 \pmod 4,\\ 1, & \text{если } a_1, b_1 \equiv 3 \pmod 4 \text{ и } c_1, d \equiv 1 \pmod 4,\\ -\left(\frac{-1}{n}\right), & \text{если } a_1, b_1, c_1 \equiv 3 \pmod 4 \text{ и } d \equiv 1 \pmod 4.\end{cases}$$

Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{a=2a_1, (a_1,2)=1\\ b=2b_1, (b_1,2)=1\\ c=2c_1, (c_1,2)=1\\ (d,2)=1\\ (n,2)=1}}\left(1 + 1/2 \cdot C_{1,1,1}(a_1, b_1, c_1, d, n)\left(\frac{2}{dn}\right)\right) > 0.$$

4.1.2. $1 = \alpha = \beta, \gamma = 2$ или $\alpha = 1, 2 = \beta \leqslant \gamma$.

$$\Phi(8) = 0.$$

Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{a=2a_1,(a_1,2)=1\\ b=2^\beta b_1,(b_1,2)=1\\ c=2^\gamma c_1,(c,2)=1\\ \beta=1,\gamma=2\\ \beta=2,\gamma\geqslant 2\\ (d,2)=1\\ (n,2)=1}} (1)\,.$$

4.1.3. $1=\alpha=\beta, \gamma\geqslant 3$.

$$\Phi(8)=2^{-5/2}\left(\frac{2}{d}\right)\cdot$$

$$\cdot\begin{cases} -K_2(8,n,0)+K_{2i}(8,n,0), & \text{если } a_1,b_1,d\equiv 1 \pmod 4,\\ K_2(8,n,0)+K_{2i}(8,n,0), & \text{если } a_1\equiv 3 \pmod 4 \text{ и } b_1,d\equiv 1 \pmod 4,\\ K_2(8,n,0)-K_{2i}(8,n,0), & \text{если } a_1,b_1\equiv 3 \pmod 4 \text{ и } d\equiv 1 \pmod 4,\\ -K_2(8,n,0)-K_{2i}(8,n,0), & \text{если } a_1,b_1,d\equiv 3 \pmod 4 \end{cases} =$$

$$=1/2\cdot C_{1,1,3}(a_1,b_1,d,n)\left(\frac{2}{dn}\right),$$

где

$$C_{1,1,3}(a_1,b_1,d,n)=\begin{cases} -1+\left(\frac{-1}{n}\right), & \text{если } a_1,b_1,d\equiv 1 \pmod 4,\\ 1+\left(\frac{-1}{n}\right), & \text{если } a_1\equiv 3 \pmod 4 \text{ и } b_1,d\equiv 1 \pmod 4,\\ 1-\left(\frac{-1}{n}\right), & \text{если } a_1,b_1\equiv 3 \pmod 4 \text{ и } d\equiv 1 \pmod 4,\\ -1-\left(\frac{-1}{n}\right), & \text{если } a_1,b_1,d\equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{a=2a_1,(a_1,2)=1\\ b=2b_1,(b_1,2)=1\\ c=2^\gamma c_1,(c_1,2)=1\\ \gamma\geqslant 3\\ (d,2)=1\\ (n,2)=1}} \left(1+1/2\cdot C_{1,1,3}(a_1,b_1,d,n)\left(\frac{2}{dn}\right)\right).$$

Если $a_1,b_1,d\equiv 1 \pmod 4$, то имеем множитель

$$\left(1+1/2\cdot(-1+\left(\frac{-1}{n}\right))\left(\frac{2}{dn}\right)\right).$$

Он равен 0 при $n\equiv 3 \pmod 4$ и $\left(\frac{2}{dn}\right)=1$.

Если $a_1,b_1,d\equiv 3 \pmod 4$, то имеем множитель

$$\left(1+1/2\cdot(-1-\left(\frac{-1}{n}\right))\left(\frac{2}{dn}\right)\right),$$

который равен 0 при $n\equiv 1 \pmod 4$ и $\left(\frac{2}{dn}\right)=1$.

Утверждение 1 теоремы 3 доказано.

