УДК 511.512
DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-3-374-386

ЧИСЛО РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ С КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ РАЗНЫХ ДИСКРИМИНАНТОВ

A NUMBER OF SOLUTIONS THE EQUATION WITH QUADRATIC FORMS OF DIFFERENT DISCRIMINANTS

Л.Н. Куртова

L.N. Kurtova

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, Белгород, ул. Победы, 85

Belgorod National Research University,
85 Pobeda St., Belgorod, 308015, Russia

E-mail: kurtova@bsu.edu.ru

Аннотация

В работе рассматривается бинарная аддитивная задача с квадратичными формами, которая является аналогом классической проблемы делителей Ингама. Получена асимптотическая формула для числа решений уравнения $Q_1(\overline{m}) - Q_2(\overline{k}) = h$, содержащего бинарные положительно определенные примитивные квадратичные формы, соответствующие классам идеалов двух мнимых квадратичных полей разных фиксированных дискриминантов. Число решений уравнения ищется с весами $\exp(-(Q_1(\overline{m}) + Q_2(\overline{k}))/n)$ при росте параметра n. Доказательство асимптотической формулы основано на круговом методе. За счет точных формул для двойных сумм Гаусса от числа, взаимно простого с дискриминантами мнимых квадратичных полей, удается применить оценку А. Вейля к полученной сумме Клоостермана.

Abstract

In this article, the problem with quadratic forms is considered. This problem is analog of the Ingam binary additive divisor problem. The asymptotical formula of the number of solution of diophantine equation $Q_1(\overline{m}) - Q_2(\overline{k}) = h$ is received. Binary positive defined primitive quadratic forms $Q_1(\overline{m})$ and $Q_2(\overline{k})$ corresponded to the ideal classes of two imaginary quadratic fields of different fixed discriminants. The number of solutions searched with weights $\exp(-(Q_1(\overline{m}) + Q_2(\overline{k}))/n)$ with the growth of the parameter n. Proof of the asymptotical formula based on circular method. Using the evident formula of Gauss sums of the number, which coprimes of discriminants of fields, this sum represented of Kloosterman's sum which estimate by A. Weil.

Ключевые слова: аддитивная задача, асимптотическая формула, число решений, двойная сумма Гаусса, сумма Клоостермана.
Key words: additive problem, asymptotic formula, number of solutions, double Gauss sum, Kloosterman sum.

Введение

В 1927 году А.Е. Ингам [Ingham, 1927] поставил и решил элементарным методом задачу получения асимптотической формулы для числа решений $J(n)$ уравнения:

$$x_1x_2 - x_3x_4 = 1, \quad x_1x_2 \le n,$$

где $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N}$.

Эта задача получила название неопределенной бинарной аддитивной проблемы делителей.

А.Е. Ингам доказал, что $J(n) = \frac{6}{\pi^2} n \ln^2 n + O(n \ln n)$.

Оценка остатка асимптотической формулы уточнялась многими авторами.

В 1931 году Т. Эстерман [Estermann, 1931], применив к задаче Ингама круговой метод, вывел для числа решений $J(n)$ уравнения асимптотическую формулу, остаточный член которой имеет степенное понижение по сравнению с главным. Им получен следующий результат: $J(n) = nP_2(\ln n) + R(n)$, где $P_2(x)$ – многочлен 2-ой степени, а $R(n) = O(n^{11/12} \cdot \ln^{17/3} n)$.

В 1979 году Д.И. Исмоилов [Исмоилов, 1979], дополнив элементарный метод Т. Эстермана оценками А. Вейля [Weil, 1948] суммы Клоостермана, получил следующую оценку остатка: $R(n) \ll n^{5/6+\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малая постоянная.

В 1979 году другим методом ту же оценку для $R(n)$ получил Д.Р. Хиз-Браун [Heath-Brown, 1979].

В 2006 году Г.И. Архипов и В.Н. Чубариков [Архипов, Чубариков, 2006] вывели новую оценку остатка: $R(n) \ll n^{3/4} \ln^4 n$.

В 1980 году Н.В. Кузнецов [Кузнецов, 1980] представил сумму сумм Клоостермана через билинейные формы коэффициентов Фурье собственных функций оператора Лапласа и показал, что между суммами Клоостермана существует интерференция.

