



УДК 517.958 [550.3 + 551.5]

DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-3-435-443

**СУБЛИМАЦИОННЫЙ РОСТ ЛЕДЯНЫХ ЧАСТИЦ ВО
ФРАКТАЛЬНЫХ ОБЛАКАХ****SUBLIMATION GROWTH OF ICE PARTICLES IN FRACTALITY
CLOUDS****Т.С. Кумыков****T.S. Kumukov**

Институт прикладной математики и автоматизации – филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный научный центр Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук»
Россия, КБР, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А

Institute of Applied Mathematics and Automation of Kabardin-Balkar Scientific Centre of RAS,
89 A Shortanova St., Nalchik, 360004, Russia

E-mail: macist20@mail.ru

Аннотация

В работе на основе дифференциального уравнения дробного порядка рассмотрено влияние фрактальности среды на сублимационный рост облачных ледяных частиц. Проведены численные эксперименты для оценки влияния фрактальности среды на рост облачных частиц при различных сочетаниях микрофизических параметров. Определена общая зависимость роста облачных ледяных частиц от различных параметров фрактальности среды. Обнаружены зоны проявления фрактального эффекта в процессе сублимации ледяных частиц.

Abstract

On the basis of differential equations of fractional order are considered, the influence of fractality of the environment on the sublimation growth of cloud ice particles. Numerical experiments are performed to assess the impact of the fractality of the medium on the growth of cloud particles at different combinations of microphysical parameters. Determined the General dependence of the growth of cloud ice particles on various parameters of fractality of the environment.

Ключевые слова: сублимация, ледяная частица, фрактальная размерность, математическая модель, облако.

Key words: sublimation, ice particle, fractal dimension, mathematical model, cloud.

Введение

В последние годы исследователи, работающие в области физики облаков, проявляют значительный интерес к вопросу формирования и степени влияния фрактальности облачной среды на различные геопрцессы [Iudin и др. 2003]. Одним из таких процессов является сублимационный рост ледяных частиц, который играет существенную роль в возникновении грозных облаков, когда водность облачной среды велика и протекает процесс перекачки водяного пара с облачных капелек на ледяные частицы [Мучник,



1974]. Известно также, что кристаллики льда играют важную роль в распространении солнечной и земной радиации, которая оказывает большое влияние на погодные условия и климат Земли. Поэтому получение более полной информации о свойствах ледяных частиц с использованием фрактального анализа позволит наиболее точно осуществить моделирование различных процессов в атмосфере.

Исследованием сублимационного роста ледяных частиц для полидисперсного облака занимались многие ученые, в числе которых Шифрин К.С., Перельман А.Я., решением задачи перегонки водяного пара с льдинок на сферические ледяные частицы для полидисперсного облака занимался Буйков М.В., над вопросом кристаллизации полидисперсного переохлажденного облака благодаря замерзанию льдинок работали Колесников А.Г. и Беляев В.И., из зарубежных – Фольмер М., Хаутон Х., Мейсон Дж. и др. Все эти исследования велись без учета фрактальности облачной среды.

В настоящей работе проводится исследование особенностей сублимационного роста облачных ледяных частиц исходя из фрактальности среды.

2. Постановка и решение задачи

Область возникновения ледяных частиц в облачной среде заключена между упругостью насыщения над водой и упругостью насыщения над льдом и описание изменения геометрических размеров кристаллов вследствие сублимации водяного пара весьма затруднено. Поэтому обычно ограничиваются описанием диффузионного роста массы ледяной частицы, используя электростатическую аналогию [Шишкин, 1964]. Сублимационный процесс существенно зависит от соотношения количества и размеров льдинок. В случае различных размеров направление перегонки водяного пара зависит от размеров плотностей насыщающего пара над поверхностями частиц.

Рассмотрим ледяную частицу сферической формы, рост которой осуществляется по упрощенной схеме в условиях водяного насыщения. Воспользовавшись аналогией между уравнением диффузии водяного пара к частице и уравнением электрического потенциала заряженной частицы в однородном диэлектрике и выражая массу льдинки через радиус, можем записать

$$\frac{dr}{dt} = \frac{3Dcf(q_w - q)}{r^2\rho}, \quad (1)$$

где r – радиус частицы, $(q_w - q)$ – разность плотностей водяного пара в окружающем пространстве и у поверхности льдинки, f – ветровой множитель, A – емкость, D – коэффициент диффузии водяного пара в воздухе.

