

УДК 330.115

А.В. Журавка

В.М. Московкин

Моделирование потоков рабочей силы на общем рынке труда двух территориальных образований

В работе [1] была предложена модель динамики потока рабочей силы для отдельной отрасли экономики в виде

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = N_2(t)W_2(t) - N_1(t)W_1(t), \quad (1)$$

где $N_1(t)$ - общее число работников, занятых в отрасли на момент времени t , $N_2(t)$ - число потенциальных работников, которые могут быть привлечены для работы в рассматриваемой отрасли и которые на данный момент являются безработными, $N_1(t) + N_2(t) = N = const$ - ем-

кость рынка рабочей силы, $W_1(t)$ - вероятность перехода безработного в статус занятого за единичный интервал времени, $W_2(t)$ - вероятность обратного перехода из статуса безработного в статус занятого за этот же интервал времени, единичный интервал времени равен одному году.

Предполагается, что в отрасли имеются возможности для предоставления рабочих мест всем потенциальным работникам, то есть в идеальном случае $N_1(t) = N$. Поэтому переменная $N_1(t)$ определяет степень «загруженности» отрасли, а $N_2(t)$ - количество свободных рабочих мест [1].

Уравнение (1) является обычным уравнением баланса, которое позволяет находить равновесные состояния на рынке труда (равновесные состояния уровней занятости). В работе [1], в линейном приближении, были предложены следующие гипотезы относительно вероятностных функций W_1 и W_2 :

$$W_1(t) = k_1 N_2(t) = k_1(N - N_1(t)); \quad W_2(t) = k_2 N_1(t) + k_3 N_2(t) = k_2 N_1(t) + k_3(N - N_1(t)) \dots \dots (2)$$

в результате чего было получено нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, которое было детально изучено в выше указанной работе.

Представим теперь, что для рассматриваемой отрасли экономики имеются два региональных рынка труда, которые могут обмениваться рабочей силой, тогда можно записать следующую систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dN_1(t)}{dt} = N_2(t)W_1(t) - N_1(t)W_2(t) + M_2(t)\tilde{U}_1(t) \\ \frac{dM_1(t)}{dt} = M_2(t)U_1(t) - M_1(t)U_2(t) + N_2(t)\tilde{W}_1(t) \end{cases}, \quad (3)$$

где $M_1(t)$ и $U_1(t)$ имеют тот же смысл, что и функции $N_1(t)$ и $W_1(t)$ для первого рынка труда, $\tilde{U}_1(t)$ - вероятность перехода безработного на втором рынке труда в статус занятого на первом рынке труда, $\tilde{W}_1(t)$ - вероятность перехода безработного на первом рынке труда в статус занятого на втором рынке труда.

По аналогии с выражениями (2) введем следующие вероятностные функции:

$$\begin{cases} W_1(t) = k_1(N - N_1(t)), & W_2(t) = k_2 N_1(t) + k_3(N - N_1(t)), \\ \tilde{U}_1(t) = k_2(N - N_1(t)), & U_1(t) = \bar{k}_1(M - M_1(t)), \\ U_2(t) = \bar{k}_2 M_1(t) + \bar{k}_3(M - M_1(t)), & \tilde{W}_1(t) = \bar{k}_4(M - M_1(t)). \end{cases} \quad (4)$$

Вводя относительные (безразмерные) переменные $x = \frac{N - N_1}{N} > 0$, $y = \frac{M - M_1}{M} > 0$, на основе системы уравнений (3) и выражений (4), приходим к следующей динамической системе второго порядка

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = N(k_2 - k_1 - k_3)x^2 + N(k_1 - 2k_2)x + Nk_2 - k_4 Mxy \\ \frac{dy}{dt} = M(\bar{k}_2 - \bar{k}_1 - \bar{k}_3)y^2 + M(\bar{k}_1 - 2\bar{k}_2)x + M\bar{k}_2 - \bar{k}_4 Nxy \end{cases} \quad (5)$$

Таким образом, мы пришли к модели конкурентных взаимодействий занятого населения на двух рынках труда. Рассмотрим стандартный вид такой модели при $k_2 = \bar{k}_2 = 0$, когда ее квадратичные члены имеют такой же вид, как и в уравнении Верхульста: $\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta x^2$; $\alpha, \beta > 0$.