В 1982 году Ж.-М. Дезуйе и Х. Иванец [Deshouillers, Iwaniec, 1982], используя формулу Н.В. Кузнецова, доказали, что $R(n) \ll n^{2/3+\varepsilon}$.

Другое направление исследований, касающееся данной тематики, связано с рассмотрением различных аналогов проблемы делителей Ингама. Одним из таких аналогов являются бинарные аддитивные задачи с квадратичными формами.

В работах автора [2007], [2012], [2014] решены задачи получения асимптотических формул для числа решений уравнений $Q_1(\overline{m}) - Q_2(\overline{k}) = 1$, $Q_1(\overline{m}) - Q_2(\overline{k}) = h$, содержащих бинарные положительно определенные примитивные квадратичные формы, соответствующие классам идеалов мнимого квадратичного поля $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, где d – отрицательное бесквадратное число.

Рассмотрим задачу получения асимптотической формулы для числа решений уравнения $Q_1(\overline{m}) - Q_2(\overline{k}) = h$ с весом $\exp(-(Q_1(\overline{m}) + Q_2(\overline{k})/n)$, когда квадратичные формы соответствуют классам идеалов двух мнимых квадратичных полей разных дискриминантов.

Пусть d_1, d_2 – отрицательные бесквадратные числа, $F_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{d_1})$, $F_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{d_2})$ – мнимые квадратичные поля, δ_{F_1}, δ_{F_2} – дискриминанты полей F_1 и F_2; $Q_i(\overline{m}) = \frac{1}{2}\overline{m}^t A_i \overline{m}$ – бинарные положительно определенные примитивные квадратичные формы с матрицами A_i, $\det A_i = -\delta_{F_i}$, $i = 1, 2$.

Пусть

$$I(n,h) = \sum_{Q_1(\overline{m}) - Q_2(\overline{k}) = h} e^{-(Q_1(\overline{m}) + Q_2(\overline{k}))/n}.$$

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. Пусть ε – произвольное положительное число, δ_{F_1}, δ_{F_2} – дискриминанты полей F_1 и F_2, $n \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{N}$.

Тогда при $n \to \infty$ и $h \ll n^{\varepsilon}$ справедлива асимптотическая формула:

$$I(n,h) = \frac{2\pi^2 n}{\sqrt{\delta_{F_1}\delta_{F_2}}} \sum_{q=1}^{+\infty} q^{-4} \sum_{\substack{l=1,\\ (l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i \frac{hl}{q}} G_1(q,l,\overline{0}) G_2(q,-l,\overline{0}) + O(n^{3/4+\varepsilon}).$$

$G_i(q,l,\overline{0}) = \sum\limits_{\overline{m}(\mod q)} \exp(2\pi i l Q_i(\overline{m})/q)$ $(i=1,2)$ – двойные суммы Гаусса. Сумма особого ряда асимптотической формулы положительна.

2. Вспомогательные леммы

Лемма 1. (Функциональное уравнение для двумерного тета-ряда.) Пусть $Im\tau > 0$, $\overline{x} \in \mathbb{R}^2$, $Q(\overline{n})$ – положительно определенная квадратичная форма дискриминанта δ_F с матрицей A,

$$\theta(\tau,\overline{x}) = \sum_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^2} \exp(2\pi i\tau Q(\overline{n}+\overline{x})).$$

Тогда

$$\theta(\tau,\overline{x}) = \frac{i}{\tau\sqrt{\delta_F}} \sum_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^2} \exp\left(-\frac{\pi i}{\tau}\overline{n}^t A^{-1}\overline{n} + 2\pi i \overline{n}^t\overline{x}\right).$$

Доказательство см. в [Ogg, 1969, глава VI].

Лемма 2. Пусть h – натуральное число, такое, что $h \ll n^{\varepsilon}$, $q,q',q'' \le N$. Тогда справедливо равенство

$$\int\limits_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \frac{e^{-2\pi i h x}}{n^{-2}+4\pi^2x^2}dx = \frac{n}{2} + O(qN).$$

Доказательство следует из [Лаврентьев, Шабат, 1958, глава VI] и условия $h \ll n^{\varepsilon}$.