По схеме Мейсона [Шишкин, 1964], учитывая, что плотность водяного пара q связана с его упругостью p

$$q = \frac{pM}{RT}, \quad (2)$$

где M – молекулярный вес воды, R – универсальная газовая постоянная, T – температура среды, для скорости роста радиуса частицы (1) запишем

$$\frac{dr}{dt} \frac{r^2\rho}{3Dcf} \frac{RT}{M} = p_w(T) - p(T_i), \quad (3)$$

где T_i – температура поверхности льдинки.



Принимая во внимание уравнение баланса теплоты, в которой выделение скрытой теплоты сублимации должно компенсироваться теплоотдачей в окружающую среду запишем

$$L \frac{dr}{dt} = \frac{3ckf}{r^2\rho} (T_i - T). \quad (4)$$

Зависимость упругости пара, насыщенного над льдом, от температуры получаем из формулы Клайперона-Клаузиуса

$$\frac{1}{p} \frac{dp}{dT} = \frac{LM}{RT^2}. \quad (5)$$

Интегрируя (5), получим:

$$\ln \frac{p(T_i)}{p(T)} = \frac{LM}{R} \frac{T_i - T}{TT_i}. \quad (6)$$

Принимая $T \approx T_i$

$$\frac{p(T_i) - p(T)}{p(T)} = \frac{LM}{R} \frac{T_i - T}{T^2}. \quad (7)$$

С учетом (4), (7) примет вид

$$p(T_i) - p(T) = \frac{LM}{R} \frac{p(T)}{T^2} \frac{Lr^2\rho}{3ckf} \frac{dr}{dt}. \quad (8)$$

Складывая (3) и (8) с учетом, что $\frac{p_w(T) - p(T)}{p(T)} = \varepsilon$ – относительное пересыщение по отношению ко льдинке при температуре T , получаем:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{3cf\varepsilon}{r^2\rho \left(\frac{RT}{DMp(T)} + \frac{L^2M}{RT^2k} \right)}. \quad (9)$$

В (9) выражение

$$\frac{\varepsilon}{\frac{RT}{DMp(T)} + \frac{L^2M}{RT^2k}} = B, \quad (10)$$

было вычислено Б.Дж. Мейсоном, при влажности воздуха, соответствующей насыщенности над водой.

Уравнение (1) с учетом вышесказанного можно привести к виду

$$\frac{dr}{dt} = \frac{3cfB}{r^2\rho}, \quad (11)$$

где $B = \varepsilon / \left(\frac{RT}{DMp(T)} + \frac{L^2M}{RT^2k} \right)$ – показатель Мейсона (вычислено Б. Дж. Мейсоном), $\varepsilon = \frac{p_w(T) - p(T)}{p(T)}$ – относительное пересыщение по отношению ко льдинке при температуре T .

Уравнение движения (11) не учитывает, что облако, как правило имеет фрактальную структуру [Feder, 1988; Rys, Waldfoegel, 1985]. Учет этого фактора принципиально меняет уравнение (11), превращая его в дифференциальное уравнение сублимационного роста дробного порядка.



По аналогии с работами [Кумыков, 2016] введем эффективную скорость изменения радиуса частицы с использованием аппарата теории дробного дифференцирования, учитывающую фрактальность среды

$$\left\langle \frac{dr(t)}{dt} \right\rangle = \frac{1}{\tau} D_{0t}^{\alpha-1} \frac{dr(t)}{dt} = \frac{1}{\tau} \partial_{0t}^{\alpha} r(t), \quad 0 < \alpha < 1, \quad (12)$$

где D_{at}^{α} – оператор дробного интегро-дифференцирования Римана-Лиувилля, которая определяется следующим образом:

$$D_{at}^{\alpha} r(t) = \begin{cases} \frac{\text{sign}(t-a)}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^t \frac{r(s) ds}{|t-s|^{\alpha+1}}, & \alpha < 0, \\ r(t), & \alpha = 0, \\ \text{sign}^n(t-a) \frac{\partial^n}{\partial t^n} D_{at}^{\alpha-n} r(t), & n-1 < \alpha \leq n, n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

