Прикладная математика & Физика, 2024, том 56, № 2. С. 97–113.
Applied Mathematics & Physics, 2024, Volume 56, No 2. P. 97–113.

УДК 517.956 DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-2-97-113
MSC 35L05
Оригинальное исследование

Смешанная задача о вынужденных колебаниях ограниченной струны при нестационарных характеристических косых производных в краевых условиях

Ломовцев Ф. Е., **Точко Т. С.**
(*Статья представлена членом редакционной коллегии И. П. Половинкиным*)

Белорусский государственный университет,
Беларусь, 220030, г. Минск, пр. Независимости, 4
lomovcev@bsu.by, tanja-shlapakova@mail.ru

Аннотация. Приведены явные рекуррентные формулы единственного и устойчивого классического решения характеристической смешанной задачи для неоднородного простейшего уравнения колебаний ограниченной струны. Для любого момента времени в характеристических граничных условиях на концах струны косые производные с зависящими от времени коэффициентами направлены вдоль критических характеристик уравнения. Выведен критерий корректности этой смешанной задачи, т.е. необходимые и достаточные требования гладкости и условия согласования характеристических граничных условий с начальными условиями и уравнением колебаний струны для существования, единственности и устойчивости её классических решений. Вывод условий согласования существенно использует новое понятие критериальных значений суммы старших производных от правой части уравнения. Эти результаты получены известным методом вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны, который не требует явных периодических продолжений данных смешанных задач вне множеств их определения.

Ключевые слова: характеристическая смешанная задача; ограниченная струна, нестационарные граничные условия; характеристические косые производные; классическое решение; критерий корректности

Для цитирования: Ломовцев Ф. Е., Точко Т. С. 2024. Смешанная задача о вынужденных колебаниях ограниченной струны при нестационарных характеристических косых производных в краевых условиях. *Прикладная математика & Физика*, 56(2): 97–113. DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-2-97-113

Original Research

Mixed Problem on Forced Oscillations of a Bounded String Under Nonstationary Characteristic Oblique Derivatives in Boundary Modes

Fedor E. Lomovtsev, **Tatyana S. Tochko**
(*Article submitted by a member of the editorial board I. P. Polovinkin*)

Belarusian State University,
4 Nezavisimosti avenue, Minsk, 220030, Belarus
lomovcev@bsu.by, tanja-shlapakova@mail.ru

Abstract. Explicit recurrent formulas are given for the unique and stable classical solution of the characteristic mixed problem for the inhomogeneous simplest vibration equation of a bounded string. For any moment of time in the characteristic boundary conditions at the ends of the string, the oblique derivatives with time-dependent coefficients are directed along the critical characteristics of the equation. A correctness criterion of this mixed problem is derived, i.e. necessary and sufficient smoothness requirements and matching conditions the characteristic boundary conditions with the initial conditions and the string vibration equation for the existence, uniqueness and stability of its classical solutions. The derivation of matching conditions essentially uses the new concept of criterion values for the sum of the highest derivatives of the right-hand side of the equation. These results were obtained by the well-known method of auxiliary mixed problems for a semi-bounded string, which does not require explicit periodic continuations of the mixed problems data outside their definition sets.

Keywords: Characteristic Mixed Problem, Bounded String, Nonstationary Boundary Conditions; Characteristic First Oblique Derivatives, Classical Solution, Correctness Criterion

For citation: Lomovtsev F. E., Tochko T. S. 2024. Mixed Problem on Forced Oscillations of a Bounded String Under Nonstationary Characteristic Oblique Derivatives in Boundary Modes. *Applied Mathematics & Physics*, 56(2): 97–113. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-2-97-113

---

1. Введение. Критерии корректности смешанных задач для ограниченной струны – это необходимые и достаточные требования гладкости и условия согласования граничных режимов с начальными условиями и волновыми уравнениями. Они дают существование, единственность и устойчивость (непрерывность) их классических решений по правым частям уравнений, граничных режимов и начальных условий в соответствующих банаховых пространствах. Эти банаховы пространства нашей работы указаны в конце доказательства теоремы 3.1. В случае полуограниченной струны каждая смешанная задача для волнового уравнения с нехарактеристической или характеристической косой производной в граничном условии имеет разные классические решения и критерии корректности [1]. Для некоторых и нехарактеристических смешанных задач найдены необходимые и достаточные требования гладкости только на начальные и граничные данные в работах тех авторов, которые не используют метод Ломовцева Ф. Е. корректировки пробных решений в классические решения на первой четверти плоскости. В этих работах правые части волновых уравнений имеют лишь завышенную достаточную гладкость. Отсутствовали необходимые и достаточные требования гладкости даже на начальные и граничные данные для характеристических смешанных задач в связи с их сложностью. В характеристической смешанной задаче для ограниченной струны гладкость решений и, следовательно, входных данных задачи неограниченно увеличивается с ростом времени колебаний [2]. В настоящей работе впервые выведен полный критерий корректности характеристической смешанной задачи для ограниченной струны.

В нашей работе без периодических продолжений (отражений) исходных данных найден критерий корректности (по Адамару) смешанной задачи при нестационарных (зависящих от времени) характеристических косых производных на концах. Их характеристичность означает, что в любой момент времени косые производные на концах струны направлены вдоль критических характеристик уравнения. Этот критерий корректности состоит из необходимых и достаточных требований гладкости и условий согласования на правую часть уравнения, начальные и граничные данные характеристической смешанной задачи, которые гарантируют существование единственного и устойчивого по исходным данным её классического решения. Также без периодических продолжений (отражений) исходных данных нами установлены рекуррентные по промежуточным начальным данным явные формулы классического решения этой характеристической смешанной задачи. Эти результаты получены методом вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны, предложенным Ф. Е. Ломовцевым в [3], из явной формулы решения и критерия корректности по Адамару вспомогательной характеристической смешанной задачи для полуограниченной струны статьи [4]. Для классического (дважды непрерывно дифференцируемого) решения критерий корректности этой характеристической смешанной задачи для полуограниченной струны из статьи [4] был доказан уже в работе [5], где требований гладкости на каждое из исходных данных задачи на одно больше, чем на исходные данные аналогичной нехарактеристической смешанной задачи в диссертации Новикова Е. Н. [6]. В его диссертации для классического решения два условия согласования в случае нехарактеристической косой производной вместо трёх условий согласования в нашем случае характеристической косой производной для каждой из граничных точек струны. Такая же закономерность сохраняется и для решений любой целой гладкости этих двух смешанных задач. В работах [7, 8] были получены минимальные достаточные требования гладкости чётных порядков гладкости решения (в нечётных прямоугольниках) и условия согласования нашей смешанной задачи, используя производные по векторам $v_i = \{a,\ (-1)^{i+1}\}$, $i = 1,\ 2$, от сумм частных производных наибольших порядков от правой части уравнения на концах струны в двух условиях согласования. Известно, что минимальные достаточные требования и условия фактически являются необходимыми требованиями и условиями. В статье [4] критерий корректности характеристической смешанной задачи для нечётных порядков гладкости решения (в чётных прямоугольниках) установлен с помощью нового понятия критериальных значений сумм частных производных наибольших порядков от правой части уравнения на концах струны в двух условиях согласования из [9, 10].

Ранее был изучен частный случай рассмотренной характеристической смешанной задачи для однородного уравнения при однородной стационарной характеристической косой производной на левом конце и однородном граничном режиме первого рода на правом конце струны с помощью кусочно-гладких справа специальных продолжений начальных данных с отрезка $[0, d]$ на отрезки $[-2nd, 2nd]$, $n = 1,\ 2, \ldots$ [2]. В [11] обсуждались необходимые условия корректности по Адамару этого частного случая характеристической смешанной задачи. Получены единственные обобщенные решения четырех смешанных задач для уравнения колебаний струны с граничным условием Бицадзе – Самарского общего вида на правом конце и с неоднородным условием Неймана или Дирихле на левом конце в [12]. Первая смешанная задача для волновых уравнений изучалась в [13] и др. В отечественных и зарубежных работах отсутствуют одновременно явные формулы классических решений и критерии корректности смешанных задач, тем более, с нестационарными граничными режимами. Статьи [14], [15] и др. посвящены использованию метода Фурье для явного решения и вывода достаточных условий корректности некоторых смешанных задач для неоднородных волновых уравнений с потенциалом $q = q(x, t)$ методом Хромова. Его метод состоит в применении метода Фурье, метода резольвент, идеи А. Н. Крылова об ускорении сходимости рядов Фурье и идеи Л. Эйлера о расходящихся рядах. Наша смешанная задача не допускает применения метода Фурье (разделения переменных) из-за нестационарных граничных режимов.

2. Вспомогательная характеристическая смешанная задача. В первой четверти плоскости $\dot{G}_\infty = (0,+\infty) \times (0,+\infty)$ изучена смешанная задача [4]

$$u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = f(x,t),\ a > 0,\ (x,t) \in \dot{G}_\infty, \tag{1}$$

$$u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t(x,t)|_{t=0} = \psi(x),\ x > 0, \tag{2}$$

$$[\alpha(t)u_t(x,t) + \beta(t)u_x(x,t) + \gamma(t)u(x,t)]|_{x=0} = \mu(t),\ t > 0, \tag{3}$$

где коэффициенты α, β, γ–заданные вещественные функции переменной t, исходные данные f, φ, ψ, μ – заданные вещественные функции своих переменных x и t. Частные производные соответствующих порядков от искомой функции u обозначаем нижними индексами по указанным в индексах переменным. В граничном режиме (3) косая производная предполагается характеристической (в любой момент времени t направленной вдоль критической характеристики $x = at$ уравнения (1)), т. е. $a\alpha(t) = \beta(t)$, $\gamma(t) \neq 0$, $t \in R_+ = [0,+\infty)$.

Пусть $C^k(\Omega)$ – множество k раз непрерывно дифференцируемых функций на подмножестве $\Omega \subset R^2$ и $C^0(\Omega) = C(\Omega)$. Найдены гладкие решения $u \in C^m(G_\infty)$, $G_\infty = [0,+\infty)\times[0,+\infty)$, $m \geq 2$, и критерий корректности (необходимые и достаточные условия, налагаемые на исходные данные f, φ, ψ, μ) для однозначной и устойчивой везде разрешимости характеристической смешанной задачи (1)–(3) во множестве гладких решений.

Определение 2.1. *Гладким решением смешанной задачи* (1)–(3) *в* $\dot{G}_\infty$ *называется функция* $u \in C^m(G_\infty)$, $G_\infty = [0,+\infty) \times [0,+\infty)$, $m \geq 2$, *удовлетворяющая уравнению* (1) *на* $\dot{G}_\infty$ *в обычном смысле, а начальным условиям* (2) *и граничному режиму* (3) *в смысле пределов соответствующих выражений от значений* $u(\dot{x},\dot{t})$ *во внутренних точках* $(\dot{x},\dot{t}) \in \dot{G}_\infty$ *при* $\dot{x} \to x$, $\dot{t} \to t$ *ко всем граничным точкам* (x,t) *из* G_∞.

При $m = 2$ оно служит определением классических решений этой задачи (1)–(3).