Лемма 3. (Оценка суммы Клоостермана.) Пусть $ll^* \equiv 1(\mod q)$, $K(q,u,v) = \sum\limits_{\substack{l=1,\\ (l,q)=1}}^{q} \exp\left(2\pi i(ul+vl^*)/q\right)$ – сумма Клоостермана. Справедлива оценка

$$K(q,u,v) \ll \tau(q) q^{1/2}(u,v,q)^{1/2}.$$

Доказательство см., например, в работах [Estermann, 1961], [Малышев, 1962].

Лемма 4. (Равенства и оценки для произведения двойных сумм Гаусса.) Пусть $D_1 = -\delta_{F_1}$, $D_2 = -\delta_{F_2}$. Пусть $Q_1(\overline{m})$, $Q_2(\overline{k})$ – бинарные положительно определенные примитивные квадратичные формы с дискриминантами D_1, D_2; $(l,q)=1$. Справедливы следующие утверждения:

1. Пусть $(q,D_1)=1$ и $(q,D_2)=1$, $ll^* \equiv 1(\mod q)$, $D_1D_1^* \equiv 1(\mod q)$, $D_2D_2^* \equiv 1(\mod q)$, $q = 2^{\alpha_1}\dots p_s^{\alpha_s}$. Тогда

$$G_1(q,l,\overline{m})G_2(q,-l,\overline{k}) = C(q,\delta_{F_1},\delta_{F_2})q^2 \exp\left(-2\pi i\frac{l^*}{q}(D_1^*Q_1'(\overline{m}) - D_2^*Q_2'(\overline{k}))\right),$$

где $C(q,\delta_{F_1},\delta_{F_2})=(-1)^{\frac{(2-\delta_{F_1}-\delta_{F_2})\alpha_1}{4}}\left(\dfrac{\delta_{F_1}\delta_{F_2}}{p_2^{\alpha_2}\dots p_s^{\alpha_s}}\right)$.

2. При любых q и D_1, D_2 справедливо неравенство:

$$G_1(q,l,\overline{m})G_2(q,-l,\overline{k})\ll q^2.$$

□ 1. Пусть $(q,D_1)=1$. Введем обозначения: $r_j=q/p_j^{\alpha_j}$, $ll^*\equiv 1(\mod q)$, $r_jr_j^*\equiv 1(\mod p_j^{\alpha_j})$, $D_1D_{1j}^*\equiv 1(\mod p_j^{\alpha_j})$, $(j=1\dots s)$. Тогда $G_1(q,l,\overline{m})=\prod\limits_{j=1}^{s}G_1(p_j^{\alpha_j},lr_j,\overline{m})$.

Если $2|q$, то $2\nmid D_1$, следовательно, $\delta_{F_1}\equiv 1(\mod 4)$. Если $2|D_1$, то $\alpha_1=0$.

Для $G_1(p_j^{\alpha_j},lr_j,\overline{m})$ известны точные формулы (см, например, [Гриценко, 2003], [Пачев, Дохов, 2013]). Можем утверждать, что

$$G_1(q,l,\overline{m})=q\exp\left(-2\pi i\frac{l^*}{q}Q_1'(\overline{m})(r_1r_1^*D_{11}^*+\ldots+r_sr_s^*D_{1s}^*)\right)(-1)^{\frac{(1-\delta_{F_1})\alpha_1}{4}}\left(\frac{\delta_{F_1}}{p_2^{\alpha_2}\dots p_s^{\alpha_s}}\right).$$

Докажем сравнение

$$r_1r_1^*D_{11}^*+\ldots+r_sr_s^*D_{1s}^*\equiv D_1^*(\mod q).$$

Так как $(q,D_1)=1$ и $D_1D_{1j}^*\equiv 1(\mod p_j^{\alpha_j})$, $(j=1\dots s)$, $D_1D_1^*\equiv 1(\mod q)$, то

$$D_1\left(r_1r_1^*D_{11}^*+\ldots+r_sr_s^*D_{1s}^*\right)\equiv D_1D_1^*\equiv 1(\mod q),$$

