УДК 517.9
DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-506-513

ОБОБЩЕННАЯ ДИВЕРГЕНТНАЯ ТЕОРЕМА И ВТОРОЕ ТОЖДЕСТВО ГРИНА ДЛЯ B-ЭЛЛИНТИЧЕСКИХ И B-ГИНЕРБОЛИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

GENERALIZED DIVERGENT THEOREM AND SECOND GREEN IDENTITY OF B-ELLIPTIC AND B-HYPERBOLIC OPERATORS

Э.Л. Шишкина
E.L. Shishkina

Высшая школа информатики и управления,
35-225, ул. Х. Зучарского, 2, Жешув, Польша

University of Information Technology and Management,
35-225, ul. mjr. H. Sucharskiego, 2, Rzeszow, Poland

E-mail: ilina_dico@mail.ru

Аннотация:
В статье представлено обобщение дивергентной теоремы, устанавливающей связь между весовой дивергенцией векторного поля и производной но направленпю от этой же векторного поля, подправленного степеннымп весами. Из этого обобщения следуют две формулы тина второго тождества Грина для случаев, когда в операторах эллиптического и гиперболического типов действует оператор Бесселя вместо второй производной. Классическое второе тождество Грина имеет большое значение в математической физике, поскольку, напрпмер, прп его помощи устанавливается единственность решения задачи Коши для волнового уравнения. Обобщение этого тождества, нолученное в статье, может быть использовано для доказательства единственности решения задачи Коши для общего уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу.

Abstract:
The article presents a generalization of the divergence theorem, which establishes a connection between the weight divergence of a vector field and the derivative in the direction from the same vector field corrected by power weights. From this generalization, two formulas of the type of the second Green identity follow for the cases when the Bessel operator acts instead of the each second derivative in the operators of elliptic and hyperbolic types. The classical second Green identity is of great importance in mathematical physics, because, for example, with its help the uniqueness of the solution of the Cauchy problem for the wave equation is established. The generalization of this identity obtained in the article can be used to prove the uniqueness of the solution of the Cauchy problem for the general Euler–Poisson–Darboux equation.

Ключевые слова: оператор Бесселя, обобщение дивергентной теоремы, обобщение формулы Грина, B-эллиптический оператор, B-гиперболический оператор.
Keyword: Bessel's operator, generalization of the divergence theorem, generalization of Green's formula, B-elliptic operator, B-hyperbolic operator.

1. Введение

Утверждение дивергентной теоремы представляет собой равенство между поверхностным и объемным интегралом с учетом расходимости векторного поля. Такие интегралы часто возникают в задачах механики, особенно в задачах вариационного исчисления в механике. В этой статье мы рассмотрим обобщение дивергентной теоремы на случай, когда дивергенция порождается оператором набла с весовыми множителями. Такой вариант дивергентной теоремы позволяет получать формулы Грина для дифференциальных выражений с сингулярными операторами Бесселя. В качестве примеров приложения обобщенной дивергентной теоремы приведены вторые тождества Грина для онератров эллиптического и гиперболического типов, где вместо каждой второй производной действует оператор Бесселя.

Основным объектом исследования в этой статье выступает *сингулярный дифференциальный оператор Бесселя* B_γ (см., например, [2], стр. 5) вида

$$(B_\gamma)_t = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{t}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{t^\gamma}\frac{\partial}{\partial t}t^\gamma\frac{\partial}{\partial t}, \qquad t>0, \qquad \gamma\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Мы будем рассматривать B-эллиптический оператор вида

$$\Delta_\gamma = (\Delta_\gamma)_x = \sum_{k=1}^{n}(B_{\gamma_k})_{x_k} \tag{2}$$

и B-гиперболический оператор вида

$$\Box_\gamma = (\Box_\gamma)_x = (B_{\gamma_1})_{x_1} - \sum_{i=2}^{n}(B_{\gamma_i})_{x_i}. \tag{3}$$

Для оператора Δ_γ используется термин *оператор Лапласа–Бесселя* (см. [2,6]).

Здесь доказывается обобщеппе дивергентной теоремы на случай взвешенной дивергенции и выводится вторая формула Грина для операторов вида Δ_γ и $\Box_\gamma$.