Определение 2.2. *Характеристика* $x = at$, *где коэффициент* $a > 0$, *называется критической для уравнения* (1) *в первой четверти плоскости* G_∞ *[16].*

Уравнение (1) в плоскости R^2 имеет два различных семейства характеристик

$$x - at = C_1,\ x + at = C_2,\ C_1,\ C_2 \in R,\ R = (-\infty,+\infty). \tag{4}$$

Критическая характеристика $x = at$ делит первую четверть G_∞ на два множества

$$G_- = \{(x,t) \in G_\infty : x > at > 0\},\ G_+ = \{(x,t) \in G_\infty :\ 0 \leq x \leq at\}.$$

Из самой постановки смешанной задачи (1)–(3) для гладких решений $u \in C^m(G_\infty)$ вытекают очевидные необходимые требования гладкости

$$\varphi \in C^m(R_+),\ \psi \in C^{m-1}(R_+),\ f \in C^{m-2}(G_\infty),\ \mu \in C^{m-1}(R_+), \tag{5}$$

где $R_+ = [0,+\infty)$, Ниже мы укажем дополнительные требования гладкости на φ, ψ, f и $\mu \in C^m(R_+)$, которые отсутствуют в [6] для случая нехарактеристической косой производной, а у нас они вызваны характеристичностью косой производной в нашем граничном режиме (3). Полагая $t = 0$ в левой и правой частях граничного режима (3) и в первой производной по t от левой и правой частей граничного режима (3) в силу начальных условий (2) при $x = 0$ и уравнения (1) при $x = 0$, $t = 0$ для второй производной по t соответственно выводим два условия согласования

$$S_0 \equiv \beta(0)[a\varphi'(0) + \psi(0)] + a\gamma(0)\varphi(0) = a\mu(0), \tag{6}$$

$$S_1 \equiv \beta'(0)\,[a\varphi'(0) + \psi(0)] + \beta(0)\left[a^2\varphi''(0) + a\psi'(0) + f(0,0)\right] + a[\gamma'(0)\varphi(0) + \gamma(0)\psi(0)] = a\mu'(0). \tag{7}$$

В лемме 1 из [4], исходя из гладкости коэффициентов β, $\gamma \in C^m(R_+)$, граничного данного $\mu \in C^m(R_+)$, $m \geq 2$, ниже в предположениях теоремы 2.1 и завышенной на «единицу» гладкости функции $u \in C^{m+1}(G_\infty)$, дифференцируем l раз по t левую и правую части равенства (3) при $a\alpha(t) = \beta(t)$, $t \geq 0$, для $l = \overline{0,m}$. В результате этого дифференцирования по формуле Лейбница имеем $m + 1$ равенств

$$\sum_{j=0}^{l} C_l^j \left(\beta^{(l-j)}(t)\left\{\frac{1}{a}\frac{\partial^{j+1}u(x,t)}{\partial t^{j+1}} + \frac{\partial^{j+1}u(x,t)}{\partial t^j \partial x}\right\} + \gamma^{(l-j)}(t)\frac{\partial^j u(x,t)}{\partial t^j}\right)\Bigg|_{x=0} = \mu^{(l)}(t), \tag{8}$$
$$t \geq 0,\ l = \overline{0,m},$$

где биномиальные коэффициенты $C_l^j = l! \ / \ j! \ (l-j)!$ – число сочетаний из l по j элементов. Благодаря начальным условиям (2) и уравнению (1) из равенств (8) аналогичным образом находим дополнительные к (6), (7) следующие условия согласования

$$S_l \equiv \sum_{j=0}^{l} C_l^j \left\{\beta^{(l-j)}(0)\left[aP_j'(0)+P_{j+1}(0)\right]+a\gamma^{(l-j)}(0)P_j(0)\right\} = a\mu^{(l)}(0), \quad l=\overline{2,\ m}, \tag{9}$$

где из [7] функции:

$$\begin{aligned} P_0(x)=\varphi(x), P_q(x) &= \sum_{m=0}^{(q-2)/2} a^{2m}\frac{\partial^{q-2}f(x,t)}{\partial x^{2m}\partial t^{q-2-2m}}\bigg|_{t=0} + a^q\varphi^{(q)}(x), \quad \text{если } q - \text{четное}, q\ge 2, \\ P_1(x)=\psi(x), P_q(x) &= \sum_{m=0}^{(q-3)/2} a^{2m}\frac{\partial^{q-2}f(x,t)}{\partial x^{2m}\partial t^{q-2-2m}}\bigg|_{t=0} + a^{q-1}\psi^{(q-1)}(x), \quad \text{если } q - \text{нечетное}, q\ge 3, \end{aligned} \tag{10}$$

$P_q'(0)$ – значения первой производной по x от функций P_q при $x=0$ и $\beta^{(l-j)}(0), \gamma^{(l-j)}(0), \mu^{(l)}(0)$ – значения соответственно производных по t порядков $l-j$ и l от функций β, γ, μ при $t=0$.

Мы обозначаем количеством штрихов и индексами в круглых скобках над функциями одной переменной соответствующие порядки их или в них обыкновенных производных по этим переменным. В работе [7] сначала для более гладких на «единицу» исходных данных, чем в требованиях (5), условие согласования (9) при $l=m$ преобразовано следующим образом:

$$\begin{aligned} S_m \equiv \sum_{j=0}^{m-1} C_m^j \left\{\beta^{(m-j)}(0)\left[aP_j'(0)+P_{j+1}(0)\right]+a\gamma^{(m-j)}(0)P_j(0)\right\} + \\ +\beta(0)\left[aP_m'(0)+P_{m+1}(0)\right]+a\gamma(0)P_m(0) = a\mu^{(m)}(0), \quad m\ge 2. \end{aligned} \tag{11}$$

Если m – чётное или нечётное, то ввиду (10) функция $\beta(0)\left[aP_m'(x)+P_{m+1}(x)\right]$ соответственно равна

$$\beta(0)\left[\sum_{i=0}^{(m-2)/2} a^{2i+1}\frac{\partial^{m-1}f(x,t)}{\partial x^{2i+1}\partial t^{m-2-2i}}\bigg|_{t=0} + a^{m+1}\varphi^{(m+1)}(x) + \sum_{i=0}^{(m-2)/2} a^{2i}\frac{\partial^{m-1}f(x,t)}{\partial x^{2i}\partial t^{m-1-2i}}\bigg|_{t=0} + a^m\psi^{(m)}(x)\right], m\ge 2, \tag{12}$$

$$\beta(0)\left[\sum_{i=0}^{(m-3)/2} a^{2i+1}\frac{\partial^{m-1}f(x,t)}{\partial x^{2i+1}\partial t^{m-2-2i}}\bigg|_{t=0} + a^{m}\psi^{(m)}(x) + \sum_{i=0}^{(m-1)/2} a^{2i}\frac{\partial^{m-1}f(x,t)}{\partial x^{2i}\partial t^{m-1-2i}}\bigg|_{t=0} + a^{m+1}\varphi^{(m+1)}(x)\right], m\ge 3. \tag{13}$$

Непосредственным сравнением слагаемых убеждаемся в совпадении всех частных производных от f соответственно в суммах (12) и (13) с одной и той же суммой

$$K_m(x) \equiv \beta(0)\sum_{j=0}^{m-1} a^j \frac{\partial^{m-1}f(x,t)}{\partial x^j\partial t^{m-1-j}}\bigg|_{t=0}, \ m\ge 2, \tag{14}$$

для чётных и нечётных $m \ge 2$. Справедливость этих неочевидных равенств вытекает из деления максимально возможного индекса суммирования на 2 в (12) и (13), удвоения в них индекса суммирования i и одинакового количества слагаемых m. Легко заметить, что для более гладких на «единицу» исходных данных φ и ψ, чем в требованиях (5), аналогично сумме (14) в суммах (12) и (13) для чётных и нечётных m также совпадают слагаемые с производными от начальных данных φ и ψ:

$$a^m[a\beta(0)\varphi^{(m+1)}(x) + \ \beta(0)\psi^{(m)}(x)], \ x\ge 0, \ m\ge 2. \tag{15}$$

Напоминаем, что все частные производные от функции f в суммах (12) и (13) равны сумме (14) и также совпадают слагаемые с производными от начальных данных φ и ψ в суммах (12) и (13), равные (15) для чётных и нечётных $m\ge 2$.

В работе [4] с помощью нового понятия критериальных значений суммы частных производных порядка $m-1$ от f из [9], [10] модификацией метода характеристик доказана следующая вспомогательная

Теорема 2.1. [4] *Пусть в граничном режиме* (3) *с характеристической косой производной коэффициенты* $\beta, \gamma \in C^m(R_+)$, $m\ge 2$, $t\in R_+=[0,+\infty)$. *Смешанная задача* (1)–(3) *в* $\dot G_\infty$ *имеет единственное и устойчивое по* φ, ψ, μ, f *гладкое решение* $u\in C^m(G_\infty)$, $m\ge 2$, *тогда и только тогда, когда верны требования гладкости* (5), $\mu\in C^m(R_+)$,

$$F_p(x,t) \equiv \int_0^t f\left(\left|x+(-1)^p a(t-\tau)\right|, \tau\right) d\tau \in C^{m-1}(G_\infty), \ p=1, \ 2, \tag{16}$$

$$\Phi_m(t) \equiv \beta(t)\varphi^{(m)}(at), \quad \Psi_{m-1}(t) \equiv \beta(t)\psi^{(m-1)}(at),$$
$$\mathfrak{F}_{m-1}(t) \equiv \beta(t)\left[\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}\left(\int_0^t f(a(t-\tau),\tau)d\tau\right)\right] \in C^1(R_+) \tag{17}$$

и условия согласования (9) *для* $l = \overline{0,\ m-1}$ *и*

$$S_m \equiv \sum_{j=0}^{m-1} C_m^j\{\beta^{(m-j)}(0)[aP_j'(0) + P_{j+1}(0)] + a\gamma^{(m-j)}(0)P_j(0)\}+$$
$$+K_m(0) + a^m[(\Phi_m)'(0) - \beta'(0)\varphi^{(m)}(0)] + \ a^{m-1}[(\Psi_{m-1})'(0) - \beta'(0)\psi^{(m-1)}(0)]+ \tag{18}$$
$$+a\gamma(0)P_m(0) = a\mu^{(m)}(0),\ m \geq 2,$$

где $K_m(0)$ *– критериальное значение суммы частных производных порядка* $m-1$*. Гладким решением* $u \in C^m(G_\infty)$ *смешанной задачи* (1)–(3) *в* $\dot{G}_\infty$ *является функция*

$$u_-(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds+$$
$$+\frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s,\tau)dsd\tau,\ (x,t) \in G_-, \tag{19}$$

$$u_+(x,t) = \frac{\varphi(x+at) - \varphi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at}\psi(s)ds+$$
$$+\frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(|s|,\tau)dsd\tau + \frac{1}{a\gamma(t-\frac{x}{a})}\left\{a\mu\left(t-\frac{x}{a}\right)-\right.$$
$$\left.-a\beta\left(t-\frac{x}{a}\right)\varphi'(at-x) - \beta\left(t-\frac{x}{a}\right)\psi(at-x) - \beta\left(t-\frac{x}{a}\right)\int_0^{t-\frac{x}{a}} f\left(a(t-\tau)-x,\tau\right)d\tau\right\}- \tag{20}$$
$$-\frac{1}{a}\int_0^{t-\frac{x}{a}}\int_0^{a(t-\tau)-x} f(s,\tau)dsd\tau,\ (x,t) \in G_+.$$

Доказательство. Подробное доказательство теоремы 2.1 приведено в [4]. В доказательстве теоремы 2.1 необходимость условий согласования (9) следует из того, что в лемме 1 из [4] они получены соответствующим дифференцированием l раз по t граничного режима (3) при $a\alpha(t) = \beta(t)$, $t \in R_+$, для $l = \overline{0, m-1}$, вычислением значений этих производных по t при $t = 0$ и применением понятия критериальных значений $K_m(0)$ и требований гладкости (17), т.е. фактически из постановки и определения гладких решений $u \in C^m(G_\infty)$ задачи (1)–(3).

Определение 2.3.[9, 10] *Критериальным значением суммы старших частных производных порядка* $m-1$ *от правой части* f *уравнения* (1) *в условии согласования* (11) *при* $l = m$ *для целых* $m \geq 2$ *называется конечное значение* $K_m(0)$ *функции* (14) *при* $f(x,t) = f_0(x,t)$ *и* $x = 0$ *для пределов*

$$f_0(x,t) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x,t) \in C^{m-2}(G_\infty),\ f_n(x,t) \in C^m(G_\infty),$$

которые сходятся по указанной в доказательстве теоремы 2.1 норме банахова пространства $\hat{C}^{m-2}(G^T)$ *к функциям* $f_0(x,t) \in C^{m-2}(G_\infty)$*, удовлетворяющим требованиям гладкости* $F_p(x,t) \in C^{m-1}(G_\infty)$, $p = 1,\ 2$, *из* (16) *и* $\mathfrak{F}_{m-1}(t) \in C^1(R_+)$ *из* (17) *теоремы 2.1.*

Банахово пространство $\hat{C}^{m-2}(G^T)$ и его норма указаны нами ниже в комментариях доказательства теоремы 2.1 из [4].