В этом случае первые три особые (стационарные) точки динамической системы (5) имеют следующие координаты:

1. (0,0); 2. $(0, \frac{\bar{k}_3}{\bar{k}_1 + \bar{k}_3})$; 3. $(\frac{k_3}{k_1 + k_3}, 0)$. Координаты четвертой ненулевой особой точки получим в виде

$$x_* = \frac{k_3(\bar{k}_1 + \bar{k}_3) - k_4 \bar{k}_3 \cdot \frac{M}{N}}{(k_1 + k_3)(\bar{k}_1 + \bar{k}_3) - k_4 \bar{k}_4}, \quad y_* = \frac{\bar{k}_3(k_1 + k_3) - k_4 \bar{k}_2 \cdot \frac{N}{M}}{(k_1 + k_3)(k_1 + k_3) - \bar{k}_4 k_4} \quad (6)$$

В частном случае, когда $M = N$, $k_1 = \bar{k}_1$, получим

$$x_* = y_* = \frac{k_3(k_1 + k_3) - k_4 k_4}{(k_1 + k_3)^2 - k_4^2} = \frac{k_3}{k_1 + k_3 + k_4} < 1. \quad (7)$$

В этом случае динамическая система (5) примет вид

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Nx [k_3 - (k_1 + k_3)x - k_4 y] \\ \frac{dy}{dt} = Ny [k_3 - (k_1 + k_3)y - k_4 x] \end{cases} \quad (8)$$

со следующими особыми точками:

1. (0,0); 2. $(0, \frac{k_3}{k_1 + k_3})$; 3. $(\frac{k_3}{k_1 + k_3}, 0)$; 4. $(\frac{k_3}{k_1 + k_3 + k_4}, \frac{k_3}{k_1 + k_3 + k_4})$.

Характер устойчивости второй, третьей и четвертой особых точек существенно зависит от знака выражения $k_1 + k_3 - k_4$. Независимо от знака этого выражения нулевая особая точка является неустойчивым узлом. Характеристическое уравнение $|A - \lambda I| = 0$, где A - матрица линеаризованной системы (8), I - единичная матрица, для второй особой точки имеет вид

$$\left[N(k_3 - \frac{k_3 k_4}{k_1 + k_3}) - \lambda \right] (-Nk_3 - \lambda) = 0, \quad (9)$$

откуда $\lambda_1 = \frac{Nk_3(k_1 + k_3 - k_4)}{k_1 + k_3}$, $\lambda_2 = -Nk_3 < 0$.

При $k_1 + k_3 - k_4 > 0$ приходим к седловой особой точке, а при $k_1 + k_3 - k_4 < 0$ - к устойчивому узлу.

Аналогичная ситуация имеет место и для третьей особой точки.

Для четвертой особой точки характеристическое уравнение

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -N(k_1 + k_3)x - \lambda & -Nk_4x \\ -Nk_4x & -N(k_1 + k_3)x - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

приводит к следующим собственным числам:

$$\lambda_1 = -N(k_1 + k_3 + k_4)x < 0, \quad \lambda_2 = N(k_4 - k_1 - k_3)x.$$

При $k_1 + k_3 - k_4 > 0$ имеем $\lambda_2 < 0$ и приходим к устойчивому узлу, а при $k_1 + k_3 - k_4 < 0$ - к седловой точке.