Если $a_1\equiv 3 \pmod 4$ и $b_1,d\equiv 1 \pmod 4$, то имеем множитель

$$\left(1+1/2\cdot(1+\left(\frac{-1}{n}\right))\left(\frac{2}{dn}\right)\right).$$

Множитель равен 0 при $n\equiv 1 \pmod 4$ и $\left(\frac{2}{dn}\right)=-1$.

Если $a_1, b_1 \equiv 3 \pmod 4$ и $d \equiv 1 \pmod 4$, то имеем множитель

$$\left(1 + 1/2 \cdot (1 - \left(\frac{-1}{n}\right)) \left(\frac{2}{dn}\right)\right),$$

равный 0 при $n \equiv 3 \pmod 4$ и $\left(\frac{2}{dn}\right) = -1$.

Утверждение 2 теоремы 3 доказано.

4.1.4. $\alpha = 1, 3 \leqslant \beta \leqslant \gamma$.

$$\Phi(8) = 2^{-3/2} \left(\frac{2}{d}\right) \cdot \begin{cases} K_{2i}(8, n, 0), & \text{если } a_1, d \equiv 1 \pmod 4, \\ K_2(8, n, 0), & \text{если } a_1 \not\equiv d \pmod 4, \\ -K_{2i}(8, n, 0), & \text{если } a_1, d \equiv 3 \pmod 4 \end{cases} =$$

$$= C_{1,3,3}(a_1, d, n) \left(\frac{2}{dn}\right),$$

где

$$C_{1,3,3}(a_1, d, n) = \begin{cases} \left(\frac{-1}{n}\right), & \text{если } a_1, d \equiv 1 \pmod 4, \\ 1, & \text{если } a_1 \not\equiv d \pmod 4, \\ -\left(\frac{-1}{n}\right), & \text{если } a_1, d \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{a=2a_1, (a_1,2)=1 \\ b=2^\beta b_1, (b_1,2)=1 \\ c=2^\gamma c_1, (c_1,2)=1 \\ 3\leqslant\beta\leqslant\gamma \\ (d,2)=1 \\ (n,2)=1}} \left(1 + C_{1,3,3}(a_1, d, n) \left(\frac{2}{dn}\right)\right).$$

Если $a_1 \equiv d \equiv n \pmod 4$, то множитель равен 0 при $\left(\frac{2}{dn}\right) = -1$. Утверждение 3 теоремы 3 доказано.

Если $a_1 \equiv d \not\equiv n \pmod 4$, то множитель равен 0 при $\left(\frac{2}{dn}\right) = 1$. Утверждение 4 теоремы 3 доказано.

Если $a_1 \not\equiv d \pmod 4$, то множитель равен 0 при $\left(\frac{2}{dn}\right) = -1$. Утверждение 5 теоремы 3 доказано.

4.2. $2 = \alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$.

$$\Phi(4) = 1/2 \cdot \sum_{\substack{l=1 \\ (l,2)=1}}^{4} (1 + i^{dl}) e^{-\frac{2\pi i n l}{4}} = \left(\frac{-1}{dn}\right).$$

$\Phi(8) = 0$.

Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{a=4a_1, (a_1,2)=1 \\ b=2^\beta b_1, (b_1,2)=1 \\ c=2^\gamma c_1, (c_1,2)=1 \\ 2\leqslant\beta\leqslant\gamma \\ (d,2)=1 \\ (n,2)=1}} \left(1 + \left(\frac{-1}{dn}\right)\right).$$

Если $\left(\frac{-1}{dn}\right) = -1$, то скобка равна 0. Утверждение 6 теоремы 3 доказано.