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство,

$$\mathbb{R}^n_+{=}\{x{=}(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \ x_1{>}0,\ldots,x_n{>}0\},$$

$$\overline{\mathbb{R}}^n_+{=}\{x{=}(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \ x_1{\geq}0,\ldots,x_n{\geq}0\},$$

$\gamma{=}(\gamma_1,...,\gamma_n)$ — мультииндекс, состоящий из фиксированных положительных чисел γ_i, $i{=}1,...,n$, и $|\gamma|{=}\gamma_1{+}\ldots{+}\gamma_n$.

Рассмотрим открытое множество Ω в $\mathbb{R}^n$, симметричное относительно каждой гиперплоскости $x_i{=}0$, $i{=}1,...,n$. Пусть $\Omega_+=\Omega\cap\mathbb{R}^n_+$ и $\overline{\Omega}_+=\Omega\cap\overline{\mathbb{R}}^n_+$ где

$$\overline{\mathbb{R}}^n_+{=}\{x{=}(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \ x_1{\geq}0,\ldots,x_n{\geq}0\}.$$

Имеем $\Omega_+\subseteq\mathbb{R}^n_+$ и $\overline{\Omega}_+\subseteq\overline{\mathbb{R}}^n_+$. Мы рассмотрим множество $C^m(\Omega_+)$, состоящее из m раз дифференцируемых на on Ω_+ функций. Через $C^m(\overline{\Omega}_+)$ обозначим подмножество функций из $C^m(\Omega_+)$ таких, что все производные этих функций но x_i для любого $i=1,...,n$ непрерывно продолжаются на $x_i{=}0$. Класс $C^m_{ev}(\overline{\Omega}_+)$ состоит из функций $f\in C^m(\overline{\Omega}_+)$, таких, что $\left(\partial^{2k+1}f/\partial x_i^{2k+1}\right)_{x=0}=0$ для всех неотрицательных целых $k\leq m$ при $i=1,...,n$ (см. [1] и [2], стр. 21 и далее).

Пусть $\vec{e}=(e_1,...,e_n)$ является ортонормированным базисом в $\mathbb{R}^n$,

$$\nabla'_\gamma=\left(\frac{1}{x_1^{\gamma_1}}\frac{\partial}{\partial x_1},...,\frac{1}{x_n^{\gamma_n}}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

— первый взвешенный оператор набла,

$$\vec{F} = \vec{F}(x) = (F_1(x), ..., F_n(x))$$

— векторное поле,

$$(\nabla'_\gamma \cdot \vec{F}) = \frac{1}{x_1^{\gamma_1}} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + ... + \frac{1}{x_i^{\gamma_n}} \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$$

— весовая дивергенция.

Рассмотрим в $\overline{\mathbb{R}}_+^n$ область G^+, ограниченную кусочно-гладкой границей $S^+ \in \overline{\mathbb{R}}_+^n$. Таким образом, поверхность S^+ может быть представлена в виде объединения $S^+ = \bigcup\limits_{k=1}^{q} S_k^+$ конечного числа частей S_k^+ без общих внутренних точек. Пусть для каждой внутренней точки S_k^+ существует окрестность, внутри которой поверхность S_k^+ представлена параметрическими уравнениями вида

$$x_i = \chi_i(y_1, ..., y_{n-1}), \qquad i = 1, ..., n,$$

где $\chi_i(y)$, $y = (y_1, ..., y_{n-1})$ имеет непрерывные первые производные и ранг матрицы Якоби $\left\| \dfrac{\partial(\chi_1, ..., \chi_n)}{\partial(y_1, ..., y_{n-1})} \right\|$ равен $n-1$. Вектор

$$\vec{N} = \left\| \begin{array}{ccc} e_1 & ... & e_n \\ \frac{\partial \chi_1(y)}{\partial y_1} & ... & \frac{\partial \chi_n(y)}{\partial y_1} \\ ... & ... & ... \\ \frac{\partial \chi_1(y)}{\partial y_{n-1}} & ... & \frac{\partial \chi_n(y)}{\partial y_{n-1}} \end{array} \right\|$$