, где $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера, $\partial_{0t}^{\alpha} r(t)$ – дробная производная по Капуто ($\partial_{at}^{\alpha} r(t) = \text{sign}^n(a-t) D_{at}^{\alpha-n} \frac{\partial^n r(t)}{\partial t^n}$, $n-1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}$), α – феноменологический параметр (в нашем случае – показатель фрактальности среды), τ – характерное время процесса, а также заменяя в (10) D на D_f – коэффициент фрактальной диффузии, при котором B переходит в B_f – фрактальный показатель Мейсона, (11) принимает вид

$$\partial_{0t}^{\alpha} r(t) = \frac{3cf\tau B_f}{\rho r^2(t)}, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (13)$$

Запишем общую схему, эквивалентную уравнению (13), которая позволит определить более эффективную модель роста частицы при различных усреднениях в виде

$$\partial_{0t}^{\alpha} r^n(t) = n r^{n-3}(t) \gamma, \quad (14)$$

где n – степень усреднения.

При $n = 1$ относительно схемы (14) уравнение (13) перепишем в виде

$$\partial_{0t}^{\alpha} r(t) = r^{-2}(t) \gamma, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (15)$$

где $\gamma = \frac{3cf\tau B_f}{\rho}$.

Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка (15) с начальными условиями

$$r(0) = r_0. \quad (16)$$

Задача типа Коши для дифференциальных уравнений с дробной производной Римана-Лиувилля исследована в работе [Самко и др. 1987].

Для нахождения приближенного решения данной задачи воспользуемся разностным методом, предложенным в работе [Shkhanukov-Lafishev, 2006]. С этой целью на отрезке $[0, T]$ введем сетку $\bar{\omega}_h = \{jh, j = 0, 1, 2, \dots, N\}$ с шагом $h = T/N$ по времени, где N – натуральное число.

Дифференциальной задаче (15)–(16) поставим в соответствие следующую разностную схему:

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^j (t_{j-s+1}^{1-\alpha} - t_{j-s}^{1-\alpha}) y_{t,s} = f(t_j, y_j), \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (17)$$



$$y_0 = r_0, \tag{18}$$

где $\Delta_{0t_j}^\alpha y = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^j (t_{j-s+1}^{1-\alpha} - t_{j-s}^{1-\alpha}) y_{t,s}$ – дискретный аналог дробной производной, $y_{t,s} = \frac{y_{s+1} - y_s}{h}$ – правая разностная производная, $f(t_j, y_j) = \frac{3Af\tau B_f}{\rho y_j^2}$.

Схема (17) – (18) является явной:

$$y_{j+1} = y_j + h^\alpha \Gamma(2 - \alpha) \left[f(t_j, y_j) - \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^{j-1} (t_{j-s+1}^{1-\alpha} - t_{j-s}^{1-\alpha}) y_{t,s} \right], \tag{19}$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, N - 1.$$

Решение разностной задачи y сходится к решению r соответствующей дифференциальной задачи со скоростью $O(h^\alpha)$.

Исходя из того, что процессы и системы, описываемые с помощью производных дробного порядка, являются фрактальными, рассматриваемый в данной работе процесс сублимационного роста ледяных частиц тоже является фрактальным. Такие процессы рассмотрены в работах [Кумыков, 2015; Кумыков, Паровик, 2015], в которых проводилось моделирование изменения заряда облачных капель во фрактальной облачной среде с использованием аппарата дробного исчисления.