4.3. $3 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$.

$$\Phi(4) = \left(\frac{-1}{dn}\right).$$

$$\Phi(8) = 2^{-3/2}\left(\frac{2}{d}\right)\cdot \sum_{\substack{l=1\\(l,2)=1}}^{8}\left(\frac{2}{l}\right)(1+i^{dl})e^{-\frac{2\pi i n l}{8}} =$$

$$= 2^{-3/2}\cdot\left(\frac{2}{d}\right)\cdot\left(K_2(8,n,0)+\left(\frac{-1}{d}\right)K_{2i}(8,n,0)\right) = \left(\frac{2}{dn}\right)\cdot\left(1+\left(\frac{-1}{dn}\right)\right).$$

Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{a=2^{\alpha}a_1,(a_1,2)=1\\ b=2^{\beta}b_1,(b_1,2)=1\\ c=2^{\gamma}c_1,(c_1,2)=1\\ 3\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma\\ (d,2)=1\\ (n,2)=1}}\left(1+\left(\frac{-1}{dn}\right)+\left(\frac{2}{dn}\right)\cdot\left(1+\left(\frac{-1}{dn}\right)\right)\right) =$$

$$= \prod_{\substack{a=2^{\alpha}a_1,(a_1,2)=1\\ b=2^{\beta}b_1,(b_1,2)=1\\ c=2^{\gamma}c_1,(c_1,2)=1\\ 3\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma\\ (d,2)=1\\ (n,2)=1}}\left(1+\left(\frac{-1}{dn}\right)\right)\left(1+\left(\frac{2}{dn}\right)\right),$$

который равен 0 при $\left(\frac{-1}{dn}\right) = -1$ или $\left(\frac{2}{dn}\right) = -1$. Утверждение 7 теоремы 3 доказано.

4. Заключение

В данной работе рассмотрено представление особого ряда асимптотической формулы задачи Клоостермана в виде произведения по простым числам. Для случая $p = 2$ и $(n, 2) = 1$ доказываются условия на коэффициенты a, b, c, d, при которых уравнение $n = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ не имеет решений в целых числах. Изучение особого ряда при $p = 2$ и четном n представляет интерес для дальнейшего исследования.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лагранж Ж. Л. 1736—1936: Сборник статей к 200–летию со дня рождения. —М. –Л.: Изд. АН СССР, 1937, 220 с.

2. Lejeune Dirichlet P. G. Vorlesungen Über Zahlentheorie. —Braunschweig: F. Vieweg und sohn., 1863, 416 с.

3. Бухштаб А. А. Теория чисел. —М.: Просвещение, 1966, 384 с.

4. Гаусс К. Ф. Труды по теории чисел. —М.: Изд. АН СССР, 1959, 980 с.

5. Dickson L. E. History of the Theory of Numbers. Carnegie Institute of Washington, Washington D.C.. Vol. III. 1923.

6. Alaca A., Alaca S., Lemire M. F. and Williams K. S. Nineteen quaternary quadratic forms // Acta Arith. 2007. Vol. 130. P. 277-310.

7. Alaca A., Alaca S., Lemire M. F. and Williams K. S. Jacobi's identity and representations of integers by certain quaternary quadratic forms // Int. J. Modern Math. 2007. Vol. 2. P. 143-176.

8. Alaca A., Alaca S., Lemire M. F. and Williams K. S. The number of representations of a positive integer by certain quaternary quadratic forms // Int. J. Number Theory. 2009. Vol. 5. P. 13-40.

9. Alaca A. Representations by quaternary quadratic forms whose coefficients are 1, 3 and 9 // Acta Arith. 2009. Vol. 136. P. 151-166.

10. Alaca A. Representations by quaternary quadratic forms whose coefficients are 1, 4, 9 and 36 // J. Number Theory. 2011. Vol. 131. P. 2192-2218.

11. Cooper S. On the number of representations of integers by certain quadratic forms II // J. Combin. Number Theory. 2009. Vol. 1. P. 153-182.

12. Kloosterman H. D. On the representation of numbers in the form $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ // Acta Math. 1926. Vol. 49. P. 407–464.

13. Малышев А. В. О представлении целых чисел положительными квадратичными формами // Тр. МИАН СССР. 1962. Т. 65. С. 3–212.

14. Hua Loo–Keng. Introduction to number theory, Springer, 1982, 572 p.

15. Estermann T. A new application of the Hardy–Littlewood–Kloosterman method // Proc. London Math. Soc. 1962. Vol. 12. P. 425–444.