и достаточно доказать сравнение $r_1r_1^*+\ldots+r_sr_s^*\equiv 1(\mod q)$, которое эквивалентно системе сравнений

$$\begin{cases} r_1r_1^*+\ldots+r_sr_s^*\equiv r_1r_1^*\equiv 1(\mod 2^{\alpha_1}),\\ \dots\\ r_1r_1^*+\ldots+r_sr_s^*\equiv r_sr_s^*\equiv 1(\mod p_s^{\alpha_s}).\end{cases}$$

Тогда

$$G_1(q,l,\overline{m})=(-1)^{\frac{(1-\delta_{F_1})\alpha_1}{4}}\left(\frac{\delta_{F_1}}{p_2^{\alpha_2}\dots p_s^{\alpha_s}}\right)q\exp\left(-2\pi i\frac{l^*}{q}D_1^*Q_1'(\overline{m})\right).$$

Аналогичное равенство справедливо и для $G_2(q,-l,\overline{k})$. Запишем произведение сумм Гаусса:

$$G_1(q,l,\overline{m})G_2(q,-l,\overline{k})=C(q,\delta_{F_1},\delta_{F_2})q^2\exp\left(-2\pi i\frac{l^*}{q}(D_1^*Q_1'(\overline{m})-D_2^*Q_2'(\overline{k}))\right),$$

где $C(q,\delta_{F_1},\delta_{F_2})=(-1)^{\frac{(2-\delta_{F_1}-\delta_{F_2})\alpha_1}{4}}\left(\dfrac{\delta_{F_1}\delta_{F_2}}{p_2^{\alpha_2}\dots p_s^{\alpha_s}}\right)$.

2. В случае, когда $(q,D_1)=1$ и $(q,D_2)=1$, неравенство следует из полученной выше формулы для произведений сумм Гаусса. В остальных случаях требуемая оценка следует из точных формул для сумм Гаусса от степени простого числа, полученных С.А. Гриценко [2003], [2012]. ■

Лемма 5. Пусть $V(q,h,\overline{m},\overline{k})=\sum\limits_{\substack{l=1,\\(l,q)=1}}^{q}e^{-2\pi ihl/q}G_1(q,l,\overline{m})G_2(q,-l,\overline{k})$. Пусть $q=q_1q_2$, $(q_1,q_2)=1$, $(q_1,D_1)=1$, $(q_1,D_2)=1$; q_2 – либо 1, либо натуральное число, все простые делители которого делят D_1 или D_2. Тогда справедливы оценки:

$$V(q_1q_2, h, \overline{0}, \overline{0}) \ll q_1^2 \sum_{s|(q_1,h)} s\mu\left(\frac{q_1}{s}\right) q_2^3,$$

$$V(q_1q_2, h, \overline{m}, \overline{k}) \ll q_1^{5/2+\varepsilon}(h, q_1)^{1/2} q_2^3.$$

□ Так как сумма Гаусса является вполне мультипликативной функцией, т. е.

$$G_1(q_1q_2, l, \overline{m}) = G_1(q_1, l_1q_2^2, \overline{m}) G_1(q_2, l_2q_1^2, \overline{m}),$$

то и функция $V(q, h, \overline{m}, \overline{k})$ мультипликативна. Тогда

$$V(q_1q_2, h, \overline{m}, \overline{k}) = V_1(q_1, h, q_2, \overline{m}, \overline{k}) V_2(q_2, h, q_1, \overline{m}, \overline{k}).$$

Оценим каждую из функций $V_1(q_1, h, q_2, \overline{m}, \overline{k})$ и $V_2(q_2, h, q_1, \overline{m}, \overline{k})$. Воспользуемся равенством и оценкой из леммы 4.

Так как $(q_1, D_1) = 1$ и $(q_1, D_2) = 1$, то из равенства для произведений сумм Гаусса имеем:

$$V_1(q_1, h, q_2, \overline{m}, \overline{k}) \ll q_1^2 \sum_{\substack{l_1=1,\\ (l_1,q_1)=1}}^{q_1} \exp\left(-2\pi i h\frac{l_1}{q_1} - 2\pi i \frac{{l_1}^*(q_2^2)^*}{q_1}(D_1^* Q_1'(\overline{m}) - D_2^* Q_2'(\overline{k}))\right).$$

К полученной сумме Клоостермана $K\left(q_1, -h, -(q_2^2)^*(D_1^* Q_1'(\overline{m}) - D_2^* Q_2'(\overline{k}))\right)$ применим оценку из леммы 3. При любом q_1 получим: $V_1(q_1, h, q_2, \overline{m}, \overline{k}) \ll q_1^{5/2+\varepsilon}(h, q_1)^{1/2}$.

