Прикладная математика & Физика, 2024, том 56, № 1. С. 21–26.
Applied Mathematics & Physics, 2024, Volume 56, No 1. P. 21–26.

УДК 514.76
MSC 53C12
Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-1-21-26

О слоениях на распределениях субфинслеровых многообразий контактного типа

Букушева А. В.
(*Статья представлена членом редакционной коллегии С. М. Ситником*)

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского,
Россия, 410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
bukushevaav@sgu.ru

Аннотация. Вводится понятие субфинслерова многообразия контактного типа. На распределении субфинслерова многообразия как на тотальном пространстве векторного расслоения определяется продолженная субриманова структура контактного типа с метрикой Сасаки. Изучаются связи между геометрией слоений, естественным образом возникающих на распределениях субфинслеровых многообразий, и геометрией субфинслеровых многообразий контактного типа. В частности, доказывается, что вертикальное слоение на распределении субфинслерова многообразия является вполне геодезическим тогда и только тогда, когда указанное многообразие является многообразием Ландсберга с проектируемой субфинслеровой структурой.

Ключевые слова: субфинслерово многообразие контактного типа, слоения на распределениях субфинслеровых многообразий, продолженная субриманова структура контактного типа

Для цитирования: Букушева А. В. 2024. О слоениях на распределениях субфинслеровых многообразий контактного типа. *Прикладная математика & Физика*, 56(1): 21–26.
DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-1-21-26

Original Research

About Foliations on Distributions of Sub-Finsler Manifolds of Contact Type

Aliya V. Bukusheva
(*Article submitted by a member of the editorial board C. M. Sitnik*)

Saratov State University,
83 Astrakhanskaya st., Saratov, 410012, Russia
bukushevaav@sgu.ru

Abstract. A sub-Finsler structure of contact type is defined on a smooth manifold with a distribution of codimension 1 given on it and is reduced to specifying a smooth function on this distribution that repeats the standard properties of the fundamental function of a Finsler manifold. For the convenience of studying the sub-Finsler structure, the definition of a (structural) vector field that does not vanish anywhere and is transversal to the distribution is postulated. On a manifold with a sub-Finsler structure – on a sub-Finsler manifold – the parallel transport of vectors belonging to the distribution along curves tangent to the distribution is determined. The connection that ensures this parallel transfer is called internal connectivity in this work. Using the internal connection and the structure vector field, a contact-type sub-Riemannian structure with a Sasaki-type metric is defined on the distribution of a sub-Finsler manifold as on the total space of a vector bundle. The connections between the geometry of foliations that naturally arise on the distributions of sub-Finsler manifolds and the geometry of sub-Finsler manifolds of contact type are studied. In particular, we prove that a vertical foliation on the distribution of a sub-Finsler manifold is completely geodesic if and only if the specified manifold is a Landsberg manifold with a projectable sub-Finsler structure.

Keywords: Sub-Finsler Manifold of Contact Type, Foliations on Distributions of Sub-Finsler Manifolds, Extended Sub-Riemannian Structure of Contact Type

For citation: Bukusheva A. V. 2024. About Foliations on Distributions of Sub-Finsler Manifolds of Contact Type. *Applied Mathematics & Physics*, 56(1): 21–26. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-1-21-26

---

1. Введение. Как показало знакомство с известными исследованиями субфинслеровых многообразий, определяющей мотивацией к развитию новой области дифференциальной геометрии является ее использование в неголономной механике и теории оптимального управления [1, 2, 3]. В предлагаемой статье мы так определяем субфинслерову структуру, чтобы ее изучение, по крайней мере, изучение некоторых аспектов теории субфинслеровых многообразий, можно было бы свести к изучению аналогичных вопросов субримановой геометрии контактного типа [4, 5, 6]. То есть мы следуем здесь уже давно отработанной системе перехода от финслеровой геометрии к римановой геометрии касательных расслоений финслеровых многообразий [7, 8, 9, 10].