является нормальным в каждой точке $y \in S^+$ к поверхности S^+ за исключением точек соединения поверхностей S_k^+, $k = 1, .., q$, в которых он не определен однозначно и не будет рассматриваться. Вектор

$$\vec{\nu} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$$

определяется с точностью до знака. Из двух возможных направлений $\vec{\nu}$ выберем внешнее по отношению к области G^+. Такой вектор будем называть единичным вектором нормали к поверхности S^+ в точке y. Через η_i обозначим угол между вектором $\vec{\nu}$ и осью x_j, тогда

$$\vec{\nu} = e_1 \cos \eta_1 + ... + e_n \cos \eta_n.$$

2. Обобщенная дивергентная теорема

Теорема 1. *Пусть G^+ — область в $\overline{\mathbb{R}}^n_+$ такая, что каждая линия, перпендикулярная плоскости $x_i = 0$, $i = 1, ..., n$, либо не пересекает G^+ или имеет один общий отрезок с G^+ (возможно вырождающийся в точку) вида*

$$\alpha_i(x') \le x_i \le \beta_i(x'), \qquad x'=(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n), \qquad i = 1, ..., n.$$

Если $\vec{g}=(g_1(x), ..., g_n(x))$ является непрерывно дифференцируемым в G^+ векторным полем и $\vec{F}=(F_1(x), ..., F_n(x))$, $F_1(x)=x_1^{\gamma_1} g_1(x), ..., F_n(x)=x_n^{\gamma_n} g_n(x)$, то справедлива формула

$$\int\limits_{G^+} (\nabla'_\gamma \cdot \vec{F})\, x^\gamma dx = \int\limits_{S^+} (\vec{g}\cdot\vec{\nu})\; x^\gamma\, dS\,, \tag{4}$$

где $\vec{\nu}$ внешний вектор нормали поверхности S^+.

□ Пусть i — фиксированное натуральное число между 1 и n включительно. Часть поверхности S^+, определенную уравнением $x_i = \beta_i(x')$, обозначим S^+_u, а часть поверхности S^+, определенную уравнением $x_i = \alpha_i(x')$, обозначим S^+_d, тогда

$$(\vec{\nu}, e_i) = \begin{cases} -\left[1 + \left(\dfrac{\partial\alpha_i}{\partial x_1}\right)^2 + ... + \left(\dfrac{\partial\alpha_i}{\partial x_{i-1}}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\alpha_i}{\partial x_{i+1}}\right)^2 + ... + \left(\dfrac{\partial\alpha_i}{\partial x_n}\right)^2\right]^{-1/2}, & x \in S^+_d\,; \\ \left[1 + \left(\dfrac{\partial\beta_i}{\partial x_1}\right)^2 + ... + \left(\dfrac{\partial\beta_i}{\partial x_{i-1}}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\beta_i}{\partial x_{i+1}}\right)^2 + ... + \left(\dfrac{\partial\beta_i}{\partial x_n}\right)^2\right]^{-1/2}, & x \in S^+_u\,. \end{cases}$$

Имеем

$$\int\limits_{G^+} (\nabla'_\gamma \cdot \vec{F})\, x^\gamma dx = \sum_{i=1}^n \int\limits_{G^+} \frac{1}{x_i^{\gamma_i}} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}\, x^\gamma dx.$$

Рассмотрим

$$\int\limits_{G^+} \frac{1}{x_i^{\gamma_i}} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}\, x^\gamma dx = \int\limits_{Q} x_1^{\gamma_1} ... x_{i-1}^{\gamma_{i-1}} x_{i+1}^{\gamma_{i+1}} ... x_n^{\gamma_n} dx_1 ... dx_{i-1} dx_{i+1} ... dx_n \int\limits_{\alpha_i(x')}^{\beta_i(x')} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} dx_i,$$

где Q — проекция G^+ на $x_i = 0$. Интегрируя по x_i, получим

$$\int\limits_{G^+} \frac{1}{x_i^{\gamma_i}} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}\, x^\gamma dx = \int\limits_{Q} F_i(x)\Big|_{x_i=\alpha_i(x')}^{x_i=\beta_i(x')} x_1^{\gamma_1} ... x_{i-1}^{\gamma_{i-1}} x_{i+1}^{\gamma_{i+1}} ... x_n^{\gamma_n} dx_1 ... dx_{i-1} dx_{i+1} ... dx_n.$$