В случае, когда $\overline{m} = \overline{0}$, $\overline{k} = \overline{0}$, можем улучшить данную оценку. Имеем:

$$V_1(q_1, h, q_2, \overline{0}, \overline{0}) \ll q_1^2 \left| \sum_{\substack{l_1=1,\\ (l_1,q_1)=1}}^{q_1} e^{-2\pi i h l_1/q_1} \right| \ll q_1^2 \sum_{s|(q_1,h)} s\mu\left(\frac{q_1}{s}\right).$$

Оценим тривиально $V_2(q_2, h, q_1, \overline{m}, \overline{k})$. Используем неравенство из леммы 4. Тогда

$$V_2(q_2, h, q_1, \overline{m}, \overline{k}) \ll q_2^2 \left| \sum_{\substack{l_2=1,\\ (l_2,q_2)=1}}^{q_2} e^{-2\pi i h l_2/q_2} \right| \ll q_2^3\ . \quad \blacksquare$$

3. Доказательство теоремы

1. Запишем $I(n, h)$ в виде интеграла:

$$I(n, h) = \int_0^1 S_1(\alpha) S_2(\alpha) e^{-2\pi i \alpha h} d\alpha,$$

где

$$S_1(\alpha)=\sum_{\overline{m}\in\mathbb{Z}^2} e^{(-1/n+2\pi i\alpha)Q_1(\overline{m})},\quad S_2(\alpha)=\sum_{\overline{k}\in\mathbb{Z}^2} e^{(-1/n-2\pi i\alpha)Q_2(\overline{k})}.$$

Пусть $N=[\sqrt{n}]$, $\xi_{0,1}=[-\frac{1}{N},\frac{1}{N})$. Разобьем промежуток $[\frac{1}{N},1-\frac{1}{N})$ числами ряда Фарея, отвечающего параметру N(см. [Виноградов, 2004]). Пусть $\frac{l''}{q''}<\frac{l}{q}<\frac{l'}{q'}$ – соседние дроби Фарея, $1\le l,q\le N$, $q'\le N$, $q''\le N$.

Определим промежутки $\xi_{l,q}=[l/q-1/q(q+q''),l/q+1/q(q+q'))$. По построению имеем: $\left[-\frac{1}{N},1-\frac{1}{N}\right)=\bigcup\limits_{q=1}^{N}\bigcup\limits_{\substack{l=0,\\(l,q)=1}}^{q-1}\xi_{l,q}$, причем $\xi_{l,q}\cap\xi_{l',q'}=\emptyset$ при $(l,q)\ne(l',q')$. Тогда

$$I(n,h)=\sum_{q\le N}\sum_{\substack{l=1,\\(l,q)=1}}^{q}\int\limits_{\xi_{l,q}} S_1(\alpha)S_2(\alpha)e^{-2\pi ih\alpha}d\alpha=$$

$$=\sum_{q\le N}\sum_{\substack{l=1,\\(l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi ihl/q}\int\limits_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} S_1(l/q+x)S_2(l/q+x)e^{-2\pi ihx}dx.$$

2. Преобразуем суммы $S_1(l/q+x)$ и $S_2(l/q+x)$.

$$S_1(l/q+x)=\sum_{\overline{m}\in\mathbb{Z}^2}\exp\left((-n^{-1}+2\pi il/q+2\pi ix)Q_1(\overline{m})\right).$$

Разобьем сумму по $\overline{m}$ по арифметическим прогрессиям с разностью q:

$$S_1(l/q+x)=\sum_{\overline{s}\pmod q} e^{2\pi il/qQ_1(\overline{s})}\sum_{\substack{\overline{m}\in\mathbb{Z}^2,\\ \overline{m}\equiv\overline{s}\pmod q}} e^{(-n^{-1}+2\pi ix)Q_1(\overline{m})}=$$

$$=\sum_{\overline{s}\pmod q} e^{2\pi ial/qQ_1(\overline{s})}\theta\left((x+\frac{i}{2\pi n})q^2,\overline{s}/q\right),$$

где $\theta\left((x+\frac{i}{2\pi n})q^2,\overline{s}/q\right)$ – двумерный тета-ряд.