В статье [4] достаточность m условий согласования (6), (7), (9) частных производных до порядка $l = \overline{0,\ m-1}$ включительно и условия согласования (18) при $l = m$ для непрерывности решения смешанной задачи (1)–(3) на $x = at$ в G_∞ обеспечивается соответствующей леммой 2. В доказательстве леммы 2 используется эквивалентная запись условий согласований (9) и (18) теоремы 2.1 из [10], основанная на записи сумм частных производных от f одной суммой (14) и от φ, ψ одним выражением (15) для всех $m \geq 2$. В лемме 2 достаточность этих условий согласования для m раз непрерывной дифференцируемости функций (19) в G_- и (20) в G_+ на критической характеристике $x = at$ подтверждается непосредственным вычислением и сравнением частных производных от решений (19), (20) при $x = at$. Из формулы (20) при любом $T > 0$ легко выводится непрерывная зависимость решения u_+ в банаховом пространстве $C^m(G_T^+)$ с нормой

$$\|u\|_{C^m(G_T^+)} = \max_{(x,t)\in G_T^+} \sum_{0\leq i+j\leq m} \left|\partial_x^i\partial_t^j u(x,t)\right|$$

от данных $\varphi,\ \psi,\ \mu,\ f$ в декартовом произведении банаховых пространств $\hat{C}^m[0,X_a]\times\hat{C}^{m-1}[0,X_a]\times C^m[0,T]\times\hat{C}^{m-2}(G^T)$, в которых множества $G_T^+=G^T\bigcap G_+$, $G^T=\left\{(x,t)\in G_\infty: 0\le x+at\le X_a,\ 0\le t\le T\right\}$ и постоянная $X_a=2aT$, с нормами:

$$\|\varphi\|_{\widehat{C}^m[0,X_a]}=\max_{0\le x\le X_a}\sum_{k=0}^{m}\left|\varphi^{(k)}(x)\right|+\max_{0\le t\le T}\left(|(\Phi_m)'(t)|+|\Phi_m(t)|\right),$$
$$\|\psi\|_{\widehat{C}^{m-1}[0,X_a]}=\max_{0\le x\le X_a}\sum_{k=1}^{m-1}\left|\psi^{(k)}(x)\right|+\max_{0\le t\le T}\left(|(\Psi_{m-1})'(t)|+|\Psi_{m-1}(t)|\right),$$
$$\|\mu\|_{C^m[0,T]}=\max_{0\le t\le T}\left(\sum_{k=0}^{m}\left|\mu^{(k)}(x)\right|\right), \tag{21}$$
$$\|f\|_{\hat{C}^{m-2}(G^T)}=\max_{(x,t)\in G^T}\left(\sum_{0\le i+j\le m-2}\left|\partial_x^i\partial_t^j f(x,t)\right|+\sum_{p=0}^{1}\sum_{0\le i+j\le m-1}\left|\partial_x^i\partial_t^j F_p(x,t)\right|\right)+$$
$$+\max_{0\le t\le T}\left(|(\mathfrak{F}_{m-1})'(t)|+|\mathfrak{F}_{m-1}(t)|\right).$$

Аналогично в [4] из формулы (19) при любом $T>0$ выводится непрерывная зависимость (устойчивость по правой части и начальным данным) решения u_- в соответствующем банаховом пространстве $C^m(G_T^-)$ от исходных данных $\varphi,\ \psi,\ f$ в декартовом произведении соответствующих банаховых пространств $C^m(R_+)\times C^{m-1}(R_+)\times\hat{C}^{m-1}(G_T^-)$, где множества $G_T^-=G_T\bigcap G_-$, $G_T=\{(x,t)\in G_\infty: 0\le x<+\infty, 0\le t\le T\}$. В теореме 2.1 все условия согласования (6), (7), (9), (18) выводятся, прежде всего, из граничного режима (3) для решения u_+. Краткое доказательство теоремы 2.1 из [4] завершено.

Замечание 2.1. [4] *При характеристической косой производной в* (3) *не следует выносить общий множитель $\beta(t-x/a)$ за скобки в формуле классического решения* (20) *теоремы 2.1 из-за требований гладкости* (17) *для всех $m\ge 2$. В условиях согласования* (9) *теоремы 2.1 можно выносить общий множитель $\beta(0)$ за скобки только при $l=\overline{0,\ m-1}$, $m\ge 2$. Слагаемые из суммы* (15) *с завышенной на «единицу» гладкостью начальных данных φ и ψ явно отсутствуют в условии согласования* (18)*, так как по предположениям теоремы 2.1 не существуют производные $\varphi^{(m+1)}$ и $\psi^{(m)}$ по x для $m\ge 2$. Доказательство теоремы 2.1 упрощается при коэффициенте $\gamma(t)\equiv 1,\ t\in R_+$. Для этого характеристическое граничное условие* (3) *приводится к соответствующему эквивалентному граничному условию делением его на $\gamma(t)\ne 0,\ t\in R_+$. Но если коэффициент $\beta(t)\ne const\times\gamma(t),\ t\in R_+$, то после деления граничного условия* (3) *на $\gamma(t)\ne 0,\ t\in R_+$, эквивалентное характеристическое граничное условие тоже не допускает разделения переменных x и t при решении соответствующей эквивалентной смешанной задачи методом Фурье. Таким образом, в общем случае характеристическая смешанная задача (1)–(3) как для полуограниченной струны на G_∞, так и для ограниченной струны на $G=[0,d]\times R_+$ явно не решается методом Фурье, т.е. методом периодических продолжений (отражений) по $x\in[0,d]$ начальных данных $\varphi,\ \psi$ и правой части f.*

Аналогично диссертации [6, с. 27, 53–55] и статье [16] доказываются

Следствие 2.1. *Если правая часть f уравнения* (1) *зависит только от x или t и $f\in C^{m-2}(R_+)$ по x или t, то утверждение теоремы 2.1 верно без требований гладкости* (16) *на f.*

В случае зависимости правой части $f\in C^{m-2}(R_+)$ только от x или только от t интегральные требования гладкости (16) на правую часть выполняются и поэтому эти интегральные требования гладкости (16) отсутствуют в формулировке следствия 2.1.

Следствие 2.2. *Теорема 2.1 при $\alpha\equiv\beta\equiv 0$ даёт критерий корректности и формулу единственного и устойчивого гладкого решения $u\in C^m(G_\infty)$, $m\ge 2$, первой смешанной задачи для уравнения* (1) *на G_∞.*

Когда коэффициенты $\alpha\equiv\beta\equiv 0$, $\gamma\ne 0$, тогда в (3) характеристическая косая производная становится граничным режимом первого рода $u(0,t)=\mu(t)/\gamma(t),\ t>0$.

Замечание 2.2. *Можно показать [6], что если правая часть f зависит от x и t, то для смешанной задачи* (1)–(3) *указанная в* (16) *принадлежность интегралов множеству $C^{m-1}(G_\infty)$ от функции $f\in C^{m-2}(G_\infty)$ эквивалентна их принадлежности множествам $C^{(m-1,0)}(G_\infty)$ или $C^{(0,m-1)}(G_\infty)$. Здесь $C^{(m-1,0)}(G_\infty)$ и $C^{(0,m-1)}(G_\infty)$ – соответственно множества непрерывно дифференцируемых $m-1$ раз по x или непрерывных по x и непрерывных по x или непрерывно дифференцируемых $m-1$ раз по t функций на G_∞.*

Замечание 2.3. *В определении 2.3 для всех чётных m критериальные значения равны*

$$K_m(0)\equiv\beta(0)\sum_{j=0}^{m-1}a^j f^{(j,\,m-1-j)}(0,t)\,|_{t=0}=$$
$$=\sqrt{a^2+1}\,\beta(0)\frac{\partial}{\partial\vec{\nu}}\left(\sum_{s=0}^{(m-2)/2}a^{2s}f^{(2s,\,m-2-2s)}(0,0)\right),\ m=2,\ 4,\ 6,\ldots, \tag{22}$$

где символом $\partial\left(\sum\right)/\partial\vec{v}$ из статьи [7] обозначено значение производной по вектору $\vec{v}=\{a,\ 1\}$ при $x=0$ и $t=0$ от указанной в (22) *суммы частных производных порядка $m-2$ от функции $f\in C^{m-2}(G_\infty)$, удовлетворяющей требованиям* (16), (17).

3. Основная характеристическая смешанная задача. Решается уравнение вынужденных колебаний ограниченной струны

$$u_{tt}(x,t)-a^2u_{xx}(x,t)=f(x,t),\ a>0,\ (x,t)\in Q_n=[0,d]\times[0,d_{n+1}],\\ d_n=(n-1)d/(2a), \tag{23}$$

при начальных условиях

$$u(x,t)|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t(x,t)|_{t=0}=\psi(x),\ x\in[0,d],\ d>0, \tag{24}$$

и зависящих от времени t характеристических граничных режимах

$$[\alpha_i(t)u_t(x,t)+\beta_i(t)u_x(x,t)+\gamma_i(t)u(x,t)]|_{x=\hat{d}_i}=\mu_i(t),\ t\in[0,d_{n+1}],\\ i=1,\ 2,\ n=1,\ 2,\ 3,\ldots \tag{25}$$

Здесь коэффициенты α_i, β_i, γ_i – вещественные функции от t, удовлетворяющие условию характеристичности косых производных на концах $\hat{d}_i=(i-1)d$ струны: $a\alpha_i(t)=(-1)^{i+1}\beta_i(t)$, $\gamma_i(t)\neq 0$, $t\in[0,d_{n+1}]$, $i=1,\ 2$, т.е. в (25) для любого момента времени $t\geq 0$ косые производные направлены вдоль своего семейства характеристик из (4) уравнений (1) и (23). Определение гладких и классических решений смешанной задачи (23)–(25) аналогично определению 2.1. Кроме критической характеристики $x=at$ в задаче (23)–(25) появляется еще *критическая характеристика* $x=d-at$ для другой вспомогательной смешанной задачи, которая невырожденной заменой независимых переменных $x=d-\tilde{x}$, $t=\tilde{t}$ сводится к вспомогательной смешанной задаче (1)–(3). Первая частная производная u_t по t в граничных условиях (25) означает приложение динамических сил к концам струны $\hat{d}_i=(i-1)d$, $i=1,\ 2$, т.е. при $x=0$ и $x=d$. В теореме 2.1 указаны явные формулы единственного и устойчивого классического решения и критерий корректности вспомогательной смешанной задачи (1)–(3) на полупрямой. Так же, как в [7], для поиска критерия корректности и явного решения смешанной задачи (23)–(25) с помощью теоремы 2.1 прямоугольники Q_n разбиваются на прямоугольники $G_k=[0,d]\times[d_k,d_{k+1}]$ и делятся характеристиками уравнения (1) на треугольники:

$$\Delta_{3k-2}=\{(x,t)\in G_k:\ x\geq at_k,\ x+at_k\leq d,\ x\in[0,d]\},\\ \Delta_{3k-1}=\{(x,t)\in G_k:\ x\leq at_k,\ x\in[0,d/2]\},\\ \Delta_{3k}=\{(x,t)\in G_k:\ x+at_k\geq d,\ x\in[d/2,d]\},\ t_k=t-d_k,\ d_k=(k-1)d/(2a),\\ k=\overline{1,\ n}.$$

Требуется найти в явном аналитическом виде классические решения $u\in C^2(Q_n)$ характеристической смешанной задачи (23)–(25) и критерий корректности на исходные данные φ, ψ, μ_1, μ_2, f для ее корректности по Адамару: существования, единственности и непрерывной зависимости классического решения от этих исходных данных.

Пусть в характеристических граничных режимах (25) коэффициенты $\beta_i,\gamma_i\in C^{n-k+2}[d_k,d_{k+1}]$, $k=\overline{1,\ n}$. Если в смешанной задаче (23)–(25) исходные данные имеют гладкость

$$\varphi\in C^{n+1}[0,d],\ \psi\in C^n[0,d],\ f\in C^{n-k}(G_k),\\ \mu_i\in C^{n-k+2}[d_k,d_{k+1}],\ k=\overline{1,\ n},\ i=1,\ 2, \tag{26}$$

то для ее решений $u\in C^{n+1}(G_1)$ в характеристических граничных режимах (25) и их частных производных по t до порядка n включительно полагаем $t=0$ и вычисляем значения слагаемых с помощью начальных условий (24) при $x=\hat{d}_i$ и уравнения (23) при $t=0$, $x=\hat{d}_i$, $i=1,\ 2$. В результате имеем следующих $2n+2$ условий согласования

$$\sum_{j=0}^{l}C_l^j\left\{\beta_i^{(l-j)}(0)\left[aP_j{}'(\hat{d}_i)+(-1)^{i+1}P_{j+1}(\hat{d}_i)\right]+a\gamma_i^{(l-j)}(0)P_j(\hat{d}_i)\right\}=\\ =a\mu_i^{(l)}(0),\ l=\overline{0,\ n},\ i=1,\ 2, \tag{27}$$

граничных режимов (25), начальных условий (24) и уравнения (23). Здесь функции

$$P_0(x)=\varphi(x),P_q(x)=\sum_{m=0}^{(q-2)/2}a^{2m}\left.\frac{\partial^{q-2}f(x,t)}{\partial x^{2m}\partial t^{q-2-2m}}\right|_{t=0}+a^q\varphi^{(q)}(x),\quad \text{если } q \text{ – четное, } q\geq 2,$$

$$P_1(x)=\psi(x),P_q(x)=\sum_{m=0}^{(q-3)/2}a^{2m}\left.\frac{\partial^{q-2}f(x,t)}{\partial x^{2m}\partial t^{q-2-2m}}\right|_{t=0}+a^{q-1}\psi^{(q-1)}(x),\quad \text{если } q \text{ – нечетное, } q\geq 3,$$

$P_q{}'(\hat{d}_i)$ – значения первой производной по x от функций P_q при $x = \hat{d}_i$ и $\beta_i^{(l-j)}(0)$, $\gamma_i^{(l-j)}(0)$, $\mu_i^{(l)}(0)$ – значения соответственно производных по t порядков $l - j$ и l от функций β_i, γ_i, μ_i, $i = 1,\ 2$, при $t = 0$.