Сравнивая определение субфинслерова многообразия контактного типа с определением субриманова многообразия контактного типа, читатель заметит, что субфинслерово многообразие не является финслеровым многообразием, в то время как субриманово многообразие представляет собой специальный класс римановых многообразий. Казалось бы, что такое различие в понимании «контактного случая» не позволяет рассматривать субриманово многообразие контактного типа как частный случай субфинслерова многообразия контактного типа. Тем не менее это различие носит формальный характер, но мы не будем вдаваться здесь в подробное обсуждение этого обстоятельства. Первые шаги по исследованию субфинслеровых многообразий контактного типа сделаны в работах [11, 4]. Настоящую работу можно рассматривать как продолжение работы [11].

Под субримановым многообразием контактного типа [6] понимается гладкое многообразие M размерности $n = 2m+1$ с заданной на нем субримановой структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, g, D)$, где: η – 1-форма, порождающая распределение $D : D = ker(\eta)$; $\vec{\xi}$ – векторное поле, порождающее оснащение $D^{\perp}$ распределения D : $D^{\perp} = Span(\vec{\xi})$; g – риманова метрика на многообразии M, относительно которой распределения D и $D^{\perp}$ взаимно ортогональны. При этом выполняются равенства $\eta(\vec{\xi}) = 1$ и $g(\vec{\xi}, \vec{\xi}) = 1$. Субфинслерова геометрия является естественным обобщением субримановой геометрии. Субфинслерова структура контактного типа отличается от субримановой структуры контактного типа тем, что вместо скалярного произведения задана норма векторов, принадлежащих распределению D. При этом векторное поле $\vec{\xi}$, порождающее оснащение $D^{\perp}$ распределения D, трансверсально распределению D.

В настоящей работе определяется и исследуется геометрия субфинслерова многообразия контактного типа методом продолжения субфинслеровой структуры до субримановой структуры на распределение исходного многообразия. Используемый подход соответствует методу построения римановой структуры на касательном расслоении финслерова многообразия. На распределении субфинслерова многообразия как на тотальном пространстве векторного расслоения определяется продолженная субриманова структура контактного типа с метрикой Сасаки. Исследуются естественным образом возникающие на распределениях субфинслеровых многообразий слоения. Изучаются связи между геометрией слоений и геометрией субфинслеровых многообразий контактного типа.

2. Основные понятия. Рассмотрим гладкое многообразие M нечетной размерности $n = 2m + 1$ с заданной на нем структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, D)$, где: η – 1-форма, порождающая распределение $D : D = ker(\eta)$; $\vec{\xi}$ – векторное поле, порождающее оснащение $D^{\perp}$ распределения $D : D^{\perp} = Span(\vec{\xi})$. При этом выполняются равенства: $\eta(\vec{\xi}) = 1$, $TM = D \oplus D^{\perp}$. Потребуем дополнительно выполнения следующего условия: $d\eta(\vec{\xi}, \cdot) = \omega(\vec{\xi}, \cdot) = 0$. Будем рассматривать распределение D как тотальное пространство векторного расслоения (D, π, M).

Карта $k(x^i)$ $(i, j, k = 1, ..., n; a, b, c = 1, ..., n-1; \alpha, \beta, \gamma = 1, ..., 4m+1)$ многообразия M называется адаптированной к распределению D, если $\partial_n = \vec{\xi}$. Пусть $P : TM \to D$ – проектор, определяемый разложением $TM = D \oplus D^{\perp}$, и $k(x^i)$ – адаптированная карта. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n$ порождают распределение $D : D = Span(\vec{e}_a)$. Для неголономного поля базисов $(\vec{e}_i) = (\vec{e}_a, \partial_n)$ выполняется соотношение $[\vec{e}_a, \vec{e}_b] = 2\omega_{ba}\partial_n$. Пусть $k(x^i)$ и $k'(x^{i'})$ – адаптированные карты, тогда получаем следующие формулы преобразования координат: $x^a = x^a(x^{a'})$, $x^n = x^{n'} + x^n(x^{a'})$.