Пусть $(x')^{\gamma'} = x_1^{\gamma_1} ... x_{i-1}^{\gamma_{i-1}} x_{i+1}^{\gamma_{i+1}} ... x_n^{\gamma_n}$, $dx' = dx_1 ... dx_{i-1} dx_{i+1} ... dx_n$. Тогда

$$\int\limits_{G^+} \frac{1}{x_i^{\gamma_i}} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}\, x^\gamma dx = \int\limits_{Q} F_i(x_1, ..., x_{i-1}, \beta_i(x'), x_{i+1}, ..., x_n)(x')^{\gamma'} dx' -$$

$$- \int\limits_{Q} F_i(x_1, ..., x_{i-1}, \alpha_i(x'), x_{i+1}, ..., x_n)(x')^{\gamma'} dx' =$$

$$= \int\limits_{Q} F_i(x_1, ..., x_{i-1}, \beta_i(x'), x_{i+1}, ..., x_n)(\vec{\nu}, e_i) \times$$

$$\times\sqrt{1+\left(\frac{\partial\beta_i}{\partial x_1}\right)^2+...+\left(\frac{\partial\beta_i}{\partial x_{i-1}}\right)^2+\left(\frac{\partial\beta_i}{\partial x_{i+1}}\right)^2+...+\left(\frac{\partial\beta_i}{\partial x_n}\right)^2}(x')^{\gamma'}dx'+$$

$$+\int\limits_Q F_i(x_1,...,x_{i-1},\alpha_i(x'),x_{i+1},...,x_n)(\vec{\nu},e_i)\times$$

$$\times\sqrt{1+\left(\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_1}\right)^2+...+\left(\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_{i-1}}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_{i+1}}\right)^2+...+\left(\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_n}\right)^2}\ (x')^{\gamma'}dx'=$$

$$=\int\limits_{S_u^+}F_i(x)(\vec{\nu},e_i)(x')^{\gamma'}dS_u+\int\limits_{S_d^+}F_i(x)(\vec{\nu},e_i)(x')^{\gamma'}dS_d=$$

$$=\int\limits_{S_u^+}g_i(x)(\vec{\nu},e_i)x^{\gamma}dS_u+\int\limits_{S_d^+}g_i(x)(\vec{\nu},e_i)x^{\gamma}dS_d=\int\limits_{S^+}g_i(x)\cos\eta_i\,x^{\gamma}dS.$$

В результате, получим

$$\int\limits_{G^+}(\nabla'_\gamma\cdot\vec{F})\,x^{\gamma}dx=\sum_{i=1}^n\int\limits_{S^+}g_i(x)\cos\eta_i\,x^{\gamma}dS=\int\limits_{S^+}(\vec{g}\cdot\vec{\nu})\ x^{\gamma}\,dS.\quad\blacksquare$$

Замечание 1. Предположим, что область $G^+\in\overline{\mathbb{R}}^n_+$ есть объединение областей $G_1^+,...,G_m^+$ без общих внутренних точек. Пусть каждая облась G_j^+ в $\overline{\mathbb{R}}^n_+$ такая, что каждая линия, перпендикулярная плоскости $x_i=0$, $i=1,...,n$, либо не пересекает G_j^+ либо имеет один общий с G_j^+ отрезок (возможно вырождающийся в точку) вида

$$\alpha_i^j(x')\le x_i\le\beta_i^j(x'),\qquad x'=(x_1,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n),\qquad i=1,...,n$$

и $\vec{F}=(F_1(x),...,F_n(x))$, $F_1(x)=x_1^{\gamma_1}g_1(x),...,F_n(x)=x_n^{\gamma_n}g_n(x)$, $\vec{g}=(g_1(x),...,g_n(x))$ — непрерывно дифференцируемое в G^+ векторное поле, тогда справедлива следующая формула

$$\int\limits_{G^+}(\nabla'_\gamma\cdot\vec{F})\,x^{\gamma}dx=\int\limits_{S^+}(\vec{g}\cdot\vec{\nu})\ x^{\gamma}\,dS\,,\tag{5}$$

где $S^+\in\overline{\mathbb{R}}^n_+$ — кусочно-гладкая граница новерхности, $\vec{\nu}$ вектор нормали внешней стороны поверхности S^+.

3. Второе тождество Грина для B-эллиптических и B-гиперболических операторов

Второе тождество Грина широко представлено в векторном анализе и имеет множество приложений, например используется при доказательстве единственности решения задачи Коши для волнового уравнения и уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу (см. [4]). Мы приведем обобщения второго тождества Грина на случай, когда в операторах эллиптического и гиперболического типов действует оператор Бесселя вместо второй производной.