Ниже в теореме 3.1 мы укажем дополнительные необходимые и достаточные требования гладкости и еще два дополнительных условия согласования на исходные данные $\varphi,\ \psi,\ \mu_1,\ \mu_2,\ f$ для существования единственного и устойчивого классического решения характеристической смешанной задачи (23)–(25) на отрезке $[0, d]$ струны.

Методом вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны из [3] с помощью формулы гладкого решения и критерия корректности по Адамару предыдущей теоремы 2.1 статьи [4] доказывается следующая

Теорема 3.1. *Пусть в характеристических граничных режимах* (25) *коэффициенты*

$$\beta_i,\ \gamma_i \in C^{n-k+2}[d_k, d_{k+1}],\ d_k = (k-1)d/(2a),\ k = \overline{1,\ n},$$
$$a\alpha_i\,(t) = (-1)^{i+1}\beta_i\,(t)\,,\ \gamma_i\,(t) \neq 0,\ t \in [0, d_{n+1}],\ i = 1,\ 2.$$

Характеристическая смешанная задача (23)–(25) *в* Q_n *имеет единственное и устойчивое по* $\varphi,\ \psi,\ \mu_1,\ \mu_2, f$ *классическое решение* $u \in C^2(Q_n)$ *тогда и только тогда, когда выполняются требования гладкости* (26),

$$F_{k,p}(x,t) \equiv \int_{d_k}^{t} f(|d - |d - x - (-1)^p a(t-\tau)||, \tau)d\tau \in C^{n-k+1}(G_k),\ p = 1,\ 2,\ k = \overline{1,\ n}, \tag{28}$$

$$\Phi_{k,i}(t) = \beta_i(t)\varphi''(\hat{d}_i - (-1)^i a t_k),\ \ \Psi_{k-1,i}(t) = \beta_i(t)\psi'(\hat{d}_i - (-1)^i a t_k),$$
$$\mathfrak{F}_{k-1,i}(t) = \beta_i(t)\left(\frac{\partial}{\partial t}\int_{d_k}^{t} f(\hat{d}_i - (-1)^i a(t-\tau), \tau)d\tau\right) \in C^{n-k+1}[d_k, d_{k+1}], \tag{29}$$
$$i = 1,\ 2, \quad k = \overline{1,\ n},$$

условия согласования (27) *и*

$$\sum_{j=0}^{n} C_{n+1}^{j}\left\{\beta_i^{(n-j+1)}(0)\left[aP_j{}'(\hat{d}_i) + (-1)^{i+1}P_{j+1}(\hat{d}_i)\right] + a\gamma_i^{(n-j+1)}(0)P_j(\hat{d}_i)\right\} + K_{n+1}(\hat{d}_i) +$$
$$+a^2\left\{(-1)^{(i+1)n}(\Phi_{1,i})^{(n)}(0) - \sum_{s=0}^{n-1} C_n^s(-1)^{(i+1)(n+s)}a^s\beta_i^{(n-s)}(0)\varphi^{(s+2)}(\hat{d}_i)\right\} +$$
$$+a\left\{(-1)^{(i+1)n}(\Psi_{0,i})^{(n)}(0) - \sum_{s=0}^{n-1} C_n^s(-1)^{(i+1)(n+s)}a^s\beta_i^{(n-s)}(0)\psi^{(s+1)}(\hat{d}_i)\right\} +$$
$$+a\gamma_i(0)P_{n+1}(\hat{d}_i) = a\mu_i{}^{(n+1)}(0),\ \ i = 1,\ 2, \tag{30}$$

где $K_{n+1}(\hat{d}_i)$ *– критериальные значения суммы старших частных производных порядка* n *в условии согласования* (27) *при* $l = n+1$ *от функции* f *соответственно при* $x = 0$ *и* $x = d$, C_n^s *– число сочетаний из* n *элементов по* s *элементов. Классическим решением* $u \in C^2(Q_n)$ *смешанной задачи* (23)–(25) *в* Q_n *является функция*

$$\begin{aligned} u_{3k-2}(x,t) = \frac{\varphi_k(x+at_k) + \varphi_k(x-at_k)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at_k}^{x+at_k}\psi_k(\nu)d\nu + \\ +\frac{1}{2a}\int_{d_k}^{t}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s,\tau)dsd\tau,\ (x,t) \in \Delta_{3k-2}, \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} u_{3k-1}(x,t) = \frac{\varphi_k(x+at_k) - \varphi_k(at_k-x)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{at_k-x}^{x+at_k}\psi_k(\nu)d\nu + \\ +\frac{1}{2a}\int_{d_k}^{t}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(|s|,\tau)dsd\tau + \\ +\frac{1}{a\gamma_1(t-\frac{x}{a})}\left\{a\mu_1\left(t-\frac{x}{a}\right) - a\beta_1\left(t-\frac{x}{a}\right)\varphi_k'(at_k-x) - \beta_1\left(t-\frac{x}{a}\right)\psi_k(at_k-x) - \right. \end{aligned} \tag{32}$$

$$\left. - \beta_1\left(t-\frac{x}{a}\right)\int_{d_k}^{t-\ x/a} f(a(t-\tau)-x,\tau)d\tau\right\} - \frac{1}{a}\int_{d_k}^{t-\ x/a}\int_0^{a(t-\tau)-x} f(s,\tau)dsd\tau,\ (x,t) \in \Delta_{3k-1},$$

$$u_{3k}(x,t) = \frac{\varphi_k(x-at_k) - \varphi_k(2d-x-at_k)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at_k}^{2d-x-at_k}\psi_k(\nu)d\nu +$$

$$+\frac{1}{2a}\int_{d_k}^{t}\int_{d-x-a(t-\tau)}^{d-x+a(t-\tau)} f(d-|s|,\tau)dsd\tau+$$

$$+\frac{1}{a\gamma_2(t-\frac{d-x}{a})}\left\{a\mu_2\left(t-\frac{d-x}{a}\right)-a\beta_2\left(t-\frac{d-x}{a}\right)\varphi_k'(2d-x-at_k)+\right.$$

$$+\beta_2\left(t-\frac{d-x}{a}\right)\psi_k(2d-x-at_k)+$$

$$\left.+\beta_2\left(t-\frac{d-x}{a}\right)\int_{d_k}^{t-\frac{d-x}{a}} f(2d-x-a(t-\tau),\tau)d\tau\right\}- \tag{33}$$

$$-\frac{1}{a}\int_{d_k}^{t-\frac{d-x}{a}}\int_{0}^{a(t-\tau)-d+x} f(d-s,\tau)dsd\tau,\ (x,t)\in\Delta_{3k},\ k=\overline{1,\ n},$$

для всех $n=1,\ 2,\ 3,\ldots$ Здесь u_{3k-s} – сужения решения $u\in C^2(Q_n)$ на треугольники Δ_{3k-s}, $s=0,\ 1,\ 2$, локальное время $t_k=t-d_k$ и рекуррентные промежуточные начальные данные:

$$\varphi_k(x)=u_{3k-5+i}(x,t)|_{t=d_k},\ \psi_k(x)=\partial u_{3k-5+i}(x,t)/dt|_{t=d_k},x\in[(d/2)(i-1),(d/2)i],$$
$$i=1,\ 2,\ k=\overline{2,\ n},\ \varphi_1(x)=\varphi(x),\ \psi_1(x)=\psi(x),\ x\in[0,d]. \tag{34}$$

Доказательство. В условии (29) теоремы 3.1 правильно указана переменная $x=\hat{d}_i-(-1)^i at_k$, $i=1,\ 2$, $k=\overline{1,\ n}$, функций φ и ψ. Действительно, когда переменная $t\in[d_k,d_{k+1}]$, тогда при $i=1$ переменная $x=at_k=a(t-d_k)$, $k=\overline{1,\ n}$, и $x\in[0,d/2]$. Когда переменная $t\in[d_k,d_{k+1}]$, тогда при $i=2$ переменная $x=d-at_k=d-a(t-d_k)$, $k=\overline{1,\ n}$, и $x\in[d/2,d]$. В условиях (30) используется значение производной $dx/dt=(-1)^{i+1}a$, $i=1,\ 2$.

Для более гладкого на «единицу» начального смещения $\varphi\in C^{n+2}[0,d]$, чем в (26), по формуле Лейбница производная порядка n от функции $\Phi_{1,i}(t)$ из (29) равна

$$((-1)^{i+1}a)^n\beta_i(t)\varphi^{(n+2)}(\hat{d}_i-(-1)^i at)=$$
$$=(\Phi_{1,i})^{(n)}(t)-\sum_{s=0}^{n-1}C_n^s\beta_i^{(n-s)}(t)\varphi^{(s+2)}(\hat{d}_i-(-1)^i at)((-1)^{i+1}a)^s,$$
$$(\Phi_{1,i})^{(n)}(t)=[\beta_i(t)\varphi''(\hat{d}_i-(-1)^i at)]^{(n)}=$$
$$=\sum_{s=0}^{n}C_n^s\beta_i^{(n-s)}(t)\varphi^{(s+2)}(\hat{d}_i-(-1)^i at)((-1)^{i+1}a)^s,\ i=1,\ 2.$$

Отсюда выводится представление

$$((-1)^{i+1}a)^n\beta_i(t)\varphi^{(n+2)}(\hat{d}_i-(-1)^i at)=(\Phi_{1,i})^{(n)}(t)-$$
$$-\sum_{s=0}^{n-1}C_n^s\beta_i^{(n-s)}(t)\varphi^{(s+2)}(\hat{d}_i-(-1)^i at)((-1)^{i+1}a)^s,$$

которое при $t=0$ в силу (15) при $m=n+1$ применяется нами в корректной записи условия согласования (30) для $\varphi\in C^{n+1}[0,d]$. С более гладкой на «единицу» начальной скоростью $\psi\in C^{n+1}[0,d]$ аналогичным образом вычисляется представление

$$((-1)^{i+1}a)^n\beta_i(t)\psi^{(n+1)}(\hat{d}_i-(-1)^i at)=$$
$$=(\Psi_{0,i})^{(n)}(t)-\sum_{s=0}^{n-1}C_n^s\beta_i^{(n-s)}(t)\psi^{(s+1)}(\hat{d}_i-(-1)^i at)((-1)^{i+1}a)^s,$$

которое при $t=0$ ввиду (15) имеется в условии (30) для $\psi\in C^n[0,d]$ из (26).

Обоснуем утверждение теоремы 3.1 методом математической индукции.

1. На первом этапе доказательства теоремы 3.1 в G_1 методом математической индукции сначала находим формулы (31) и (32) при $k=1$ единственного классического решения u_1 и u_2 соответственно с необходимыми и достаточными требованиями гладкости (26), (28), (29) при $n=k=1$ и условиями согласования (27), (30) при $n=1$, $i=1$ из теоремы 3.1 путём сужения формул (19) и (20) на треугольники Δ_1 и Δ_2 вместе с необходимыми и достаточными требованиями гладкости (5), (16), (17), $\mu_1,\ \mu_2\in C^2[0,d_2]$ и всеми условиями согласования (9), (18) из теоремы 2.1 при $\alpha=\alpha_1$, $\beta=\beta_1$, $\gamma=\gamma_1$ и $\mu=\mu_1$.