Превратим распределение D в гладкое многообразие размерности $n = 4m + 1$, поставив в соответствие каждой адаптированной карте $k(x^i)$ многообразия M сверхкарту $\tilde{k}(x^i, x^{n+a})$ на распределении D, полагая, что $\tilde{k}(X) = (x^i, x^{n+a})$, где x^{n+a} – (слоевые) координаты допустимого вектора X в базисе $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n$: $X = x^{n+a}\vec{e}_a$ Сверхкарту $\tilde{k}(x^i, x^{n+a})$ назовем адаптированной сверхкартой.

Будем называть набор $(M, \vec{\xi}, \eta, F, D)$ субфинслеровой структурой контактного типа, M – субфинслеровым многообразием контактного типа, где $F = L^2$, L – гладкая функция, заданная на распределении $D^0 = D \backslash \vec{0}$ отличных от нуля векторов распределения D и удовлетворяющая следующим условиям:

1) $L(x^i, x^{n+a})$ – положительная функция;

2) $L(x^i, x^{n+a})$ – положительно однородна первой степени относительно слоевых координат;

3) квадратичная форма $L^2_{\cdot a \cdot b}\xi^a\xi^b = \frac{\partial^2 L^2}{\partial x^{n+a}\partial x^{n+b}}\xi^a\xi^b$ положительно определена.

Символ "$\cdot$ " означает дифференцирование по слоевым координатам. Символ D^0 в дальнейшем будем заменять символом D.

Оснастим распределение D субримановой структурой контактного типа. С этой целью введем в рассмотрение функции $G^b_a = G^b_{\cdot a}$, где $G^b = \frac{1}{4}g^{bc}(\vec{e}_d F_{\cdot c} x^{n+d} - \vec{e}_c F)$.

Назовем объект G^b_a внутренней связностью. Задание внутренней связности влечет разложение распределения $\tilde{D} = \pi^{-1}_*(D)$, где $\pi : D \to M$ – естественная проекция, в прямую сумму вида $\tilde{D} = HD \oplus VD$, где VD – вертикальное распределение на тотальном пространстве D, HD – горизонтальное распределение, порождаемое векторными полями $\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma^n_a\partial_n - G^b_a\partial_{n+b}$. Векторные поля $(\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma^n_a\partial_n - G^b_a\partial_{n+b}, \partial_n, \partial_{n+a})$

определяют на распределении D как на гладком многообразии неголономное (адаптированное) поле базисов, а формы $(dx^a, \Theta^n = dx^n + \Gamma^n_a dx^a, \Theta^{n+a} = dx^{n+a} G^a_b dx^b)$ — соответствующее поле кобазисов.

Пусть $g(X,Y) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 L^2}{\partial x^{n+a}\partial x^{n+b}} X^a Y^b$, $X, Y \in \Gamma(D)$, где $\Gamma(D)$ – модуль допустимых векторных полей (векторных полей, в каждой точке принадлежащих распределению D). Субфинслеровым тензорным полем t типа (p,q) на многообразии M будем называть морфизм $t : D \longrightarrow T^p_q(D)$, такой, что $t(z) \in T^p_{\pi(z)q}(D)$. Здесь $\pi : D \longrightarrow M$ – естественная проекция, $T^p_{\pi(z)q}(D)$ – пространство допустимых тензоров в точке $\pi(z)$ (обращающихся в нуль каждый раз, когда среди аргументов тензора встречаются $\vec{\xi}$ или η). Объект $g(X,Y)$ является примером субфинслерова тензорного поля. Определим на многообразии D метрику $\tilde{g}$, полагая

$$\tilde{g}(X^h, Y^h) = \tilde{g}(X^v, Y^v) = \tilde{g}(X, Y), \quad \tilde{g}(X^h, Y^v) = \tilde{g}(X^h, \vec{u}) = \tilde{g}(X^v, \vec{u}) = 0, \quad \tilde{g}(\vec{u}, \vec{u}) = 1.$$