При $n = 2$ относительно схемы (14) уравнение (13) примет следующий вид

$$\partial_{0t}^\alpha r^2(t) = \frac{2\gamma}{r(t)}, 0 < \alpha < 1. \tag{20}$$

Обозначим $r^2(t) = y$. Тогда уравнение (20) примет вид:

$$\partial_{0t}^\alpha C = \frac{2\gamma}{\sqrt{C}}, 0 < \alpha < 1. \tag{21}$$

С использованием оператора Римана – Лиувилля уравнение (21) примет вид

$$D_{0t}^{\alpha-1} C' = \frac{2\gamma}{\sqrt{C}}, 0 < \alpha < 1. \tag{22}$$

Подействуем на (22) обратным оператором $D_{0t}^{1-\alpha}$. Тогда получаем

$$C' = 2\gamma D_{0t}^{1-\alpha} C^{-\frac{1}{2}}, 0 < \alpha < 1. \tag{23}$$

При помощи формулы дробного дифференцирования для степенных функций [Псху, 2005] уравнение (23) принимает вид

$$C' = 2\gamma \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha - \frac{1}{2})} C^{\alpha - \frac{3}{2}}, 0 < \alpha < 1. \tag{24}$$

Перепишем последнее в следующем виде:

$$\frac{\Gamma(\alpha - \frac{1}{2})}{2\gamma\sqrt{\pi}} C^{-\alpha + \frac{3}{2}} dy = dt, 0 < \alpha < 1. \tag{25}$$

Возьмем интеграл от обеих частей последнего равенства:

$$\Gamma\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2\gamma\sqrt{\pi}} \int C^{-\alpha + \frac{3}{2}} dy = \int dt, 0 < \alpha < 1. \tag{26}$$



Общее решение (26) имеет вид

$$y = \frac{5}{2-\alpha} \sqrt{\frac{\gamma\sqrt{\pi}(5-2\alpha)t}{\Gamma(\alpha-\frac{1}{2})}} + C_2, \quad (27)$$

где $C_2 = \frac{C_1\gamma\sqrt{\pi}(5-2\alpha)}{\Gamma(\alpha-\frac{1}{2})}$, $C_1 = \text{const}$.

С учетом (27) решение задачи Коши для уравнения (20) с начальным условием

$$r(0) = r_0 \quad (28)$$

имеет вид

$$r(t) = \frac{5-2\alpha}{\Gamma(\alpha-\frac{1}{2})} \sqrt{\gamma\sqrt{\pi}(5-2\alpha)} (t + C_1). \quad (29)$$

При $n = 3$ относительно схемы (14) уравнение (13) принимает следующий вид:

$$\partial_{0t}^\alpha r^3(t) = 3\gamma, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (30)$$

Решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка (30) с начальным условием

$$r(0) = r_0. \quad (31)$$

имеет вид

$$r(t) = \sqrt[3]{3\gamma \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}} + r_0. \quad (32)$$

Полученные результаты позволяют провести сравнительный анализ поведения сублимационного роста льдинок во фрактальной облачной среде по сравнению со сплошной средой. Видно, что графики решений задачи (31)–(32) при различных α развиваются медленнее, чем с аналогичным процессом в сплошной среде. Зона фрактального эффекта находится ниже и более сконцентрирована в отличие от результатов задачи (15)–(16).

Видно, что при изменении степени усреднения n графики сублимационного роста льдинок при одинаковых показателях параметра α ведут себя аномально. При $\alpha = 1$ и $\alpha = 0,9$ графики практически идентичные, а при $\alpha = 0,6$ и $\alpha = 0,3$ наблюдается резкий скачок и дальнейшее замедление в динамике роста частицы.

3. Результаты моделирования

Численное моделирование проводилось с помощью программы Maple 18. На рис. 1 показаны графики приближенных решений задачи (15)–(16) при различных значениях показателя фрактальности α . При этом функции были приведены к безразмерному виду, где в качестве характерной длины взято начальное значение r_0 .

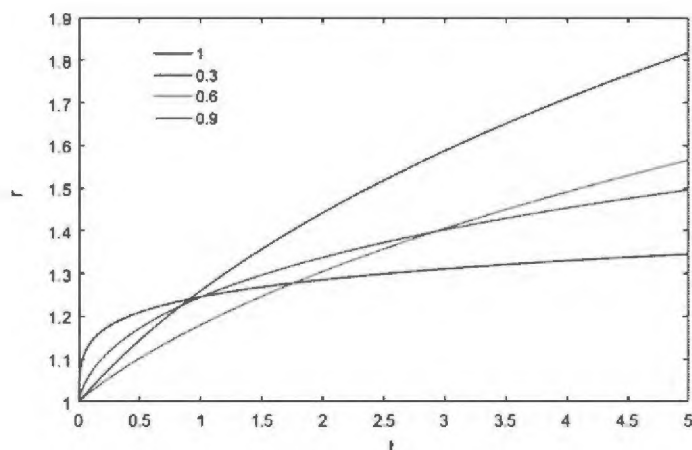


Рис. 1. Графики решений задачи (15)–(16) при различных α
 Fig. 1. Graphs of solutions to the problem (15)–(16) for different α