Заметим, что требования гладкости (26), (28), (29) при $n=k=1$, $i=1$ из теоремы 3.1 обеспечивают дважды непрерывную дифференцируемость решения исходной задачи (23)–(25) в замкнутых треугольниках Δ_1 и Δ_2, а условия согласования (27), (30) при $n = 1,\ i = 1$ – на их общей стороне $\Delta_1 \cap \Delta_2$, принадлежащей характеристике $x = at$. В теореме 2.1 эта гладкость и согласованность исходных данных задачи необходима (обязательна). В работе [5] показано, что требование

$$\beta_1(t)\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^t f(a(t-\tau),\tau)d\tau\right) \in C^1[0,d_2] \tag{35}$$

из (29) при $n = k = 1, i = 1$ дает существование конечного следа $\beta_1(0)\ (\partial f(0,0)/\partial v_1)$ произведения функции β_1 на производную по вектору $v_1 = \{a,\ 1\}$ от функции f при $x = 0$ и $t = 0$ в условии согласования (30) при $n = 1, i = 1$ (см. замечание 2.3).

Чтобы еще раз воспользоваться этой теоремой 2.1 в другой вспомогательной смешанной задаче для полуограниченной струны $]-\infty, d]$ при характеристической косой производной в граничном условии при $x = d$ мы уравнение (23), начальные условия (24) и характеристический граничный режим из (25) при $x = d$ невырожденной заменой переменных $x = d - \tilde{x},\ t = \tilde{t}$ сводим к эквивалентной смешанной задаче:

$$\tilde{u}_{tt}(\tilde{x},t) - a^2 u_{\tilde{x}\tilde{x}}(\tilde{x},t) = \tilde{f}(\tilde{x},t),\ (\tilde{x},t) \in \tilde{\Delta}_1 \cup \tilde{\Delta}_2, \tag{36}$$

$$\tilde{u}(\tilde{x},0) = \tilde{\varphi}(\tilde{x}),\ \tilde{u}_t(\tilde{x},t)|_{t=0} = \tilde{\psi}(\tilde{x}),\ \tilde{x} \in [0,d], \tag{37}$$

$$[\alpha_2(t)\tilde{u}_t(\tilde{x},t) - \beta_2(t)\tilde{u}_{\tilde{x}}(\tilde{x},t) + \gamma_2(t)\tilde{u}(\tilde{x},t)]|_{\tilde{x}=0} = \mu_2(t),\ t \in [0,d_2], \tag{38}$$

где $\tilde{u}(\tilde{x},t) = u(d-\tilde{x},t) = u(x,t)$, $\tilde{f}(\tilde{x},t) = f(d-\tilde{x},t) = f(x,t)$, $\tilde{\varphi}(\tilde{x}) = \varphi(d-\tilde{x}) = \varphi(x)$ и $\tilde{\psi}(\tilde{x}) = \psi(d-\tilde{x}) = \psi(x)$. Применяем формулы (19) и (20) из теоремы 2.1 при $f = \tilde{f}$, $\varphi = \tilde{\varphi}$, $\psi = \tilde{\psi}$, $\mu = \mu_2$, $\alpha = \alpha_2$, $\beta = -\beta_2$, $(a\alpha_2 \equiv -\beta_2)$, $\gamma = \gamma_2$ и соответственно в треугольниках $\tilde{\Delta}_1 = \left\{(\tilde{x},t) \in G_1 : \tilde{x} \geq at, \tilde{x} + at \leq d,\ \tilde{x} \in [0,d]\right\}$ и $\tilde{\Delta}_2 = \left\{(\tilde{x},t) \in G_1 : \tilde{x} \leq at,\ \tilde{x} \in [0,d/2]\right\}$ для эквивалентной смешанной задачи (36)–(38) имеем решения:

$$\begin{gathered}\tilde{u}_1(\tilde{x},t) = \frac{\tilde{\varphi}(\tilde{x}+at) + \tilde{\varphi}(\tilde{x}-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{\tilde{x}-at}^{\tilde{x}+at}\tilde{\psi}(\nu)d\nu + \\ +\frac{1}{2a}\int_0^t \int_{\tilde{x}-a(t-\tau)}^{\tilde{x}+a(t-\tau)}\tilde{f}(s,\tau)dsd\tau,\end{gathered} \tag{39}$$

$$\begin{gathered}\tilde{u}_2(\tilde{x},t) = \frac{\tilde{\varphi}(\tilde{x}+at) - \tilde{\varphi}(at-\tilde{x})}{2} + \frac{1}{2a}\int_{at-\tilde{x}}^{\tilde{x}+at}\tilde{\psi}(\nu)d\nu + \\ +\frac{1}{2a}\int_0^t \int_{\tilde{x}-a(t-\tau)}^{\tilde{x}+a(t-\tau)}\tilde{f}(|s|,\tau)dsd\tau + \\ +\frac{1}{a\gamma_2(t-\frac{\tilde{x}}{a})}\left\{a\mu_2\left(t-\frac{\tilde{x}}{a}\right) + a\beta_2\left(t-\frac{\tilde{x}}{a}\right)\tilde{\varphi}'(at-\tilde{x}) + \beta_2\left(t-\frac{\tilde{x}}{a}\right)\tilde{\psi}(at-\tilde{x}) + \right. \\ \left. + \beta_2\left(t-\frac{\tilde{x}}{a}\right)\int_0^{t-\frac{\tilde{x}}{a}}\tilde{f}(a(t-\tau)-\tilde{x},\tau)d\tau\right\} - \frac{1}{a}\int_0^{t-\frac{\tilde{x}}{a}}\int_0^{a(t-\tau)-\tilde{x}}\tilde{f}(s,\tau)dsd\tau.\end{gathered} \tag{40}$$

Согласно требованиям (5), (16), (17) теоремы 2.1 при $m = 2$, т.е. при $n = 1$ в теореме 3.1, так как $m = n+1$, эти решения будут дважды непрерывно дифференцируемыми соответственно в $\tilde{\Delta}_1$ и $\tilde{\Delta}_2$ тогда и только тогда, когда для $\tilde{u}_1$ выполняется гладкость:

$$\begin{gathered}\tilde{\varphi} \in C^2[0,d],\ \tilde{\psi} \in C^1[0,d],\ \tilde{f} \in C(\tilde{\Delta}_1 \cup \tilde{\Delta}_2), \\ \int_0^t \tilde{f}(\tilde{x} + (-1)^p a(t-\tau),\tau)d\tau \in C^1(\tilde{\Delta}_1 \cup \tilde{\Delta}_2),\ p = 1,\ 2,\end{gathered} \tag{41}$$

и для $\tilde{u}_2$ гладкость:

$$\begin{gathered}\tilde{\varphi} \in C^2[0,d],\ \tilde{\psi} \in C^1[0,d],\ \mu_2 \in C^2[0,d_2],\ \tilde{f} \in C(\tilde{\Delta}_{1,2}), \\ \int_0^t \tilde{f}(|\tilde{x} + (-1)^p a(t-\tau)|,\tau)d\tau \in C^1(\tilde{\Delta}_{1,2}),\ p = 1,\ 2,\end{gathered} \tag{42}$$

$$\begin{gathered}\beta_2(t)\tilde{\varphi}''(at),\ \beta_2(t)\tilde{\psi}'(at),\ \beta_2(t)\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^t \tilde{f}(a(t-\tau),\tau)d\tau\right) \in C^1(\tilde{\Delta}_{1,2}), \\ \tilde{\Delta}_{1,2} = \tilde{\Delta}_1 \cup \tilde{\Delta}_2.\end{gathered} \tag{43}$$

В формулах единственного классического решения (39) в $\tilde{\Delta}_1$ и (40) в $\tilde{\Delta}_2$ смешанной задачи (36)–(38) и соответственно требованиях гладкости (41) и (42), (43) делаем обратную замену $\tilde{x} = d - x$, $\tilde{t} = t$, учитываем $\tilde{\varphi}'(\tilde{x}) = -\varphi'(x)$ и приходим к единственному классическому решению u_1 вида (31) при $k = 1$ в Δ_1 и u_3 вида (33) при $k = 1$ в Δ_3 с критериями гладкости (26), (28), (29) при $n = k = 1$, $i = 2$. Условия согласования (9), (18) из теоремы 2.1 для смешанной задачи (36)–(38) после обратной замены $\tilde{x} = d - x$, $\tilde{t} = t$ переходят в условия согласования (27), (30) при $n = 1$, $i = 2$ из теоремы 3.1, которые нужны для дважды непрерывной дифференцируемости решения смешанной задачи (23)–(25) на общей стороне $\Delta_1 \cap \Delta_3$, принадлежащей характеристике $x + at = d$. Таким образом, формулы (31)–(33) при $k = 1$ единственного классического решения $u \in C^2(G_1)$ характеристической смешанной задачи (23)–(25) в G_1 справедливы вместе с критерием гладкости (26), (28), (29) при $n = k = 1$, $i = 1, \ 2$, и согласования (27), (30) при $n = 1$, $i = 1, \ 2$.

В условии согласования (30) при $n = 1$, $i = 2$ конечность произведения $\beta_2(0) f_{\nu_2}(d, 0)$ функции β_2 на производную по вектору $\nu_2 = \{a, \ -1\}$ от функции f при $x = d$ и $t = 0$ следует из требования

$$\beta_2(t) \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^t f(d - a(t - \tau), \tau) d\tau \right) \in C^1[0, d_2] \tag{44}$$

в (29) при $n = k = 1$ и $i = 2$ аналогично случаю $i = 1$ [5] (см. замечание 2.3).

Из формул (31)–(33) при $n = k = 1$ легко выводится непрерывная зависимость классического решения u в банаховом пространстве $C^2(G_1)$ с нормой

$$||u||_{C^2(G_1)} = \max_{(x,t) \in G_1} \sum_{0 \le m+l \le 2} \left| \partial^{m+l} u(x, t) / \partial x^m \partial t^l \right|$$

от соответствующих данных $\varphi, \psi, \mu_1, \mu_2, f$ в декартовом произведении $\hat{C}^2[0, d] \times \hat{C}^1[0, d] \times \hat{C}(G_1) \times C^2[0, d_2]$ соответствующих банаховых пространств с нормами

$$\begin{gathered}
||\varphi||_{\hat{C}^2[0,d]} = \max_{0 \le x \le d} (|\varphi(x)| + |\varphi'(x)| + |\varphi''(x)|) + \max_{0 \le t \le T} \sum_{i=1}^{2} \left\{ \left| (\Phi_{1,i})'(t) \right| + \left| \Phi_{1,i}(t) \right| \right\}, \\
||\psi||_{\hat{C}^1[0,d]} = \max_{0 \le x \le d} (|\psi(x)| + |\psi'(x)|) + \max_{0 \le t \le T} \sum_{i=1}^{2} \left\{ \left| (\Psi_{0,i})'(t) \right| + \left| \Psi_{0,i}(t) \right| \right\}, \\
|\mu||_{C^2[0,d_2]} = \max_{0 \le t \le d_2} (|\mu(t)| + |\mu'(t)| + |\mu''(t)|), \\
||f||_{\hat{C}(G_1)} = \max_{(x,t) \in G_1} \left(|f(x, t)| + \sum_{p=0}^{1} \sum_{m+l=1} \left| \partial^{m+l} F_{1,p}(x, t) / \partial x^m \partial t^l \right| \right) + \max_{0 \le t \le T} \sum_{i=1}^{2} \left\{ \left| (\mathfrak{F}_{0,i})'(t) \right| + \left| \mathfrak{F}_{0,i}(t) \right| \right\}.
\end{gathered} \tag{45}$$

Классическое решение u на G_1 непрерывно в формулах (31) по $\varphi, \ \psi, \ f$, в (32) по $\varphi, \ \psi, \mu_1, \ f$ и в (33) по $\varphi, \ \psi, \mu_2, \ f$ при $n = k = 1$ в нормах (45).

2. По методу математической индукции сначала предполагается справедливость рекуррентных формул (31)–(33) и критерия корректности из требований гладкости (26), (28), (29) и условий согласования (27), (30) для существования единственного и устойчивого классического решения $u \in \hat{C}^2(Q_n)$ смешанной задачи (23)–(25) в Q_n такого, что $u \in C^{n+2-k}(G_k)$, $k = \overline{1, n}$. Затем метод математической индукции требует убедиться в том, что у смешанной задачи (23)–(25) в Q_{n+1} классическое решение $u \in \hat{C}^2(Q_{n+1})$ такое, что $u \in C^{n+3-k}(G_k)$, $k = \overline{1, n+1}$, единственно, устойчиво, выражается формулами (31)–(33) и имеет критерий корректности из требований гладкости (26), (28), (29) и условий согласования (27), (30) при $n + 1$ вместо n.