Здесь $\vec{u} = \partial_n$. Горизонтальный X^h и вертикальный X^v лифт любого допустимого вектора (векторного поля) X определяется естественным образом. В адаптированной сверхкарте: если $X = X^a \vec{\varepsilon}_a$, то $X^h = X^a \vec{\varepsilon}_a$, $X^v = X^a \partial_{n+a}$. Таким образом, на распределении D нами задана субриманова структура контактного типа $(D, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{g}, \tilde{D})$. Прямыми вычислениями получаем следующие структурные уравнения:

$$[\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b] = 2\omega_{ba}\partial_n + R^c_{ab}\partial_{n+c}, \quad [\vec{\varepsilon}_a, \partial_n] = \partial_n G^c_a \partial_{n+c}, \quad [\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}] = G^c_{ab}\partial_{n+c}.$$

Мы здесь положили $R^c_{ab} = \vec{\varepsilon}_b G^c_a - \vec{\varepsilon}_a G^c_b$, $G^c_{ab} = G^c_{a\cdot b}$. Тензор R^c_{ab} по аналогии с субримановом случаем назовем тензором Схоутена. Заметим, что тензор R^c_{ab} (как и любое субфинслерово тензорное поле) допускает отождествление (разными способами) с тензорным полем, заданным на распределении субфинслерова многообразия. Например, в первом структурном уравнении $R = R^c_{ab}\partial_{n+c} \otimes dx^a \otimes dx^b$.

Предложение 1. [11] *Связность Леви – Чивиты* $\tilde{\nabla}$ *субримановой структуры в адаптированных координатах получает следующее представление:*

$$\tilde{\nabla}_a \vec{\varepsilon}_b = -(C^e_{ba} + \frac{1}{2}R^e_{ba})\partial_{n+e} + F^e_{ba}\vec{\varepsilon}_e + (\omega_{ba} - \tilde{C}_{ab})\partial_n,$$

$$\tilde{\nabla}_a \partial_{n+b} = C^e_{ba}\partial_{n+e} - \frac{1}{2}g_{ab||c}g^{ce}\vec{\varepsilon}_e - \tilde{C}_{ab}\partial_n,$$

$$\tilde{\nabla}_a \partial_{n+b} = F^e_{ba}\partial_{n+e} + (C^e_{ba} + \frac{1}{2}g_{bc}R^c_{da}g^{de})\vec{\varepsilon}_e - \frac{1}{2}g_{cb}(\partial_n G^c_a)\partial_n,$$

$$\tilde{\nabla}_{n+a}\vec{\varepsilon}_b = \tilde{\nabla}_b \partial_{n+a} - G^e_{ba}\partial_{n+e},$$

$$\tilde{\nabla}_b \partial_n = \tilde{\nabla}_n \vec{\varepsilon}_b = (\tilde{C}^e_b + \psi^e_b)\vec{\varepsilon}_e - \frac{1}{2}(\partial_n G^e_b)\partial_{n+e},$$

$$\tilde{\nabla}_b \partial_{n+b} = \frac{1}{2}g_{eb}(\partial_n G^e_d)g^{dc}\vec{\varepsilon}_c + \tilde{C}^e_b\partial_{n+e}.$$

Встречающиеся здесь объекты задаются следующими равенствами:

$$C^e_{ba} = \frac{1}{2}g^{ec}g_{ba\cdot c},$$

$$F^e_{ba} = \frac{1}{2}g^{ec}(\vec{\varepsilon}_b g_{ac} + \vec{\varepsilon}_a g_{bc} - \vec{\varepsilon}_c g_{ba}),$$

$$g_{ab||c} = \vec{\varepsilon}_c g_{ab} - G^d_{ca}g_{db} - G^d_{cb}g_{ad}, \psi^e_b = g^{ce}\omega_{bc},$$

$$\tilde{C}_{ab} = \frac{1}{2}\partial_n g_{ba}, \quad \tilde{C}^e_b = g^{ce}\tilde{C}_{cb}.$$

