ОКЕАНОЛОГИЯ, 1993, том 33, № 3

МОРСКАЯ ГЕОЛОГИЯ

УДК 551.468

К ВОПРОСУ ПОСТРОЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПРОЦЕССА ПЛЯЖЕФОРМИРОВАНИЯ

В. М. Московкин, Ю. Д. Мендыгулов

Ялтинский отдел Сочинского научно-исследовательского центра
Поступила в редакцию 27.09.90 г., после доработки 20.08.92 г.

Детерминированное дифференциальное уравнение баланса пляжеобразующего материала развито (с учетом реальных случайных флуктуаций береговых и волновых процессов) в стохастическое дифференциальное уравнение Ито и в дифференциальное уравнение типа Фоккера–Планка для функции распределения вероятности. Последнее уравнение исследуется в случае стационарного распределения вероятности. Анализируются процессы статистических измерений.

В работах [2 - 4] была предложена математическая модель динамики пляжеобразующего материала, имеющая вид:

$$\dot{W} = aHf(W) - \varphi(W) + u(t), \qquad (1)$$

где W – объем пляжеобразующего материала на единицу длины береговой линии, a – доля ($0 < a < 1$) пляжеобразующего материала в породах клифа (берегового уступа), $f(W)$ – скорость отступания клифа, $H = \text{const}$ – высота клифа, $\varphi(W)$ – интенсивность истирания пляжеобразующего материала, $u(t)$ – интенсивность естественной или искусственной подпитки ($u > 0$) или уноса ($u < 0$) материала.

Функции $f(W)$ и $\varphi(W)$ определяются полуэмпирически с использованием данных натурных измерений. Уравнение (1) было получено на основе балансового феноменологического подхода к динамической системе “клиф–пляж”. Однако эта система, строго говоря, является типично многочастичной системой, из объема частиц которой слагается объем W пляжеобразующего материала (гальки). Поскольку количество гальки $N \gg 1$, постольку задача математического моделирования системы “клиф–пляж” является в строгой постановке задачей статистической физики. С этой точки зрения уравнение (1) следует рассматривать как уравнение термодинамики этой системы. Так мы приходим от феноменологического описания динамики системы “клиф–пляж” к построению статистической теории этой системы подобно тому, как статистический подход Больцмана и Гиббса пришел на смену термодинамической теории идеального газа. Причем в нашем случае роль температуры играет волновая активность, а разрушение клифа и гальки описывается как рождение и уничтожение частиц пляжеобразующего материала.

Однако Гиббсовский подход к такой задаче усложняется необходимостью обосновать применимость к описанию системы ее Гамильтониана и волновой функции, определяющей эффективную температуру системы. Кроме того, в системе “клиф–пляж” существуют флуктуации (неправильность формы гальки, неоднородный гранулометрический состав, флуктуации волновой активности и др.), которые невозможно описать в рамках классической механики Гиббса.

Поэтому строить статистическую теорию системы “клиф–пляж” следует, используя более гибкий, чем механика Гиббса, аппарат статистической физики. Таким аппаратом, разработанным А. Эйнштейном и М. Смолуховским (задача о броуновском движении), являются стохастические дифференциальные уравнения. Мы воспользуемся этим аппаратом, следуя Г. Хакену [5]. Согласно Г. Хакену, применимость стохастических дифференциальных уравнений к конкретной динамической системе определяется отсутствием противоречия полученных результатов здравому смыслу.

Следуя работе [5], заменим уравнение (1) стохастическим дифференциальным уравнением (уравнением Ито):

$$dW = (aHf(W) - \varphi(W) + u(t))dt + g(W)d\rho(t), \qquad (2)$$

где $\rho(t)$ – переменная, описывающая вклад флуктуаций в приращение W, $g(W)$ – функция, описывающая зависимость амплитуды флуктуаций от величины W. В уравнении (2) первый член правой части описывает коллективный вклад описанных выше факторов в приращение dW объема пляжеобразующего материала, а второй – вклад флуктуаций.