Смешанная задача (23)–(25) в $G_{n+1} = [0, d] \times [d_{n+1}, d_{n+2}]$ с начальными условиями

$$u|_{t=d_{n+1}} = \varphi_{n+1}(x), \ \ u_t|_{t=d_{n+1}} = \psi_{n+1}(x), \ \ x \in [0, d],$$

заменой переменных $x = \hat{x}$, $t = \hat{t} + d_2$ сводится к эквивалентной смешанной задаче

$$\hat{u}_{tt}(x, \hat{t}) - a^2 \hat{u}_{xx}(x, \hat{t}) = \hat{f}(x, \hat{t}), \ \ (x, \hat{t}) \in \hat{G}_n = [0, d] \times [d_n, d_{n+1}], \tag{46}$$

$$\hat{u}(x, \hat{t})\Big|_{\hat{t}=0} = \varphi_{n+1}(x), \ \ \hat{u}_{\hat{t}}(x, \hat{t})\Big|_{\hat{t}=0} = \psi_{n+1}(x), \ \ x \in [0, d], \ \ d > 0, \tag{47}$$

$$\left[\hat{\alpha}_i(\hat{t}) \hat{u}_{\hat{t}}(x, \hat{t}) + \hat{\beta}_i(\hat{t}) \hat{u}_x(x, \hat{t}) + \hat{\gamma}_i(\hat{t}) \hat{u}(x, \hat{t}) \right]\Big|_{x=\hat{d}_i} = \hat{\mu}_i(\hat{t}), \ \ \tilde{t} \in [d_n, d_{n+1}], \ \ i = 1, \ 2, \tag{48}$$

где функции $\hat{u}(x, \hat{t}) = u(x, \hat{t} + d_2) = u(x, t)$, $\hat{f}(x, \hat{t}) = f(x, \hat{t} + d_2) = f(x, t)$, $\hat{\mu}_i(\hat{t}) = \hat{\mu}_i(\hat{t} + d_2) = \mu_i(t)$, $\hat{\alpha}_i(\hat{t}) = \alpha_i(\hat{t} + d_2) = \alpha_i(t)$, $\hat{\beta}_i(\hat{t}) = \beta_i(\hat{t} + d_2) = \beta_i(t)$, $a\hat{\alpha}_i \equiv (-1)^{i+1} \hat{\beta}_i$, $\hat{\gamma}_i(\hat{t}) = \gamma_i(\hat{t} + d_2) = \gamma_i(t)$, $i = 1, 2$. В силу предположения математической индукции смешанная задача (46)–(48) в $\hat{G}_n$ имеет единственное и устойчивое классическое решение $\hat{u} \in C^2(\hat{G}_n)$, которое выражается формулами (31)–(33) при $k = n$ и начальными данными $\varphi_{n+1}, \psi_{n+1}$ вместо φ_n, ψ_n :

$$\hat{u}_{3n-2}(x,\tilde{t}) = \frac{\varphi_{n+1}(x+a\hat{t}_n) + \varphi_{n+1}(x-a\hat{t}_n)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-a\hat{t}_n}^{x+a\hat{t}_n}\psi_{n+1}(\nu)d\nu +$$
$$+\frac{1}{2a}\int_{d_n}^{\hat{t}}\int_{x-a(\hat{t}-\tau')}^{x+a(\hat{t}-\tau')}\hat{f}(s,\tau')dsd\tau', \tag{49}$$

$$\hat{u}_{3n-1}(x,\tilde{t}) = \frac{\varphi_{n+1}(x+a\hat{t}_n) - \varphi_{n+1}(a\hat{t}_n - x)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{a\hat{t}_n-x}^{x+a\hat{t}_n}\psi_{n+1}(\nu)d\nu +$$
$$+\frac{1}{2a}\int_{d_n}^{\hat{t}}\int_{x-a(\hat{t}-\tau')}^{x+a(\hat{t}-\tau')}\hat{f}(|s|,\tau')dsd\tau' +$$
$$+\frac{1}{a\hat{\gamma}_1(\hat{t}-\frac{x}{a})}\left\{a\hat{\mu}_1\left(\hat{t}-\frac{x}{a}\right) - a\hat{\beta}_1\left(\hat{t}-\frac{x}{a}\right)\varphi'_{n+1}(a\hat{t}_n - x) - \hat{\beta}_1\left(\hat{t}-\frac{x}{a}\right)\psi_{n+1}(a\hat{t}_n - x) - \right. \tag{50}$$
$$\left. -\hat{\beta}_1\left(\hat{t}-\frac{x}{a}\right)\int_{d_n}^{\hat{t}-\frac{x}{a}}\hat{f}(a(\hat{t}-\tau')-x,\tau')d\tau'\right\} - \frac{1}{a}\int_{d_n}^{\hat{t}-\frac{x}{a}}\int_0^{a(\hat{t}-\tau')-x}\hat{f}(s,\tau')dsd\tau',$$
$$\hat{t}_n = \hat{t} - d_n,$$

$$\hat{u}_{3n}(x,\hat{t}) = \frac{\varphi_{n+1}(x-a\hat{t}_n) - \varphi_{n+1}(2d-x-a\hat{t}_n)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-a\hat{t}_n}^{2d-x-a\hat{t}_n}\psi_{n+1}(\nu)d\nu +$$
$$+\frac{1}{2a}\int_{d_n}^{\hat{t}}\int_{d-x-a(\hat{t}-\tau')}^{d-x+a(\hat{t}-\tau')}\hat{f}(d-|s|,\tau')dsd\tau' +$$
$$+\frac{1}{a\tilde{\gamma}_2(\tilde{t}-\frac{d-x}{a})}\left\{a\hat{\mu}_2\left(\hat{t}-\frac{d-x}{a}\right) - a\hat{\beta}_2\left(\hat{t}-\frac{d-x}{a}\right)\varphi'_{n+1}(2d-x-a\hat{t}_n) + \right.$$
$$+\hat{\beta}_2\left(\hat{t}-\frac{d-x}{a}\right)\psi_{n+1}(2d-x-a\hat{t}_n) + \tag{51}$$
$$\left. +\hat{\beta}_2\left(\hat{t}-\frac{d-x}{a}\right)\int_{d_n}^{\hat{t}-\frac{d-x}{a}}\hat{f}(2d-x-a(\hat{t}-\tau'),\tau')d\tau'\right\} -$$
$$-\frac{1}{a}\int_{d_n}^{\hat{t}-\frac{d-x}{a}}\int_0^{a(\hat{t}-\tau')-d+x}\hat{f}(d-s,\tau')dsd\tau'.$$

Формулы (49)–(51) после замен $\hat{t} = t - d_2$ и $\tau = \tau' + d_2$ соответственно становятся формулами (31)–(33) при $k = n+1$ формального решения смешанной задачи (23)–(25) в G_{n+1}. Функции (31)–(33) при $k = n+1$ очевидно являются дважды непрерывно дифференцируемыми на G_{n+1} в силу дважды непрерывной дифференцируемости решения $\hat{u} \in C^2(\hat{G}_n)$ в прямоугольнике $\hat{G}_n$ и гладкости новых начальных данных $\varphi_{n+1}(x) \in C^2[0,d]$, $\psi_{n+1}(x) \in C^1[0,d]$, так как в (34) они выражаются через единственное классическое решение $u \in C^2(Q_n)$ и его первую частную производную по t при $t = d_{n+1}$. По предположению математической индукции записывается соответствующий критерий корректности из теоремы 3.1 для существования единственного и устойчивого классического решения $\hat{u} \in C^2(\hat{G}_n)$ смешанной задачи (46)–(48) на $\hat{G}_n$ в виде требований гладкости при $k = n$:

$$\varphi \in C^{n+1}[0,d],\ \psi \in C^n[0,d],\ \hat{f} \in C(\hat{G}_n),\ \hat{\mu}_i \in C^2[d_n, d_{n+1}],\ i = 1,\ 2, \tag{52}$$

$$F_{n,p}(x,\hat{t}) = \int_{d_n}^{\hat{t}}\hat{f}(|d-|d-x-(-1)^p a(\hat{t}-\tau)||,\tau)d\tau \in C^1(\hat{G}_n),\ p = 1,\ 2, \tag{53}$$

$$\Phi_{n,i}(\hat{t}) = \hat{\beta}_i(\hat{t})\varphi''(\hat{d}_i - (-1)^i a\hat{t}_n),\quad \Psi_{n-1,i}(\hat{t}) = \hat{\beta}_i(t)\psi'(\hat{d}_i - (-1)^i a_n\hat{t}_n),$$
$$\mathfrak{F}_{n-1,i}(\hat{t}) = \hat{\beta}_i(\hat{t})\left(\frac{\partial}{\partial\hat{t}}\int_{d_n}^{\hat{t}}\hat{f}(\hat{d}_i - (-1)^i a(\hat{t}-\tau),\tau)d\tau\right) \in C^1[d_n, d_{n+1}],\quad i = 1,\ 2, \tag{54}$$

и условий согласования (27) и (30) при $n+1$ вместо n

$$\sum_{j=0}^{l} C_l^j\left\{\hat{\beta}_i^{(l-j)}(0)\left[aP_j{}'(\hat{d}_i) + (-1)^{i+1}P_{j+1}(\hat{d}_i)\right] + a\hat{\gamma}_i^{(l-j)}(0)P_j(\hat{d}_i)\right\} = a\hat{\mu}_i^{(l)}(0),\quad l = \overline{0,\ n+1},\quad i = 1, 2, \tag{55}$$

$$\sum_{j=0}^{n+1} C_{n+2}^{j} \left\{ \beta_i^{(n-j+2)}(0) \left[a P_j{}'(\hat{d}_i) + (-1)^{i+1} P_{j+1}(\hat{d}_i) \right] + a\gamma_i^{(n-j+2)}(0) P_j(\hat{d}_i) \right\} + K_{n+2}(\hat{d}_i) +$$
$$+ a^2 \left\{ (-1)^{(i+1)(n+1)} (\Phi_{1,i})^{(n+1)}(0) - \sum_{s=0}^{n} C_{n+1}^{s} (-1)^{(i+1)(n+1+s)} a^s \beta_i^{(n+1-s)}(0) \varphi^{(s+2)}(\hat{d}_i) \right\} +$$
$$+ a \left\{ (-1)^{(i+1)(n+1)} (\Psi_{0,i})^{(n+1)}(0) - \sum_{s=0}^{n} C_{n+1}^{s} (-1)^{(i+1)(n+1+s)} a^s \beta_i^{(n+1-s)}(0) \psi^{(s+1)}(\hat{d}_i) \right\} +$$
$$+ a\gamma_i(0) P_{n+2}(\hat{d}_i) = a\mu_i{}^{(n+2)}(0), \quad i = 1,\ 2, \tag{56}$$

В результате замен $\hat{t} = t - d_2$ и $\tau = \tau' + d_2$ требования гладкости (52)–(54) становятся соответственно требованиями (26), (28), (29) на G_{n+1} при $n+1$ вместо n и $k = n+1$, а условия согласования (55), (56) – условиями согласования (27), (30) на Q_{n+1} при $n+1$ вместо n. Эти требования гладкости (26), (28), (29) обеспечивают гладкость единственного решения $u \in C^{n+3-k}(G_k),\ k = \overline{1, n+1}$, вида (31)–(33) при $k = n+1$ смешанной задачи (23)–(25) в треугольниках $\Delta_{3n+1},\ \Delta_{3k+2},\ \Delta_{3n+3}$. Условия согласования (27), (30) нужны для гладкости этого решения смешанной задачи (23)–(25) на общих сторонах-характеристиках $x = at_{n+1}$, $x + at_{n+1} = d,\ x \in [0, d]$, этих треугольников.