Из рисунка видно, что при малых значениях параметра α происходит резкий скачок радиуса ледяных частиц, а затем, после перехода через зону действия фрактального эффекта, замедляется. Под зоной фрактального эффекта понимаем область, в которых графики, лежащие в области $0 < \alpha < 1$, пересекаются с графиком при $\alpha = 1$. Это область, в которой начинается проявление фрактальных свойств. Исходя из этого, можно сделать предположение, что процессы во фрактальных облачных средах протекают значительно медленнее, нежели в сплошных. Отметим, что аналогичные результаты можно получить с помощью приближенной формулы для дробной производной, полученной в работе [Sweilam и др. 2012].

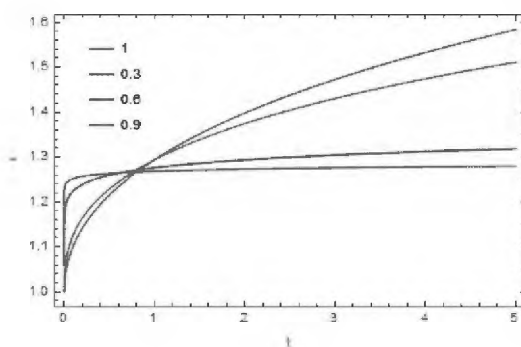


Рис. 2. Графики решений задачи (20)–(28) при различных α
 Fig. 2. Graphs of solutions to the problem (20)–(28) for different α

На рисунке 2 представлены графики численного решения задачи для разных значений α ($\alpha = 0,3$; $\alpha = 0,6$; $\alpha = 0,9$; $\alpha = 1$) с использованием Matlab 2017.

Из рисунка видно, что при малых значениях параметра α происходит резкий скачок радиуса льдинок, а затем, после перехода через зону действия фрактального эффекта, замедляется. Из результатов, представленных на рисунке 2, можно сделать вывод, что предложенная модель находится в хорошем согласии с точным решением.

На рис. 3 показаны графики приближенных решений задачи (31)–(32) при различных значениях показателя фрактальности α . Видно, что при изменении показателя

параметра α графики идентичны графикам, полученным выше. Также можно заметить на рисунках 1–3, что при различных показателях n зоны действия фрактального эффекта лежат на разных уровнях (чем больше n , тем ниже уровень зоны).

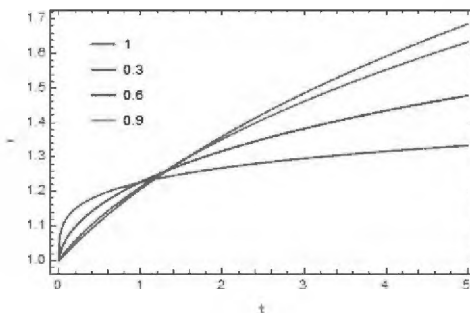


Рис. 3. Графики решений задачи (31)–(32) при различных α
 Fig. 3. Graphs of solutions to the problem (31)–(32) for different α

Полученные результаты позволяют провести сравнительный анализ поведения сублимационного роста льдинок во фрактальной облачной среде по сравнению со сплошной средой. Видно, что графики решений задачи (31)–(32) при различных α развиваются медленнее, чем с аналогичным процессом в сплошной среде. Зона фрактального эффекта находится ниже и более сконцентрирована в отличие от результатов задачи (15)–(16).

4. Заключение

В работе с помощью численных методов был исследован процесс сублимационного роста ледяных частиц с учетом фрактальности облачной среды. Сублимационный рост ледяных частиц играет существенную роль при зарождении грозовых облаков, а фрактальность самой среды непосредственно оказывает влияние на процесс сублимации.