Таким образом, величина W становится стохастической переменной и ее можно изучать средствами теории вероятностей [6], в частности ввести вероятность того, что в момент t объем пляжеобразующего материала будет равен W при условии, что в момент t_0 он был равен W_0. Обозначим эту величину $M(W, t|W_0, t_0)$. Она определяет эволюцию W с течением времени. Процессы наблюдения эволюции могут быть двоякого рода.

Во-первых, это наблюдение за системой во времени. В этом случае вычисление средних значений в момент времени t производится по формуле

$$\langle \ldots \rangle \equiv \int_0^{\infty} (\ldots) M(W, t \mid W_0, t_0)\, dW = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} (\ldots)\, d\zeta \quad (3)$$

и представляет собой усреднение наблюдаемых величин по мелкомасштабным (во времени) флуктуациям (с характерным периодом $\tau \ll 1$). Во-вторых, это измерение величины W вдоль береговой линии (в случае постоянных вдоль нее значений параметров уравнения (1)). В этом случае величина x (координата по оси, направленной вдоль берега) представляет собой нумерацию фазовых ансамблей, т.е. совокупностей совершенно одинаковых систем, находящихся в одном макро- (одинаковые параметры в уравнении (2)), но в различных микросостояниях, и усреднение:

$$\langle \ldots \rangle \equiv \int_0^{\infty} (\ldots) M(W, t \mid W_0, t_0)\, dW = \frac{1}{L} \int_1^{1+L} (\ldots)\, dx \quad (4)$$

идет по фазовому пространству (по оси x), т. е. по фазовым ансамблям. Согласно известной эргодической гипотезе [6], оба вида средних ((3) и (4)) совпадают.

В уравнении (2) на $d\rho$ наложены [5] условия:

$$\begin{cases} \langle d\rho(t) \rangle = 0, \\ \langle (d\rho(t))^2 \rangle = dt. \end{cases} \quad (5)$$

Производя статистическое усреднение уравнения (2) и используя условия (5), получим уравнение Ито в следующем [5] виде

$$\frac{d\langle W \rangle}{dt} = aH\langle f(W) \rangle - \langle \varphi(W) \rangle + u(t). \quad (6)$$

Уравнение (6) описывает эволюцию во времени среднего значения объема пляжеобразующего материала. Из уравнения (2) и статистической независимости $d\rho(t)$ и W следует [5] уравнение для $M(W, t \mid W_0, t_0)$:

$$\frac{\partial M(W,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial W}\{[aHf(W) - \varphi(W) + u(t)] \times M(W,t)\} + \frac{\partial^2}{\partial W^2}[g^2(W) M(W,t)], \quad (7)$$

которое является уравнением Фоккера–Планка, связанным со стохастическим уравнением Ито.

Уравнение (7) является основой для решения различного рода задач, возникающих в теории пляжеформирования. Пусть, например, параметры уравнения (1) одинаковы для каждой точки береговой линии и в начальный момент времени объем пляжеобразующего материала на единице длины береговой линии $W(x, t_0) \equiv W_0 = \mathrm{const}$. Тогда, согласно модели (1), в любой момент времени в каждой точке береговой линии будет одинаковое количество пляжеобразующего материала $W(t)$. Согласно же нашему новому подходу, точки береговой линии являются фазовыми ансамблями, которые нумеруются координатой x (ось x направлена вдоль берега). При этом в каждый фиксированный момент времени в разных точках береговой линии объем пляжеобразующего материала $W = W(x, t)$ различен, что обнаруживается в натурных наблюдениях. Величина W может принимать любое значение, но вероятность обнаружить заданное значение W при измерении в некоторой точке береговой линии в момент времени t_0 есть $M(W, t_0)$-функция, являющаяся решением уравнения (7). В натурных наблюдениях эта функция определяется измерением объема пляжеобразующего материала в достаточно большом числе точек береговой линии:

$$M(W, t_0) = \lim_{N \to \infty} (n(W, N, t_0)/N), \quad (8)$$

где $n(W, N, t_0)$ – число точек, в которых (в момент t_0) обнаружен объем пляжеобразующего материала, равный W, N – общее число точек наблюдения.