16. Estermann T. On Kloosterman's sum // Mathematica. 1961. Vol. 8. P. 83–86.

17. Куртова Л. Н., Мотькина Н. Н. О видах решений задачи Лагранжа // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2019. Т. 166. С. 41–48.

18. Куртова Л. Н., Мотькина Н. Н. Рассмотрение особого ряда асимптотической формулы задачи Клоостермана // Алгебра, теория чисел и дискретная математика: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XVIII межд. конф., Тула, 2020. С. 224–225.

REFERENCES

1. Lagrange, J–L 1937, *1736–1936. Sbornik statei k 200-letiyu so dnya rozhdeniya* [1736–1936. Collection of articles for the 200th anniversary of the birth]. Izd. AN SSSR, Moscow, pp. 220.

2. Lejeune Dirichlet, PG 1863, *Vorlesungen Über Zahlentheorie*. F. Vieweg und sohn., Braunschweig, pp. 416.

3. Bukhshtab, AA 1966, *Teoriya chisel* [The theory of numbers], Prosveshchenie, Moscow, pp. 384.

4. Gauss, KF 1959, *Trudy po teorii chisel* [Works on Number Theory], Izd. AN SSSR, Moscow, pp. 980.

5. Dickson, L.E. 1923, *History of the Theory of Numbers*, Vol. III, Carnegie Institute of Washington, Washington D.C.. Reprinted by AMS Chelsea, 1999.

6. Alaca, A. & Alaca, S. & Lemire, M.F. & Williams, K.S. 2007, “Nineteen quaternary quadratic forms“, *Acta Arith.*. vol. 130, pp. 277–310.

7. Alaca, A. & Alaca, S. & Lemire, M.F. & Williams, K.S. 2007, “Jacobi’s identity and representations of integers by certain quaternary quadratic forms“, *Int. J. Modern Math.* vol. 2, pp. 143–176.

8. Alaca, A. & Alaca, S. & Lemire, M.F. & Williams, K.S. 2009, “The number of representations of a positive integer by certain quaternary quadratic forms“, *Int. J. Number Theory.* vol. 5, pp. 13–40.

9. Alaca, A. 2009, “Representations by quaternary quadratic forms whose coefficients are 1, 3 and 9“, *Acta Arith.*. vol. 136, pp. 151–166.

10. Alaca, A. 2011, “Representations by quaternary quadratic forms whose coefficients are 1, 4, 9 and 36“, *J. Number Theory.* vol. 131, pp. 2192–2218.

11. Cooper, S. 2009, “On the number of representations of integers by certain quadratic forms II“, *J. Combin. Number Theory*, vol. 1, pp. 153–182.

12. Kloosterman, H. D. 1926, “On the representation of numbers in the form $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$“, *Acta Math.*, vol. 49, pp. 407–464.

13. Malyshev, A. V. 1962, “On the representation of integers by positive quadratic forms“, *Trudy Mat. Inst. Steklov*, vol. 65, pp. 3–212.

14. Hua, LK 1982, *Introduction to number theory*, Springer, pp. 572.

15. Estermann, T. 1962, “A new application of the Hardy–Littlewood–Kloosterman method“ , *Proc. London Math. Soc.*, vol. 12, pp. 425–444.

16. Estermann, T. 1961, “On Kloosterman’s sum“, *Mathematica*, vol. 8, pp. 83–86.

17. Kurtova, L. N. & Mot’kina, N. N. 2019, “On types of solutions of the Lagrange problem“, *Itogi nauki i tekhn. Ser. Sovr. mat. i ejo pril. Temat. obz.*, vol. 166, pp. 41–48. doi: 10.36535/0233-6723/2019/166/41-48

18. Kurtova, L. N. & Mot’kina, N. N. “Consideration of a singular series of the asymptotic formula of Kloosterman’s problem“, *Algebra, teoriya chisel i diskretnaya matematika: sovremennye problemy, prilozheniya i problemy istorii. Materialy XVIII mezhd. konf.* Tula, 2020, pp. 224–225.

Получено: 19.02.2021
Принято в печать: 14.06.2023