По аналогии с финслеровым случаем, субфинслерово многообразие M будем называть субфинслеровым многообразием контактного типа Ландсберга (многообразием Ландсберга), если выполняется условие $F^c_{ab} = G^c_{ab}$. Субфинслерово многообразие M назовем плоским многообразием (а соответствующую субфинслерову структуру – плоской), если тензор Схоутена обращается в нуль. Назовем субфинслерову структуру проектируемой, если $\partial_n F = 0$. Из определения тензора Схоутена и структурных уравнений получаем следующие утверждения.

Предложение 2. *Плоская субфинслерова структура проектируема.*

Теорема 1. *Распределение* $HD \oplus \langle\vec{u}\rangle = \tilde{HD}$ *субфинслерова многообразия* M *инволютивно тогда и только тогда, когда* M *– плоское многообразие.*

Распределение $\tilde{HD}$ будем называть расширенным горизонтальным распределением. Если $\tilde{HD}$ – инволютивное распределение, то определяемое им слоение будем называть горизонтальным слоением и обозначать F_h.

3. Слоения на распределениях субфинслеровых многообразий. В настоящем разделе мы опишем геометрические свойства слоений, естественным образом возникающих на распределениях субфинслеровых многообразиий. Начнем с вертикального слоения F_v – слоения, порождаемого вертикальным распределением VD. Имеет место следующая теорема:

Теорема 2. *Вертикальное слоение F_v на распределении субфинслерова многообразия M является вполне геодезическим тогда и только тогда, когда M – многообразие Ландсберга с проектируемой субфинслеровой структурой.*

Доказательство. По определению, слоение F_v является вполне геодезическим тогда и только тогда, когда $\tilde{\nabla}_{n+a}\partial_{n+b} \in \Gamma(VD)$. Равенство

$$\tilde{\nabla}_{n+a}\partial_{n+b} = C^e_{ba}\partial_{n+e} - \frac{1}{2}g_{ab||c}g^{ce}\vec{\varepsilon}_e - \tilde{C}_{ab}\partial_n$$

перепишем в виде

$$\tilde{\nabla}_{n+a}\partial_{n+b} = C^e_{ba}\partial_{n+e} + g_{bc}(G^c_{ad} - F^c_{bd})g^{de}\vec{\varepsilon}_e - \tilde{C}_{ab}\partial_n.$$

Отсюда получаем, что условие $\tilde{\nabla}_{n+a}\partial_{n+b} \in \Gamma(VD)$ выполняется тогда и только тогда, когда $G^c_{ad} - F^c_{bd} = 0$ и $\tilde{C}_{ab} = 0$. Что и доказывает теорему. Перейдем к расширенному горизонтальному распределению $\tilde{HD}$.

Теорема 3. *Пусть расширенное горизонтальное распределение $\tilde{HD}$ инволютивно. Тогда горизонтальное слоение F_h является вполне геодезическим тогда и только тогда, когда субфинслерово многообразие M является субримановым многообразием с инволютивным распределением D.*

Доказательство теоремы следует из того, что условие $\tilde{\nabla}_a\vec{\varepsilon}_b \in \Gamma(\tilde{HD})$ эквивалентно тому, что $C^e_{ba} = 0$ и $\omega_{ba} = 0$.

Рассмотрим на многообразии D два глобально определенных векторных поля

$$L = x^{n+a}\partial_{n+a}, L^* = x^{n+a}\vec{\varepsilon}_a.$$

Назовем эти поля, соответственно, вертикальным полем Лиувилля и горизонтальным полем Лиувилля. Введем в рассмотрение двумерное распределение $\tilde{L} = \langle L\rangle \oplus \langle L^*\rangle$. Проводя непосредственные вычисления, получаем $[L, L^*] = L^*$. Таким образом, убеждаемся в справедливости следующего предложения.