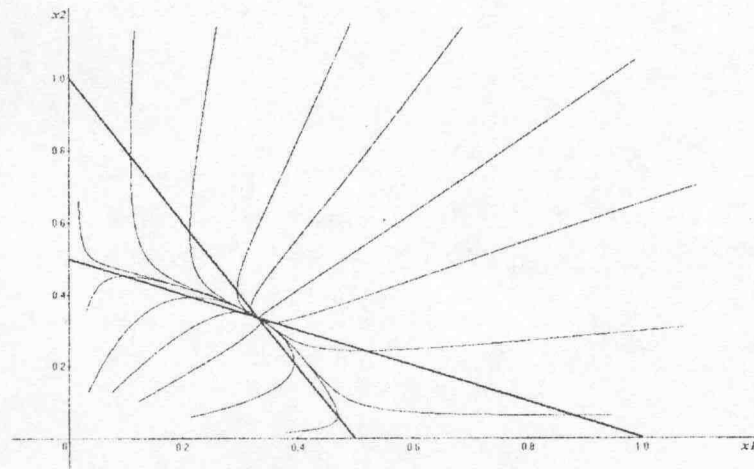


Рисунок 1. Фазовый портрет динамической системы (8) при $k_1 + k_3 - k_4 > 0$,
 $N = 10^6$, $k_1 = k_2 = k_4 = 10^{-8}$, $x_1 = x$, $x_2 = y$

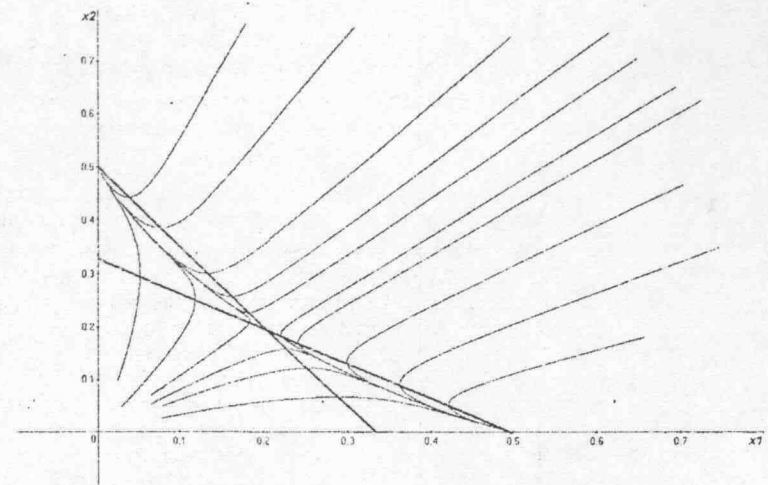


Рисунок 2. Фазовый портрет динамической системы (8) при $k_1 + k_3 - k_4 < 0$,

$$N = 10^6, k_1 = \frac{1}{3} \cdot 10^{-8}, k_3 = \frac{1}{3} \cdot 10^{-8}, k_4 = 10^{-8}, x_1 = x, x_2 = y$$

Численные фазовые портреты для обоих случаев приведены на рисунках 1 и 2.

Модель (8) соответствует модели конкурентных взаимодействий на общем рынке труда двух стран, предложенной в работе [2], а моделирование потоков рабочей силы и нетрудоспособного населения в рамках линейной динамической системы третьего порядка приведено в работе [4].

В заключении отметим, что детальный математический анализ двумерных моделей конкурентных взаимодействий типа (8) проделан нами в работе [3].

Литература:

- 1 Васильев А.Н. Модель самоорганизации рынка труда // Экономика и математические методы. - М., 2001. - т.37, №2. - С.123-127.
- 2 Журавка А.В., Московкин В.М., Шевченко Л.П. Математическое моделирование конкурентных взаимодействий на общих рынках труда и капитала // Экономическая кибернетика, Донецк - 2001. - №5-6. - С
- 3 Журавка А.В., Московкин В.М., Брук В.В. Двумерная модель конкурентных взаимодействий в экономике: теория и численные эксперименты // Автоматические системы управления и приборы автоматки. - Харьков, 2001. - №115. - С.98-103
- 4 Московкин В.М., Кузьменко О. Моделирование потоков рабочей силы на рынке труда // Бизнес информ. - Харьков, 2000. - №7-8. - С.14-16.

Поступила в редакцию 08.04.2002 г.