Используем функциональное уравнение для тета-ряда из леммы 1. Будем иметь:

$$\theta\left(\left(x+\frac{i}{2\pi n}\right)q^2,\frac{\overline{s}}{q}\right)=\frac{2\pi}{q^2\sqrt{D_1}(n^{-1}-2\pi ix)}\sum_{\overline{m}\in\mathbb{Z}^2}\exp\left(-\frac{2\pi^2Q_1'(\overline{m})}{D_1q^2(n^{-1}-2\pi ix)}+2\pi i\frac{\overline{m}^t\overline{s}}{q}\right),$$

где $Q_1'(\overline{m})=\frac{1}{2}\overline{m}^tD_1A_1^{-1}\overline{m}$ – квадратичная форма с матрицей $D_1A_1^{-1}$.

Тогда для $S_1(l/q+x)$ справедливо равенство

$$S_1(\frac{l}{q}+x)=\frac{2\pi}{q^2\sqrt{D_1}(n^{-1}-2\pi ix)}\sum_{\overline{m}\in\mathbb{Z}^2}\exp\left(-\frac{2\pi^2Q_1'(\overline{m})}{D_1q^2(n^{-1}-2\pi ix)}\right)G_1(q,l,\overline{m}).$$

Выделим слагаемое, которое отвечает нулевому вектору $\overline{m}$. Тогда $S_1(l/q+x)$ можно представить в виде суммы: $S_1(l/q+x)=\varphi_1+\Phi_1$, где

$$\varphi_1=\frac{2\pi}{q^2\sqrt{D_1}(n^{-1}-2\pi ix)}G_1(q,l,\overline{0}),$$

$$\Phi_1 = \frac{2\pi}{q^2\sqrt{D_1}(n^{-1}-2\pi ix)} \sum_{\substack{\overline{m}\in\mathbb{Z}^2,\\ \overline{m}\neq\overline{0}}} \exp\left(-\frac{2\pi^2 Q_1'(\overline{m})}{D_1 q^2(n^{-1}-2\pi ix)}\right) G_1(q,l,\overline{m}).$$

Аналогично получаем представление в виде суммы двух функций для $S_2(l/q+x) = \varphi_2 + \Phi_2$, где

$$\varphi_2 = \frac{2\pi}{q^2\sqrt{D_2}(n^{-1}+2\pi ix)} G_2(q,-l,\overline{0}),$$

$$\Phi_2 = \frac{2\pi}{q^2\sqrt{D_2}(n^{-1}+2\pi ix)} \sum_{\substack{\overline{k}\in\mathbb{Z}^2,\\ \overline{k}\neq\overline{0}}} \exp\left(-\frac{2\pi^2 Q_2'(\overline{k})}{D_2 q^2(n^{-1}+2\pi ibx)}\right) G_2(q,-l,\overline{k}).$$

3. Подставляем полученные для функций $S_1(l/q+x)$ и $S_2(l/q+x)$ представления в виде суммы двух функций в равенство для $I(n,h)$ из пункта 1. Имеем

$$I(n,h) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

где

$$I_1 = \frac{4\pi^2}{\sqrt{D_1D_2}} \sum_{q\le N} q^{-4} \sum_{\substack{l=1,\\ (l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i\frac{hl}{q}} G_1(q,l,\overline{0})G_2(q,-l,\overline{0}) \int\limits_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \frac{e^{-2\pi ihx}dx}{n^{-2}+4\pi^2x^2},$$

$$I_2 = \sum_{q\le N} \sum_{\substack{l=1,\\ (l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi ihl/q} \int\limits_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \varphi_1\Phi_2 e^{-2\pi ihx}dx,$$

$$I_3 = \sum_{q\le N} \sum_{\substack{l=1,\\ (l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi ihl/q} \int\limits_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \varphi_2\Phi_1 e^{-2\pi ihx}dx,$$

$$I_4 = \sum_{q\le N} \sum_{\substack{l=1,\\ (l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi ihl/q} \int\limits_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \Phi_1\Phi_2 e^{-2\pi ihx}dx.$$

Интеграл I_1 вычислим асимптотически, а интегралы I_2, I_3, I_4 оценим сверху.