Предложение 3. *Распределение, порождаемое вертикальным полем Лиувилля и горизонтальным полем Лиувилля, является инволютивным распределением.*

4. Заключение. В работах [12, 13, 14, 1, 7] представлен богатейший материал, демонстрирующий, с одной стороны, красоту и прикладные возможности финслеровой геометрии, а с другой стороны, эффективность использования геометрии касательных расслоений в исследовании финслеровых структур. В настоящей работе получены интересные результаты, относящиеся к геометрии слоений на распределениях субфинслеровых многообразий контактного типа. Содержание работ [14, 15, 9] указывает на перспективу дальнейших исследований в этом направлении. В частности, представляется интересным изучение слоений на распределениях субфинслеровых многообразий с метрикой типа Чигера – Громола. Геометрия слоений на распределениях субфинслеровых многообразий имеет свою специфику по отношению к геометрии слоений на касательных расслоениях финслеровых многообразий. Необходимый инструментарий для исследования геометрии слоений на распределениях субфинслеровых многообразий содержат работы [11, 4, 16, 17, 5, 6].

Список литературы

1. Bucataru I., Miron, R. Finsler-Lagrange geometry. Applications to dynamical systems. Editura Academiei Romane, Bucharest. 2007. 252 p.
2. Clelland J.N., Moseley C.G. Sub-Finsler geometry in dimension three. *Differential Geometry and its Applications.* 2006;24(6):628–651.
3. Lopez C., Martinez E. *Sub-Finslerian metric associated to an optimal control system, SIAM J. Control Optim.* 2000;39:798–811. doi.org/10.1137/S0363012999357562
4. Букушева А.В., Галаев С.В. Почти контактные метрические структуры, определяемые связностью над распределением с допустимой финслеровой метрикой. *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика.* 2012;12(3):17–22.
5. Галаев С.В. Допустимые гиперкомплексные структуры на распределениях сасакиевых многообразий. *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия. Математика. Механика. Информатика.* 2016. 16(3):263–272.
6. Галаев С.В. ∇^N-Эйнштейновы почти контактные метрические многообразия. *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика.* 2021;70:5–15. doi.org/10.17223/19988621/70/1
7. Matsumoto M. Foundations of Finsler geometry and special Finsler spaces. Kaiseisha, Japan, 1986.
8. Miron R., Anastasiei M. The geometry of Lagrange spaces: theory and applications. Fundamental Theories of Physics, 59. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group. 1994.

9. Peyghan E., Tayebi A., Zhong C. Foliations on the tangent bundle of Finsler manifolds. *Science China Mathematics.* 2012;55:647–662. doi.org/10.1007/s11425-011-4288-4
10. Raei Z. On the geometry of tangent bundle of Finsler manifold with Cheeger-Gromoll metric. *Journal of Finsler Geometry and its Applications.* 2021;2(1):1-30. doi.org/10.22098/jfga.2021.1260
11. Букушева А.В. Слоения на распределениях с финслеровой метрикой. *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика.* 2014;14(3):247–151.
12. Bao D, Chern S., Shen Z. An introduction to Riemann-Finsler geometry. Graduate Texts in Mathematics 200. New York: Springer-Verlag, 2000. 435 p.
13. Bejancu A, Farran H.R. Foliations and geometric structures. Mathematics and Its Applications 580. Dordrecht: Springer. 2006. 300 p. https://doi.org/10.1007/1-4020-3720-1
14. Bejancu A., Farran H.R. Finsler geometry and natural foliations on the tangent bundle. *Rep. Math Phys.* 2006;58:131–146. doi.org/10.1016/S0034-4877(06)80044-3
15. Manea A. Some new types of vertical 2-jets on the tangent bundle of a Finsler manifold. *Politehn Univ Bucharest Sci Bull Ser A Appl Math Phys.* 2010;72:177–194.
16. Галаев С.В. N-продолженные симплектические связности в почти контактных метрических пространствах. *Известия высших учебных заведений. Математика.* 2017;3:15-23. doi.org/10.3103/S1066369X17030021
17. Галаев С.В. Гладкие распределения с допустимой гиперкомплексной псевдо-эрмитовой структурой. *Вестник Башкирского университета.* 2016;21(3):551–555.