Теорема 2. *Пусть G^+ удовлетворяет условиям замечания 1. Если φ,ψ дважды непрерывно дифференцируемые функции, определенные на G^+, такие что*

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right|_{x_i=0}=0,\qquad\left.\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right|_{x_i=0}=0,\qquad i=1,...,n,$$

то справедлива вторая формула Грина для оператора Лапласа–Бесселя вида

$$\int\limits_{G^+} (\psi\Delta_\gamma\varphi - \varphi\Delta_\gamma\psi)\, x^\gamma dx = \int\limits_{S^+} \left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{\nu}} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial\vec{\nu}}\right) x^\gamma\, dS. \tag{6}$$

□ Еслиφ, ψ — дважды непрерывно дифференцируемые функции, определенные в о G^+, такие, что

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right|_{x_i=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right|_{x_i=0} = 0, \qquad i=1,...,n\,,$$

то, выбрав

$$\vec{F} = \psi\nabla''_\gamma\varphi - \varphi\nabla''_\gamma\psi = \left(\psi\cdot x_1^{\gamma_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} - \varphi\cdot x_1^{\gamma_1}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}, ..., \psi\cdot x_n^{\gamma_n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_n} - \varphi\cdot x_n^{\gamma_n}\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\right) =$$

$$= \left(x_1^{\gamma_1}\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right), ..., x_n^{\gamma_n}\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x_n} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\right)\right),$$

получим вторую формулу Грина для оператора Лапласа–Бесселя. Действительно, в этом случае

$$\vec{g} = \left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial x_1}, ..., \psi\frac{\partial\varphi}{\partial x_n} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\right)$$

непрерывно дифференцируемое векторное поле, определенное в G^+, и

$$(\nabla'_\gamma\cdot\vec{F}) = (\nabla'_\gamma\cdot(\psi\nabla''_\gamma\varphi - \varphi\nabla''_\gamma\psi)) = \sum_{i=1}^n\left(\frac{1}{x_i^{\gamma_i}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\psi\cdot x_i^{\gamma_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) - \frac{1}{x_i^{\gamma_i}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varphi\cdot x_i^{\gamma_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^n\left(\frac{1}{x_i^{\gamma_i}}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\cdot x_i^{\gamma_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \psi\cdot\frac{1}{x_i^{\gamma_i}}\frac{\partial}{\partial x_i}x_i^{\gamma_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} - \frac{1}{x_i^{\gamma_i}}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\cdot x_i^{\gamma_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_i} - \varphi\cdot\frac{1}{x_i^{\gamma_i}}\frac{\partial}{\partial x_i}x_i^{\gamma_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^n(\psi B_{\gamma_i}\varphi - \varphi B_{\gamma_i}\psi) = \psi\Delta_\gamma\varphi - \varphi\Delta_\gamma\psi,$$

$$(\vec{g}\cdot\vec{\nu}) = \left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\cos\eta_1 + ... + \psi\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\cos\eta_n\right) - \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\cos\eta_1 + ... + \varphi\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\cos\eta_n\right) = \psi\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{\nu}} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial\vec{\nu}}.$$

Применяя (5), получим (6). ■

Замечание 2. *Для случая, когда весовая переменная только одна, эта формула приведена в [3] (формула (3)) другим методом.*

Как следствие теоремы 2, получим формулу для интеграла со степенным весом $x^\gamma = x_1^{\gamma_1}...x_n^{\gamma_n}$, $\gamma_i > 0$, i=1, ..., n в случае, когда область интегрирования слева — это часть шара, принадлежащего ортанту $\mathbb{R}_+^n$.

Часть шара $|x| \le r$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$ принадлежащего ортанту $\mathbb{R}_+^n$ обозначим через $B_r^+(n)$. Границу множества $B_r^+(n)$ обозначим через $S_r^+(n)$. Эта граница состоит из части сферы $\{x\in\mathbb{R}_+^n : |x|=r\}$ и частей координатных гиперплоскостей x_i=0, i=1, . . ., n таких, что $|x^i| \le r$.

Следствие. *Для $w \in C_{ev}^2(B_R^+(n))$ справедлива формула*

$$\int\limits_{B_R^+(n)} (\Delta_\gamma w(x))\, x^\gamma dx = \int\limits_{S_R^+(n)} \left(\frac{\partial w(x)}{\partial\vec{\nu}}\right) x^\gamma\, dS\,, \tag{7}$$

где $\vec{\nu}$ внешняя нормаль к $S_R^+(n)$.