Решив уравнение (7), мы сможем вычислить среднее значение $\langle W \rangle$ по формуле (4). В натурных наблюдениях $\langle W \rangle$ определяется следующим образом:

$$\langle W \rangle = \left(\sum_{i=1}^{N} n(W_1, N, t)\, W_1 \right) / N. \quad (9)$$

Зависимость $\langle W \rangle$ от времени определяется уравнением (6).

В случае, когда функции $f(W)$ и $\varphi(W)$ линейны, уравнение (6) совпадает с уравнением (1) для среднего значения. Однако для нелинейных функций эти уравнения различны и, следовательно, у нас возникает новая динамическая система, описываемая уравнением (6), которая может, например, иметь неподвижные точки, отличные от неподвижных точек динамической системы (1).

Уравнение (7) является уравнением первого порядка по времени. Поэтому для получения его решения $M(W, t)$ нужно задать распределение вероятности $M(W, t_0)$ в некоторый фиксированный момент времени t_0. В нашем случае, когда в начальный момент времени во всех точках береговой линии имеется одинаковый объем пляжеобразующего материала W_0, начальное распределение вероятности будет иметь вид

$$M(W, t_0) \equiv \delta(W - W_0),$$

где δ – дельта-функция Дирака.

В общем случае мы определяем $M(W, t_0)$ по формуле (8) в результате натурных наблюдений в момент t_0 (методика была изложена ранее). Этого достаточно, чтобы определить $M(W, t)$ в любой момент времени.

Уравнение (7) показывает, как изменяется распределение вероятности во времени. Однако существуют распределения вероятностей (решения уравнения (7)), не зависящие от времени

$M(W, t) \equiv M(W)$. При таком, стационарном, распределении вероятности $\langle W \rangle$ не зависит от времени и является неподвижной точкой динамической системы (6). Это распределение вероятности легко находится из уравнения

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dW^2}\{g^2(W)M(W)\} - \\ -\frac{d}{dW}\{[aHf(W) - \varphi(W) + u_0]M(W)\} = 0, \tag{10}$$

которое получается из уравнения (7) при $\partial M/\partial t = 0$ и $u(t) = \text{const} = u_0$.

Решение уравнения (10) имеет вид:

$$M(W) = \exp\left\{-2\int\frac{1}{g^2(W)}\left(\varphi(W) - aHf(W) + \right.\right. \\ \left.\left. + g(W)\frac{dg(W)}{dW} - u_0\right)dW\right\}\left(C_2 + \int\frac{2C_1}{g^2(W)}\times\right. \\ \times\exp\left\{2\int\frac{1}{g^2(W)}\left(\varphi(W) - aHf(W) + \right.\right. \\ \left.\left.\left. + g(W)\frac{dg(W)}{dW} - u_0\right)dW\right\}dW\right), \tag{11}$$

где C_1 и C_2 – константы интегрирования.

Учитывая, что $M(W)$ как плотность вероятности должна удовлетворять условию нормировки $\int_0^\infty M(W)\,dW = 1$, получаем, что $M(W)$ должна быть интегрируема в интервале $[0, +\infty]$. Следовательно при $W \to +\infty$ $M(W)$ убывает быстрее, чем $1/W$. Из физического смысла функций $f(W)$ и $\varphi(W)$ следуют [2] равенства: $\lim_{W\to\infty} f(W) = 0$, $\lim_{W\to\infty}\varphi(W) = \text{const}$. Используя вышесказанное, упростим решение (11). Получаем, что при $W \to \infty$:

$$M(W) = C_2\exp\left\{-2\int\frac{1}{g^2(W)}\right. \\ \left.(\varphi(W) - aHf(W) + g(W)\frac{dg(W)}{dW} - u_0)\right\} = \\ = \frac{C_2}{g^2(W)}\times\exp\left\{2\int\frac{1}{g^2(W)}(aHf(W) + -\varphi(W) + u_0)\right\}, \tag{12}$$

где C_2 находится из условия нормировки.