4. Начнем с I_1. Согласно равенству из леммы 2, получаем:

$$I_1 = \frac{2\pi^2 n}{\sqrt{D_1D_2}} \sum_{q\le N} q^{-4} \sum_{\substack{l=1,\\ (l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi ihl/q} G_1(q,l,\overline{0})G_2(q,-l,\overline{0}) + O(I_{1,1}),$$

где

$$I_{1,1} = N\sum_{q\le N} q^{-3} \sum_{\substack{l=1,\\ (l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi ihl/q} G_1(q,l,\overline{0})G_2(q,-l,\overline{0}) = N\sum_{q\le N} q^{-3} V(q,h,\overline{0},\overline{0}).$$

Используя оценку для функции $V(q,h,\overline{0},\overline{0})$ из леммы 5, будем иметь

$$I_{1,1} \ll N \sum_{q_1q_2\le N} q_1^{-3}q_2^{-3}|V(q_1q_2,h,\overline{0},\overline{0})| \ll N {\sum_{q_2\le N}}' \sum_{q_1\le N/q_2} q_1^{-1} \sum_{s|(q_1,h)} s\mu\Big(\frac{q_1}{s}\Big) \ll$$

$$\ll N {\sum_{q_2\le N}}' \sum_{s|h} \sum_{q\le \frac{N}{q_2 s}} \mu(q)q^{-1} \ll n^{1/2+\varepsilon},$$

где $'$ в сумме по q_2 означает, что суммирование идет по всем не взаимно простым с D_1 или D_2 числам. Можно показать, что их количество не больше, чем n^{ε}. Кроме того, учли, что $h \ll n^{\varepsilon}$.

Оценим сумму

$$R = \frac{n}{\sqrt{D_1D_2}} \sum_{q>N} q^{-4} \sum_{\substack{l=1,\\(l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i hl/q} G_1(q,l,\overline{0})G_2(q,-l,\overline{0}) = \frac{n}{\sqrt{D_1D_2}} \sum_{q>N} q^{-4} V(q,h,\overline{0},\overline{0}).$$

Снова используем лемму 5. Получаем, что

$$R \ll n \sum_{q_1q_2>N} q_1^{-4}q_2^{-4}|V(q_1q_2,h,\overline{0},\overline{0})| \ll n {\sum_{q_2\le N}}' q_2^{-1} \sum_{q_1>N/q_2} q_1^{-2} \sum_{s|(q_1,h)} s\mu(\frac{q_1}{s}) \ll$$

$$\ll n {\sum_{q_2\le N}}' q_2^{-1} \sum_{s|h} s^{-1} \sum_{q>\frac{N}{q_2 s}} \mu(q)q^{-2} \ll n^{1/2+\varepsilon}.$$

Таким образом,

$$I_1 = \frac{4\pi^2 n}{\sqrt{D_1D_2}} \sum_{q=1}^{+\infty} q^{-4} \sum_{\substack{l=1,\\(l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i hl/q} G_1(q,l,\overline{0})G_2(q,-l,\overline{0}) + O(n^{1/2+\varepsilon}).$$

5. Оценка I_2, I_3, I_4 проводится одинаково. Приведем полное доказательство для I_4:

$$I_4 = \sum_{q\le N} \sum_{\substack{l=1,\\(l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i hl/q} \int\limits_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \Phi_1\Phi_2 e^{-2\pi i hx}dx.$$