Можно отметить, что полученные численные результаты при сублимационном росте ледяных частиц находятся в хорошем согласии с точным решением. Представленные формулы могут быть использованы для расчета изменения радиуса частиц облака под влиянием процесса сублимации льдинок с заданными параметрами с учетом фрактальности среды. Проведенные численные эксперименты для оценки влияния фрактальности среды на рост ледяных частиц при различных сочетаниях микрофизических параметров показали общую зависимость роста льдинок от параметра фрактальности среды, выражающуюся в резком скачке, а затем в уменьшении скорости роста при различных значениях параметра фрактальности. При различных значениях фрактальности среды выявлены зоны начала действия фрактального эффекта на величину ледяных частиц.

Список литературы References

1. Кумыков Т.С. 2016. Динамика заряда облачных льдинок во фрактальной среде. Математическое моделирование. 12:56–62.
 Kumykov T.S. 2016. Dinamika zarjada oblachnyh l'dinok vo fraktal'noj srede. Matematicheskoe modelirovanie. 12:56–62.
2. Кумыков Т.С. 2015. Моделирование динамики заряда пузырьков во фрактальных облачных каплях. Известия КБНЦ РАН, 1(6):23–27.



- Kumykov T.S. 2015. Modelirovanie dinamiki zarjada puzyr'kov vo fraktal'nyh oblachnyh kapljah. *Izvestija KBNC RAN*, 1(6):23–27.
3. Кумыков Т.С., Паровик Р.И. 2015. Математическое моделирование закона изменения заряда облачных капель во фрактальной среде. *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*. 10(1): 12–17.
Kumykov T.S., Parovik R.I. 2015. Matematicheskoe modelirovanie zakona izmeneniya zarjada oblachnyh kapel' vo fraktal'noj srede. *Vestnik KRAUNC. Fiziko-matematicheskie nauki*. 10(1): 12–17.
4. Мучник В.М. 1974. Физика грозы. Издательство: Гидрометеиздат, 352 с.
Muchnik V.M. 1974. *Fizika grozy [Physics of thunderstorms]*. Izdatel'stvo: Gidrometeoizdat, 352 s.
5. Псху А.В. 2005. Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными дробного и континуального порядка. Нальчик: Издательство КБНЦ РАН. 185 с.
Pshu A.V. 2005. Kraevye zadachi dlja differencial'nyh uravnenij s chastnymi proizvodnymi drobnogo i kontinual'nogo porjadka. Nal'chik: Izdatel'stvo KBNC RAN. 185 s.
6. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. 1987. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника. 688 с.
Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. 1987. *Integraly i proizvodnye drobnogo porjadka i nekotorye ih prilozhenija*. Minsk: Nauka i tehnik. 688 s.
7. Шишкин Н.С. 1964. Облака, осадки и грозовое электричество. Л: Гидрометеиздат, 402 с.
Shishkin N.S. 1964. *Oblaka, osadki i grozovoe jelektrichestvo*. L: Gidrometeoizdat, 402 s.
8. Feder J. 1988. *Fractals*. New York: Plenum Press. 312.
9. Iudin D.I., Trakhtengerts V.Y., Hayakawa M. 2003. Fractal dynamics of electric discharges in a thundercloud. *Phys. Rev. E*. V. 68. P. 016601.
10. Rys F., Waldvogel A. 1985. Analysis of the fractal dimension in clouds with powerful convective currents. *Fractals in Physics Proceedings of the VI International Symposium on Fractals in Physics*. ICTP, Trieste, Italy, 644–649.
11. Shkhanukov-Lafishev M.Kh., Taukenova F.I. 2006. Difference methods for solving boundary value problems for fractional differential equations *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 46 (10): 1785–1795.
12. Sweilam N.H., Khader M.M., Mahdy A.M.-S. 2012. Numerical studies for solving fractional-order logistic equation, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 78 (8): 1199–1210.

Ссылка для цитирования статьи**Reference to article**

Кумыков Т.С. 2019. Сублимационный рост ледяных частиц во фрактальных облаках. *Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика*. 51 (3): 435–443. Doi: 10.18413/2075-4639-2019-51-3-435-443.

Kumykov T.S. 2019. Sublimation growth of ice particles in fractality clouds. *Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics*. 51 (3): 435–443 (in Russian). Doi: 10.18413/2075-4639-2019-51-3-435-443.