Решение (12) позволяет проанализировать поведение системы "клиф–пляж" в случае, когда она находится в состоянии со стационарным распределением вероятности $M(W, t) = M(W)$.

Экстремумы функции (12) удовлетворяют уравнению $dM(W)/dW = 0$, что дает

$$\varphi(W) - aHf(W) + g(W)\frac{dg(W)}{dW} - u_0 = 0. \tag{13}$$

Пусть теперь амплитуду случайных возмущений $g(W)$ можно считать константой, что физически соответствует постоянной по W шрине гауссовского колокола. При этом точки экстремумов будут неподвижными точками уравнения (1).

Подставляя (см. [2]) нелинейные функции: $f(W) = B(W + \varepsilon)/(W + r)^2$ и $\varphi(W) = CW/(\gamma + W)$ в выражение (12), получим плотность вероятности в виде:

$$M(W) = C_2|W + r|^{2aHB/g^2}|W + \gamma|^{2c\gamma/g^2}\times \\ \times\exp\left\{-\frac{2}{g^2}(c - u_0)W - \frac{2aHB(\varepsilon - r)}{g^2(W + r)}\right\}. \tag{14}$$

Условие $\lim_{W\to\infty} M(W) = 0$ приводит к ограничению $c > u_0$.

Экстремумы функции (14) находятся из условия (13) при $g = \text{const}$, что эквивалентно нахождению корней кубического уравнения:

$$bW^3 + KW^2 + EW + F = 0,\ b = c - u_0, \\ K = 2rc - u_0\gamma - 2u_0r - aHB, \\ E = r^2c - aHB\gamma - aHB\varepsilon - r^2u_0 - 2u_0r\gamma, \\ F = -u_0r^2\gamma - aHB\varepsilon\gamma. \tag{15}$$

Таким образом, от количества действительных положительных корней кубического уравнения (15) зависит количество экстремумов функции (14). Анализ параметров реальных береговых систем показывает, что случай наличия двух локальных максимумов функции $M(W)$ (двух устойчивых стационарных точек уравнения (1)) маловероятен (фактически невозможен).

Константа g характеризует стохастические свойства системы "клиф–пляж" и может выбираться для каждой реальной системы на основе натурных наблюдений. От величины g зависит поведение системы "клиф–пляж". Так, при $g = 0$ система описывается уравнением (1) и ее поведение полностью детерминировано. В частности, если система находится в стационарной точке уравнения (1), то она будет находиться в ней сколь угодно долго и при натурных наблюдениях мы всегда будем находить одно и то же количество пляжеобразующего материала $W_{ст}$. Если же $g \neq 0$ и система находится в состоянии со стационарным распределением вероятности, то, обнаружив ее в состоянии $W_{ст}$, мы при последующих наблюдениях будем обнаруживать различные количества пляжеобразующего материала W с вероятностью $M(W)$, определяемой формулой (14). При этом, если $W_{ст}$ – устойчивая стационарная точка уравнения (1), то наиболее часто система будет находиться в точке $W_{ст}$, где отмечается максимум функции $M(W)$. С ростом амплитуды g случайных возмущений этот максимум становится все менее выраженным и в пределе при $g \to \infty$, согласно выражению (14), все положения системы (все значения W) становятся равновероятными.

В общем случае, когда $M(W)$ определяется решением (12) и $dg(W)/dW = 0$, уравнение (13) является уравнением для неподвижных (стационарных) точек уравнения (1). В точке $W_{ст}$ правая часть уравнения (1) допускает представление:

$$-\varphi(W) + aHf(W) + u_0 = \bar{A}(W - W_{ст}) + + o(W - W_{ст}), \quad (16)$$

где o – символ Ландау, $\bar{A} = \text{const}$.