References

1. Bucataru I., Miron, R. Finsler-Lagrange geometry. Applications to dynamical systems. Editura Academiei Romane, Bucharest. 2007. 252 p.
2. Clelland J.N., Moseley C.G. Sub-Finsler geometry in dimension three. *Differential Geometry and its Applications.* 2006;24(6):628–651.
3. Lopez C., Martinez E. *Sub-Finslerian metric associated to an optimal control system, SIAM J. Control Optim.* 2000;39:798–811. doi.org/10.1137/S0363012999357562
4. Bukusheva AV., Galaev SV. Almost contact metric structures defined by connection over distribution with admissible Finslerian metric. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.* 2012;12(3):17–22. (in Russian)
5. Galaev SV. Admissible hypercomplex structures on distributions of Sasakian manifolds. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.* 2016;16(3):263–272. doi.org/10.18500/1816-9791-2016-16-3-263-272 (in Russian)
6. Galaev SV. ∇^N-Einstein almost contact metric manifolds. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 2021;70:5–15. doi.org/10.17223/19988621/70/1 (in Russian)
7. Matsumoto M. Foundations of Finsler geometry and special Finsler spaces. Kaiseisha, Japan, 1986.
8. Miron R., Anastasiei M. The geometry of Lagrange spaces: theory and applications. Fundamental Theories of Physics, 59. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group. 1994.
9. Peyghan E., Tayebi A., Zhong C. Foliations on the tangent bundle of Finsler manifolds. *Science China Mathematics.* 2012;55:647–662. doi.org/10.1007/s11425-011-4288-4
10. Raei Z. On the geometry of tangent bundle of Finsler manifold with Cheeger-Gromoll metric. *Journal of Finsler Geometry and its Applications.* 2021;2(1):1-30. doi.org/10.22098/jfga.2021.1260
11. Bukusheva AV. Foliation on distribution with Finslerian metric. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.* 2014;14(3):247–151. (in Russian)
12. Bao D, Chern S., Shen Z. An introduction to Riemann-Finsler geometry. Graduate Texts in Mathematics 200. New York: Springer-Verlag, 2000. 435 p.
13. Bejancu A, Farran H.R. Foliations and geometric structures. Mathematics and Its Applications 580. Dordrecht: Springer. 2006. 300 p. https://doi.org/10.1007/1-4020-3720-1
14. Bejancu A., Farran H.R. Finsler geometry and natural foliations on the tangent bundle. *Rep. Math Phys.* 2006;58:131–146. doi.org/10.1016/S0034-4877(06)80044-3
15. Manea A. Some new types of vertical 2-jets on the tangent bundle of a Finsler manifold. *Politehn Univ Bucharest Sci Bull Ser A Appl Math Phys.* 2010;72:177–194.
16. Galaev SV. N-extended symplectic connections in almost contact metric spaces. *Russian Mathematics.* 2017;61:12–19. doi.org/10.3103/S1066369X17030021
17. Galaev SV. Smooth distributions with admissible hypercomplex pseudo-hermitian structure. *Vestnik Bashkirskogo universiteta.* 2016;21(3):551–555. (in Russian)

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 22.12.2023
Поступила после рецензирования 02.02.2024
Принята к публикации 06.02.2024

Received December 22, 2023
Revised February 2, 2024
Accepted February 6, 2024

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Букушева Алия Владимировна – кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры геометрии, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Aliya V. Bukusheva – Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Associate Professor Department of Geometry, Saratov National Research State University named after N. G. Chernyshevsky, Saratov, Russia