Убедимся в дважды непрерывной дифференцируемости решения задачи (23)–(25) на общей стороне $t = d_{n+1}$ прямоугольников Q_n и G_{n+1}. Согласно построению рекуррентных начальных условий в (34) на их общей стороне $t = d_{n+1}$ верны равенства

$$u_{3n-2}(x,t)|_{t=d_{n+1}} = \varphi_{n+1}(x) = u_{3n-2+i}(x,t)|_{t=d_{n+1}},$$
$$\partial_t u_{3n-2}(x,t)|_{t=d_{n+1}} = \psi_{n+1}(x) = \partial_t u_{3n-2+i}(x,t)|_{t=d_{n+1}}$$

для $x \in [(d/2)(i-1), (d/2)i],\ i = 1,\ 2$. Дифференцируя их соответствующее число раз по x и t и используя уравнение (23), находим следующие значения частных производных:

$$(\partial u_{3n-2}(x,t)/\partial x)|_{t=d_{n+1}} = \varphi'_{n+1}(x) = (\partial u_{3n-2+i}(x,t)/\partial x)|_{t=d_{n+1}},$$
$$\left(\partial^2 u_{3n-2}(x,t)/\partial t \partial x\right)\Big|_{t=d_{n+1}} = \psi'_{n+1}(x) = \left(\partial^2 u_{3n-2+i}(x,t)/\partial t \partial x\right)\Big|_{t=d_{n+1}},$$
$$\left(\partial^2 u_{3n-2}(x,t)/\partial t^2\right)\Big|_{t=d_{n+1}} = f(x, d_{n+1}) + a^2 \varphi''_{n+1}(x) = \left(\partial^2 u_{3n-2+i}(x,t)/\partial t^2\right)\Big|_{t=d_{n+1}},$$
$$\left(\partial^2 u_{3n-2}(x,t)/\partial x^2\right)\Big|_{t=d_{n+1}} = \varphi''_{n+1}(x) = \left(\partial^2 u_{3n-2+i}(x,t)/\partial x^2\right)\Big|_{t=d_{n+1}},$$
$$x \in [(d/2)(i-1), (d/2)i],\ i = 1,\ 2.$$

Они указывают на дважды непрерывную дифференцируемость решений (31)–(33) на общей стороне $t = d_{n+1}$ этих прямоугольников Q_n и G_{n+1}. С помощью формул (31)–(33) нетрудно показать устойчивость классического решения u смешанной задачи (23)–(25) в банаховом пространстве $\hat{C}^2(Q_n)$ с нормой

$$\|u\|_{\hat{C}^2(Q_n)} = \sum_{k=1}^{n} \max_{(x,t)\in Q_k} \sum_{s+l \le n+2-k} \left| \partial^{s+l} u(x,t)/\partial x^s \partial t^l \right| \tag{57}$$

по входным данным $\varphi,\ \psi,\ \mu_1, \mu_2,\ f$ в декартовом произведении $\hat{C}^{n+1}[0,d] \times \hat{C}^n[0,d] \times \times \hat{C}^2[0, d_{n+1}] \times \hat{C}^2(Q_n)$, $n = 1,\ 2,\ 3, \ldots$, банаховых пространств с нормами

$$\|\varphi\|_{\hat{C}^{n+1}[0,d]} = \max_{0\le x\le d} \sum_{s \le n+1} |d^s \varphi(x)/dx^s| + \sum_{i=1}^{2} \sum_{k=1}^{n} \max_{d_k \le t \le d_{k+1}} \sum_{s \le n-k} \left| d^s \Phi_{k,i}(t)/dt^s \right|,$$
$$\|\psi\|_{\hat{C}^{n}[0,d]} = \max_{0\le x\le d} \sum_{s \le n} |d^s \psi(x)/dx^s| + \sum_{i=1}^{2} \sum_{k=1}^{n} \max_{d_k \le t \le d_{k+1}} \sum_{s \le n-k} \left| d^s \Psi_{k-1,i}(t)/dt^s \right|,$$
$$\|\mu\|_{\hat{C}^2[0,d_{n+1}]} = \sum_{k=1}^{n} \max_{d_k \le t \le d_{k+1}} \sum_{l \le n-k+2} \left| d^l \mu(t)/dt^l \right|, \tag{58}$$
$$\|f\|_{\hat{C}^2(Q_n)} = \sum_{k=1}^{n} \max_{(x,t)\in G_k} \left(\sum_{s+l\le n-k} \left| \frac{\partial^{s+l} f(x,t)}{\partial x^s \partial t^l} \right| + \sum_{p=0}^{1} \sum_{s+l \le n-k+1} \left| \frac{\partial^{s+l} F_{k,p}(x,t)}{\partial x^s \partial t^l} \right| \right) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} \max_{d_k \le t \le d_{k+1}} \sum_{i=1}^{2} \sum_{l \le n-k} \left| \frac{d^l \mathfrak{F}_{k-1,i}(t)}{dt^l} \right|.$$

Итак, теорема 3.1 верна при $n+1$ вместо n. Доказательство теоремы 3.1 завершено.

Следствие 3.1. *Если правая часть f уравнения* (23) *удовлетворяет* (26) *и зависит только от x или t, то теорема 3.1 верна без требований гладкости* (28) *на f.*

Если f зависит только от x и $f \in C^{n-1}[0,d]$, т.е. $f \in C^{m-2}[0,d]$, так как $m = n+1$, или только от t и $f \in C^{n-k}[d_k, d_{k+1}]$, $k = \overline{1,n}$, то гладкость (28) из теоремы 3.1 выполняется.

Замечание 3.1. *Можно показать, что если правая часть f уравнения* (23) *зависит от x и t, то для смешанной задачи* (23)–(25) *указанная в интегральных требованиях* (28) *принадлежность интегралов $F_{k,p}(x,t)$ множествам $C^{n-k+1}(G_k)$ от функции f эквивалентна их принадлежности множествам $C^{(n-k+1,0)}(G_k)$ или $C^{(0,n-k+1)}(G_k)$, $k = \overline{1,n}$.*

Это следует из очевидных тождеств [6, с. 51]

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^t f\left(\left|x+(-1)^p a\,(t-\tau)\right|,\tau\right)d\tau\right) = \\ = \frac{(-1)^p}{a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^t f\left(\left|x+(-1)^p a\,(t-\tau)\right|,\tau\right)d\tau\right) - f(x,t)\right],\ p = 1,2,\end{gathered} \tag{59}$$

для интегральных требований (16) теоремы 2.1. Сначала эти тождества выводятся для более гладких функций $f \in C^m(G_\infty)$. Потом они распространяются предельным переходом по f в норме банахова пространства $\hat{C}^{m-2}(G^T)$ из (21) с правых частей $f \in C^m(G_\infty)$ на правые части $f \in C^{m-2}(G_\infty)$, удовлетворяющие условиям гладкости (16) и (17).

Замечание 3.2. *[7] В теореме 3.1 для прямоугольников Q_n с нечётными индексами $n = 1, 3, 5, \ldots$ (соответственно в теореме 2.1 для чётной $m = 2, 4, 6, \ldots$ гладкости решений, так как $m = n+1$) критериальные значения из условий согласования* (30) *равны*

$$K_{n+1}(\hat{d}_i) \equiv \beta(0)\sum_{j=0}^{n} a^j f^{(j,\,n-j)}(\hat{d}_i,t)\,|_{t=0} = \sqrt{a^2+1}\,\beta(0)\frac{\partial}{\partial\vec{v}_i}\left(\sum_{s=0}^{(n-1)/2} a^{2s} f^{(2s,\,n-1-2s)}(\hat{d}_i,0)\right),\ i = 1,\ 2, \tag{60}$$

где символами $\partial(\sum)/\partial\vec{v}_i$ обозначены значения производной по векторам $\vec{v} = \{a,(-1)^{i+1}\}$, $i = 1,\ 2$, от указанной в (60) *суммы частных производных порядка $n-1$ (гладкости $m-2$ в* (22)*) от функции f при $x = 0$, $x = d$ и $t = 0$ (см. требования гладкости* (35), (44) *для $n = 1$, $i = 1,\ 2$).*

Замечание 3.3. *В случае классических решений смешанных задач для уравнения в частных производных начальные условия и граничные режимы естественно понимать не в буквальном смысле, а в смысле непрерывных продолжений соответствующих дифференциальных выражений от классических решений уравнений изнутри области на ее границу (см. определение 2.1). Например, для не характеристической смешанной задачи* (23)–(25) *под начальными условиями* (24) *понимаются пределы: $\lim\limits_{t\to 0+} u(x,t) = \varphi(x)$ по обычной норме банахова пространства $C^2[0,d]$ из* (57) *при $n = 1$ и $\lim\limits_{t\to 0+} u_t(x,t) = \psi(x)$ по обычной норме банахова пространства $C^1[0,d]$, где $u \in C^2(G_1)$, $G_1 = [0,d]\times[0,d_2]$ [5]. Если же они характеристические, то для начальных условий* (24) *эти пределы должны существовать по соответствующим первым двум нормам из* (58). *В характеристическом случае в зависимости от значения $t \in [d_k, d_{k+1}]$ граничный режим* (25) *при $x = 0$ означает существование предела*

$$\lim_{x\to 0+}\left[\beta_1(t)u_t(x,t) + a\beta_1(t)u_x(x,t) + a\gamma_1(t)u(x,t)\right] = a\mu_1(t)$$

по обычной норме банахова пространства $C^{n-k+2}[d_k,d_{k+1}]$, $k = \overline{1,n}$, т.е. по предпоследней норме банахова пространства $\hat{C}^2[0,d_{n+1}]$ из (58).

Следствие 3.2. *Теорема 3.1 при $|\alpha_i(t)| + |\beta_i(t)| \equiv 0$, $\gamma_i(t) \neq 0$, $t \in [0,d_{n+1}]$, $i = 1,\ 2$, даёт критерий корректности и формулу единственного и устойчивого классического решения $u \in C^2(Q_n)$ первой смешанной задачи для уравнения* (23) *на Q_n.*

Действительно, когда в (25) коэффициенты $\alpha_i \equiv \beta_i \equiv 0$ и $\gamma \neq 0$, $t \in [0,d_{n+1}]$, тогда характеристическая смешанная задача (23)–(25) становится первой смешанной задачей на Q_n для ограниченной струны $[0,d]$ при граничных условиях первого рода

$$u(0,t) = \mu_1(t)/\gamma_1(t) = \vartheta_1(t),\ u(d,t) = \mu_2(t)/\gamma_2(t) = \vartheta_2(t),\ t \in [0,d_{n+1}]. \tag{61}$$

В теореме 3.1 каждый раз при последовательном переходе от прямоугольника G_{k+1} к прямоугольнику G_k гладкость (26), (28), (29) исходных данных для решения $u \in C^{n+2-k}(G_k)$, $k = \overline{1,n}$, характеристической смешанной задачи (23)–(25) возрастает на «единицу», начиная с минимальной при $k = n$ на G_n. В первой смешанной задаче без косых производных этот рост гладкости исходных данных $\varphi,\ \psi,\ f,\ \vartheta_1,\ \vartheta_2$ при переходе от прямоугольников G_{k+1} к прямоугольникам G_k исчезает вместе с требованиями гладкости (29), так как коэффициенты $\alpha_1 \equiv \alpha_2 \equiv 0$ и $\beta_1 \equiv \beta_2 \equiv 0$.

Из теоремы 3.1 при $k = n$, $\alpha_1 \equiv \alpha_2 \equiv 0$ и $\beta_1 \equiv \beta_2 \equiv 0$ получаем следующую глобальную теорему корректности первой смешанной задачи для классических решений простейшего уравнения колебаний струны из [6, с. 78–79].