Если $W_{ст}$ – устойчивая стационарная точка, то $\bar{A} < 0$, в противном случае $\bar{A} > 0$, причем

$$\bar{A} = aHf'(W_{ст}) - \varphi'(W_{ст}). \quad (17)$$

Отсюда следует, что если $W_{ст}$ – устойчивая стационарная точка, то в ней достигается максимум функции (12) (при $g = \text{const}$), а если неустойчивая, то минимум этой функции. Таким образом, и в общем случае наиболее вероятно найти систему в устойчивой стационарной точке и наименее вероятно – в неустойчивой.

Итак, мы видим, что в случае $g \neq 0$, когда система "клиф–пляж" находится в состоянии со стационарным распределением вероятности $M(W)$, при натурных наблюдениях в любой момент времени мы будем наиболее часто обнаруживать такое количество пляжеобразующего материала, которое является устойчивой стационарной точкой $W_{ст}$ уравнения (1), и наименее часто – такое количество, которое является неустойчивой стационарной точкой уравнения (1). При этом чем меньше g, тем чаще значения W будут получаться близкими к устойчивой стационарной точке.

Пусть при изменении параметров уравнения (1) система теряет устойчивость в стационарной точке. Рассмотрим частный случай системы (1):

$$\frac{dW}{dt} = aHf(W) - kW, \quad (18)$$

где $f(W)$ – выпуклая вверх функция и $f(0) = 0$. Если $aHf'(0) - k < 0$, то 0 является устойчивой стационарной точкой и других стационарных точек нет. Изменяя параметры a, H и k, можно превратить 0 в неустойчивую стационарную точку при $aHf'(0) - k > 0$. В этом случае прямая $y = kW$ пересекает кривую $y = aHf(W)$ в двух точках и возникает еще одна стационарная точка, которая является устойчивой. Итак, при изменении параметров системы может происходить бифуркация устойчивого узла в неустойчивый и устойчивый узлы.

Пусть теперь мы изменяем те же параметры в стохастической ($g \neq 0$) динамической системе "клиф–пляж", находящейся в состоянии со стационарным распределением вероятности. Можно надеяться, что при адиабатическом изменении параметров система останется в стационарном состоянии, однако экстремумы функции $M(W)$ будут при этом изменяться в соответствии с изменениями параметров. Это приводит к тому, что при изменении управляющих параметров система из окрестности нуля (наиболее вероятного значения W для стохастической системы (18) при $aHf'(0) - k < 0$) переходит в окрестность точки W_0, удовлетворяющей уравнению:

$$aHf(W_0) - kW_0 = 0, W_0 \neq 0. \quad (19)$$

Эта точка будет наиболее вероятным значением координаты W системы при $aHf'(0) - k > 0$.

Если использовать изменение параметров динамической системы "клиф–пляж" для управления ею, то, как видим, система тем меньше поддается управлению, чем больше g.

Итак, мы рассмотрели поведение системы в случае, когда она находится в состоянии со стационарным распределением вероятности.

Чтобы проанализировать поведение стохастической системы "клиф–пляж" в общем случае, нужно решить уравнение (7), что является достаточно сложной задачей, решение которой необходимо для дальнейшего развития теории рассматриваемых стохастических динамических систем.

Следует также попытаться построить микроскопическую теорию процесса пляжеформирования, что необходимо для теоретического вычисления $g(W)$, $f(W)$ и $\varphi(W)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ахиезер А.И., Пелетминский С.В.* Методы статистической физики. М.: Наука, 1977. С. 39, 81, 83, 100.
2. *Есин Н.В., Московкин В.М., Дмитриев В.А.* К теории управления абразионным процессом // Природные основы берегозащиты. М.: Наука, 1987. С. 5 - 17.
3. *Московкин В.М., Есин Н.В.* Оптимальное управление абразионным процессом // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284. № 3. С. 731 - 734.
4. *Московкин В.М., Есин Н.В., Ковтун Е.А.* Исследование устойчивости морских берегов методами теории катастроф // Океанология. 1989. Т. 29. № 1. С. 108 - 111.
5. *Хакен Г.* Синергетика. М.: Мир, 1985. С. 178 - 184.
6. *Ширяев А.Н.* Вероятность. М.: Наука, 1980. С. 68, 393 - 401.