Пусть

$$\lozenge_\gamma = \left(x_1^{\gamma_1} \frac{\partial}{\partial x_1}, -x_2^{\gamma_{p+1}} \frac{\partial}{\partial x_2}, ..., -x_n^{\gamma_n} \frac{\partial}{\partial x_n} \right).$$

Тогда

$$(\nabla'_\gamma \cdot \lozenge_\gamma) = \square_\gamma.$$

Теорема 3. *Пусть G^+ удовлетворяет условиям замечания 1. Если φ, ψ дважды непрерывно дифференцируемые функции, определенные в G^+, такие что*

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right|_{x_i=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right|_{x_i=0} = 0, \qquad i = 1, ..., n.$$

Тогда справедлива вторая формула Грина для B-ультрагиперболического оператора вида

$$\int\limits_{G^+} (\psi \square_\gamma \varphi - \varphi \square_\gamma \psi)\, x^\gamma dx = \int\limits_{S^+} \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{\tau}} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \vec{\tau}} \right) x^\gamma \, dS, \tag{8}$$

где $\vec{\tau} = (\cos \eta_1, -\cos \eta_2, ..., -\cos \eta_n)$.

$\square$ Пусть

$$\vec{F} = \psi \lozenge_\gamma \varphi - \varphi \lozenge_\gamma \psi =$$

$$= \left(x_1^{\gamma_1} \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right), -x_2^{\gamma_2} \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right), ..., -x_n^{\gamma_n} \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \right) \right).$$

Тогда

$$\vec{g} = \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_1}, - \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right), ..., - \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \right) \right),$$

$$(\nabla'_\gamma \cdot \vec{F}) = \psi \square_\gamma \varphi - \varphi \square_\gamma \psi,$$

$$(\vec{g} \cdot \vec{\nu}) = \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \cos \eta_1 - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \cos \eta_1 \right) - \sum_{i=2}^{n} \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \cos \eta_i - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \cos \eta_i \right) = \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{\tau}} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \vec{\tau}},$$

где $\vec{\tau} = (\cos \eta_1, -\cos \eta_2, ..., -\cos \eta_n)$. Применяя (5), получим (8). ■

Вторая формула Грина для B-ультра-гиперболического оператора может быть использована для доказательства единственности задачи Коши для общего уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу (см. [5]).

Список литературы

1. Житомирский Я.И. 1955. Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальными операторами типа Бесселя. Матем. сб. 36(78)(2):299–310.

2. Киприянов И.А. 1997. Сингулярные эллиптические краевые задачи. М.: Наука-Физматлит.

3. Киприянова Н.И. 1985. Формула среднего значения для собственной функции сингулярного дифференциального оператора. Дифференц. уравнен. XXI(11):1998–2001.

4. Курант Р., Гильберт Д. 1945. Уравнения математической физики. Т.2 М.-Л. : ГИТТЛ.

5. Ситник С.М., Шишкина Э.Л. 2019. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. Москва: Физматлит, 2019.

6. Guliev V.S. 2006. Weighted inequality for fractional maximal functions and fractional integrals associated with the Laplace–Bessel differential operator. Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. 26(1):71–80.

References

1. Zhitomirskii Ya.I. 1955. Cauchy's problem for systems of linear partial differential equations with differential operators of Bessel type. Mat. Sb. (N.S.) 36(78)(2):299–310.

2. Kipriyanov I.A. 1997. Singular Elliptic Boundary Value Problems. M.: Nauka-Fizmtlit.

3. Kipriyanova N.I. 1985. Average formula for the eigenfunction of a singular differential operator. Diff. eq. 1985. XXI(11):1998–2001.

4. Courant R., Hilbert D. 1945. Equations of mathematical physics. V.2 M.-L. : GITTL.

5. Sitnik S.M., Shishkina E.L. 2019. Transmutation operators method for differential equations with Bessel operators. Moscow. Fizmatlit, 2019.

6. Guliev V.S. 2006. Weighted inequality for fractional maximal functions and fractional integrals associated with the Laplace–Bessel differential operator. Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. 26(1):71–80.

Ссылка для цитирования статьи
For citation

Шишкина Э.Л. 2019. Обобщенная дивергентная теорема и второе тождество Грина для B-эллиптических и B-гиперболических операторов. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 51 (4): 506–513. DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-506-513.

Shishkina E.L. 2019. Generalized divergent theorem and second Green identity of B-elliptic and B-hyperbolic operators. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics. 51 (4): 506–513 (in Russian). DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-506-513.