Теорема 3.2. [6] *Первая смешанная задача* (23), (24), (61) *в* Q_n *имеет единственное и устойчивое по* $\varphi, \psi, \vartheta_1, \vartheta_2, f$ *классическое решение* $u \in C^2(Q_n)$ *тогда и только тогда, когда выполняются требования гладкости*

$$\varphi \in C^2[0,d],\ \psi \in C^1[0,d],\ f \in C(Q_n),\ \vartheta_i \in C^2[0,d_{n+1}],\ i = 1,\ 2,$$
$$\int_{d_k}^{t} f(|d-|d-x-(-1)^p a(t-\tau)||,\tau)d\tau \in C^1(G_k),\ p = 1,\ 2,\ k = \overline{1,\ n},$$

и условия согласования

$$\varphi(\hat{d}_i) = \vartheta_i(0), \psi(\hat{d}_i) = \vartheta_i'(0),\ a^2\varphi''(\hat{d}_i) + f(\hat{d}_i, 0) = \vartheta_i''(0),\ i = 1,\ 2.$$

Классическим решением $u \in C^2(Q_n)$ *первой смешанной задачи в* Q_n *является функция*

$$u_{3k-2}(x,t) = \frac{\varphi_k(x+at_k)+\varphi_k(x-at_k)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at_k}^{x+at_k}\psi_k(\nu)d\nu + \frac{1}{2a}\int_{d_k}^{t}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s,\tau)dsd\tau,\ (x,t) \in \Delta_{3k-2},$$

$$u_{3k-1}(x,t) = \frac{\varphi_k(x+at_k)-\varphi_k(at_k-x)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{at_k-x}^{x+at_k}\psi_k(\nu)d\nu + \frac{1}{2a}\int_{d_k}^{t}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(|s|,\tau)dsd\tau + \vartheta_1\left(t-\frac{x}{a}\right) -$$
$$-\frac{1}{a}\int_{d_k}^{t-x/a}\int_{0}^{a(t-\tau)-x} f(s,\tau)dsd\tau,\ (x,t) \in \Delta_{3k-1},$$

$$u_{3k}(x,t) = \frac{\varphi_k(x-at_k)-\varphi_k(2d-x-at_k)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at_k}^{2d-x-at_k}\psi_k(\nu)d\nu + \frac{1}{2a}\int_{d_k}^{t}\int_{d-x-a(t-\tau)}^{d-x+a(t-\tau)} f(d-|s|,\tau)dsd\tau +$$
$$+\vartheta_2\left(t-\frac{d-x}{a}\right) - \frac{1}{a}\int_{d_k}^{t-\frac{d-x}{a}}\int_{0}^{a(t-\tau)-d+x} f(d-s,\tau)dsd\tau,\ (x,t) \in \Delta_{3k},\ k = \overline{1,\ n},\ n = 1,\ 2, \ldots$$

Здесь u_{3k-l} *– сужения решения* $u \in C^2(Q_n)$ *на треугольники* Δ_{3k-l}, $l = 0,\ 1,\ 2$, *локальное время* $t_k = t - d_k$ *и рекуррентные промежуточные начальные данные из* (34).

4. Заключение. В данной работе получен критерий корректности по Адамару характеристической смешанной задачи (23)–(25) на прямоугольниках Q_n, $n = 1, 2, \ldots$, для ограниченной струны $[0, d]$ в виде необходимых и достаточных требований гладкости (26), (28), (29) и условий согласования (27), (30) характеристических граничных условий (25) с начальными условиями (24) и уравнением (23) колебаний струны. Полученный критерий корректности обеспечивает существование, единственность и устойчивость по исходным данным φ, ψ, μ_1, μ_2, f в нормах (57), (58) ее классического решения $u \in C^2(Q_n)$, т. е. дважды непрерывно дифференцируемого на прямоугольниках Q_n, которое более гладкое $u \in C^{n+2-k}(G_k)$ на прямоугольниках G_k, $k = \overline{1,\ n-1}$, благодаря характеристичности граничных режимов. Явные рекуррентные формулы классического решения этой смешанной задачи такие же, как и в предыдущей работе авторов [7]. Вывод условий согласования (30) использует новое понятие критериальных значений суммы производных порядка n от правой части f уравнения на концах струны. Эти результаты установлены методом вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны, который не требует каких-либо явных и также периодических продолжений входных данных смешанных задач.

Список литературы

1. Барановская О.Н., Юрчук Н.И. Смешанная задача для уравнения колебания струны с зависящей от времени косой производной в краевом условии. *Дифференциальные уравнения.* 2009;45(8):1188–1191.

2. Шлапакова Т.С, Юрчук Н.И. Смешанная задача для уравнения колебания ограниченной струны с зависящей от времени производной в краевом условии, направленной по характеристике. *Вестник Белорусского государственного университета. Сер. 1.* 2013;2:84–90.

3. Ломовцев Ф.Е. Метод вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны. *Материалы Международной математической конференции:* "Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям" (7–10 декабря 2015 г.) Минск: Институт математики НАН Беларуси. 2015;2:74–75.

4. Ломовцев Ф.Е., Точко Т.С. Гладкие решения смешанной задачи для простейшего уравнения колебаний полуограниченной струны при характеристической первой косой производной на конце. *Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта.* 2023;3(120):20–36.

5. Ломовцев Ф.Е. Необходимые и достаточные условия вынужденных колебаний полуограниченной струны с первой характеристической косой производной в нестационарном граничном условии. *Весці НАН Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук.* 2016;1:21–27.

6. Новиков Е.Н. Смешанные задачи для уравнения вынужденных колебаний ограниченной струны при нестационарных граничных условиях с первой и второй косыми производными. [диссертация]. Минск: БГУ; 2017. 258 с.
7. Ломовцев Ф.Е., Точко Т.С. Смешанная задача для неоднородного уравнения колебаний ограниченной струны при характеристических нестационарных первых косых производных на концах. *Веснік Гродзенскага дзяржаунага універсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне.* 2019;9(2):56–75.
8. Ломовцев Ф.Е., Точко Т.С. Достаточные условия корректности смешанной задачи для уравнения колебаний ограниченной струны с зависящими от времени характеристическими первыми косыми производными на концах. *Материалы Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям:* "ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–2019" (14–17 мая 2019 г.) Минск: Институт математики НАН Беларуси. 2019;2:27–29.
9. Ломовцев Ф.Е., Точко Т.С. Гладкие решения начально-граничной задачи для уравнения колебаний полуограниченной струны при характеристической первой косой производной. *Материалы Международной конференции:* "Воронежская зимняя математическая школа" (28 января – 2 февраля 2021 г.) Воронеж: Издательский дом ВГУ: 2021;195–198.
10. Точко Т.С., Ломовцев Ф.Е. Гладкие решения смешанной задачи для уравнения колебаний струны при характеристической первой косой производной на полупрямой. *Материалы Международной конференции:* "Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения – XXXIII»" (3–9 мая 2022 г.) Воронеж: Издательский дом ВГУ. 2022;237–239.
11. Точко Т.С., Юрчук Н.И., Ломовцев Ф.Е. О необходимых условиях корректности краевой задачи для уравнения колебания ограниченной струны с зависящими от времени характеристическими первыми косыми производными на концах. *Материалы Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям:* "ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–2019" (15–18 мая 2018 г.) Минск: Институт математики НАН Беларуси. 2018;2:36–38.
12. Mokrousov S. Mixed problems for the string vibration equation with nonlocal conditions of the general form at the right endpoint and with an inhomogeneous condition at the left endpoint. *Differential equations.* 2017;53(4):509–515.
13. Кожанов А.И., Дюжева А.В. Интегральный аналог первой начально-краевой задачи для гиперболических и параболических уравнений второго порядка. *Математические заметки.* 2022;111(4):540–550.
14. Хромов А.П., Корнев В.В. Расходящиеся ряды в методе Фурье для волнового уравнения. *Труды Института математики и механики. УрО РАН.* 2021;27(4):215–238.
15. Ломов И.С. Обобщенная формула Даламбера для телеграфного уравнения в случае существенно несамосопряженного оператора. *Материалы Международной конференции:* "Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения – XXXIII»" (3–9 мая 2020г.) Воронеж: АНО <Наука-Юнипресс>: 2020;124–126.
16. Ломовцев Ф.Е. Метод корректировки пробных решений общего волнового уравнения в первой четверти плоскости для минимальной гладкости его правой части. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2017;3:38–52.

References

1. Baranovskaya ON., Yurchuk NI. A mixed problem for the string vibration equation with time-dependent oblique derivative in a boundary condition. *Differential Equations.* 2009;45(8):1188–1191. (In Russian)
2. Shlapakova TS., Yurchuk NI. Mixed problem for the vibration equation of a bounded string with time-dependent oblique derivative in the boundary condition, directed by characteristics. *Bulletin of the Belarusian State University. Ser. 1.* 2013;2:84–90. (In Russian)
3. Lomovtsev FE. The method of auxiliary mixed problems for a semi-bounded string. *Proceedings of the International mathematical conference:* "Shestye Bogdanovskie chteniya po obyknovennym differentsialnym uravneniyam" (7–10 dekabrya 2015) Minsk: Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus: 2015;74–75. (In Russian)
4. Lomovtsev FE., Tochko TS. Smooth solutions to the mixed problem for the simplest oscillation equation of a semi-bounded string with the characteristic first oblique derivative at the end. *Vesnik Vicebskaga dzjarzhawnaga wniversitjeta.* 2023;3(120):20–36. (In Russian)
5. Lomovtsev FE. Necessary and sufficient conditions for forced vibrations of a semi-bounded string with the first characteristic oblique derivative in the non-stationary boundary condition. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and mathematics series.* 2016;1:21–27. (In Russian)
6. Novikov EN. Mixed problems for the forced oscillation equation of a bounded string under non-stationary boundary conditions with first and second oblique derivatives [dissertation]. Minsk: Belarusian State University. 2017. 258 p. (In Russian)
7. Lomovtsev FE., Tochko TS. Mixed problem for the inhomogeneous oscillation equation of a bounded string for characteristic non-stationary first oblique derivatives at the ends. *Vesnik Grodzenskaga dzjarzhawnaga wniversitjeta imja Janki Kupaly. Seryja 2. Matjematyka. Fizika. Infarmatyka, vylichal'naja tjehnika i kiravanne.* 2019;9(2):56–75. (In Russian)
8. Lomovtsev FE., Tochko TS. Sufficient correctness conditions to a mixed problem for the oscillation equation of a bounded string with time-dependent characteristic first oblique derivatives at the ends. *Proceedings of the International mathematical conference:* "XIX Mezhdunarodnaya nauchnaya konferentsiya po differentsial'nym uravneniyam (Eruginskie chteniya–2019)" (14–17 maya 2019) Minsk: Institute of Mathe- matics, National Academy of Sciences of Belarus: 2019;27–29. (In Russian)

9. Lomovtsev FE., Tochko TS. Smooth solutions to the initial-boundary problem for the vibration equation of a semi-bounded string with the characteristic first oblique derivative. *Proceedings of the International conference:* "Voronezhskaya zimnyaya matematicheskaya shkola" (28 yanvarya – 2 fevralya 2021) Voronezh: Voronezh State University Publishing House: 2021;195–198. (In Russian)
10. Tochko TS., Lomovtsev FE. Smooth solutions to the mixed problem for the string oscillation equation with the characteristic first oblique derivative on the half-line. *Proceedings of the International mathematical conference:* XXXV Voronezhskaya vesennyaya matematicheskaya shkola «Pontryaginskie chteniya – XXXIII» (3-9 maya 2022) Voronezh, State University Publishing House: 2022;237–239. (In Russian)
11. Tochko TS., Yurchuk NI., Lomovtsev FE. On necessary conditions for the correctness of a boundary value problem for the oscillation equation of a bounded string with time-dependent characteristic first oblique derivatives at the ends. *Proceedings of the International mathematical conference:* "XVIII Mezhduna- rodnaya nauchnaya konferentsiya po differentsial'nym uravneniyam (Eruginskie chteniya–2018)" (15–18 maya 2018) Minsk: Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus: 2018;36–38. (In Russian)
12. Mokrousov S. Mixed problems for the string vibration equation with nonlocal conditions of the general form at the right endpoint and with an inhomogeneous condition at the left endpoint. *Differential equations.* 2017;53(4):509–515.
13. Kozhanov AI., Dyuzheva AV. Integral analogue of the first initial-boundary value problem for second-order hyperbolic and parabolic equations. *Mathematical Notes.* 2022;111(4): 562–570. (In Russian)
14. Khromov AP, Kornev VV. Divergent series in Fourier method for the wave equation. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN.* 2021;27(4):215–238. (In Russian) DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-4-215-238.
15. Lomov IS. The generalized d'Alembert formula for the telegraph equation in the case of an essentially non-self-adjoint operator. *Proceedings of the International mathematical conference:* "Voronezhskaya vesennyaya matematicheskaya: Materialy mezhdunarodnoi konferentsii" (3-9 maya 2020) Voronezh: Voronezh State University Publishing House: 2020;124–126. (In Russian)
16. Lomovtsev FE. Correction method of test solutions to the general wave equation in the first quarter of the plane for the minimum smoothness of its right-hand side. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2017;3:38–52. (In Russian)

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 29.01.2024
Поступила после рецензирования 11.03.2024
Принята к публикации 18.03.2024

Received January 29, 2024
Revised March 11, 2024
Accepted March 18, 2024

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Ломовцев Фёдор Егорович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математической кибернетики, Белорусский государственный университет, г. Минск, Беларусь

Точко (Шлапакова) Татьяна Сергеевна – аспирантка кафедры математической кибернетики, Белорусский государственный университет, г. Минск, Беларусь

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Fedor E. Lomovtsev – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Mathematical Cybernetics, Belarusian State University, Minsk, Belarus

Tatyana S. Tochko – Postgraduate Student of the Department of Mathematical Cybernetics, Belarusian State University, Belarusian State University, Minsk, Belarus

К содержанию