Вместо Φ_1, Φ_2 подставим их значения, полученные в пункте 2. В результате имеем

$$I_4 = \frac{4\pi^2}{\sqrt{D_1D_2}} \sum_{q\le N} q^{-4} \int\limits_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \frac{e^{2\pi i hx}dx}{n^{-2}+4\pi^2x^2} \times$$

$$\times \sum_{\overline{m}\in\mathbf{Z}^2 \overline{m}\ne\overline{0}} \exp\left(-\frac{2\pi^2 Q_1'(\overline{m})}{q^2D_1(n^{-1}-2\pi ix)}\right) \sum_{\substack{\overline{k}\in\mathbf{Z}^2\\ \overline{k}\ne\overline{0}}} \exp\left(-\frac{2\pi^2 Q_2'(\overline{k})}{q^2D_2(n^{-1}+2\pi ix)}\right) V(q,h,\overline{m},\overline{k}).$$

Пусть θ – сколь угодно малое положительное число. Разобьем интеграл на сумму интегралов:

$$\int\limits_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} = \int\limits_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{-[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} + \int\limits_{-[qn^{1/2+\theta}]^{-1}}^{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} + \int\limits_{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} .$$

Соответственно этому разбиению получаем $I_4 = I_{4,1} + I_{4,2} + I_{4,3}$.

6. Оценим $I_{4,2}$. Используя оценку $V(q_1q_2, h, \overline{m}, \overline{k})$ из леммы 5, будем иметь:

$$I_{4,2} \ll \sum_{\substack{q\le N,\\ q=q_1q_2}} q_1^{-3/2+\varepsilon}(h,q_1)^{1/2}q_2^{-1} \int\limits_0^{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} \frac{dx}{n^{-2}+4\pi^2x^2}\times$$

$$\times \sum_{\substack{\overline{m}\in\mathbf{Z}^2,\\ \overline{m}\ne\overline{0}}} \exp\left(-\frac{2\pi^2 Q_1'(\overline{m})}{q^2 D_1(n^{-1}+4\pi^2x^2n)}\right) \sum_{\substack{\overline{k}\in\mathbf{Z}^2,\\ \overline{k}\ne\overline{0}}} \exp\left(-\frac{2\pi^2 Q_2'(\overline{k})}{q^2 D_2(n^{-1}+4\pi^2x^2n)}\right).$$

Проведем разбиение суммы по q:

$$I_{4,2} \ll \sum_{q\le n^{1/2-\theta}} \int\limits_0^{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} + \sum_{n^{1/2-\theta}<q\le N} \int\limits_0^{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} = \sum\nolimits_{41} + \sum\nolimits_{42}.$$

Рассмотрим сумму $\sum_{41}$. Так как $q \le n^{1/2-\theta}$ и $0 \le x \le [qn^{1/2+\theta}]^{-1}$, то

$$\exp\left(-\frac{2\pi^2 Q_i'(\overline{m})}{q^2 D_i(n^{-1}+4\pi^2x^2n)}\right) \ll \exp(-cn^{2\theta}),$$

где c – постоянная, $i = 1, 2$. Тогда

$$\sum_{\substack{\overline{m}\in\mathbf{Z}^2\\ \overline{m}\ne 0}} \exp\left(-\frac{2\pi^2 Q_1'(\overline{m})}{q^2 D_1(n^{-1}+4\pi^2x^2n)}\right) \sum_{\substack{\overline{k}\in\mathbf{Z}^2\\ \overline{k}\ne 0}} \exp\left(-\frac{2\pi^2 Q_2'(\overline{k})}{q^2 D_2(n^{-1}+4\pi^2x^2n)}\right) \ll \exp(-cn^{2\theta}).$$

Учтем также, что при тех же ограничениях на q:

$$\int\limits_0^{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} \frac{dx}{n^{-2}+4\pi^2x^2} \ll \int\limits_0^{2\pi[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} \frac{dt}{n^{-2}+t^2} \ll n^{3/2-\theta}q^{-1}.$$

После проведенных рассуждений получаем оценку:

$$\sum\nolimits_{41} \ll n^{3/2-\theta}\exp(-cn^{2\theta}) \sum_{q_1q_2\le n^{1/2-\theta}} q_1^{-5/2+\varepsilon}(h,q_1)^{1/2}q_2^{-2} \ll n^{3/4+\varepsilon}.$$

Перейдем к оценке $\sum_{42}$. Так как $q \le N$ и $0 \le x \le [qn^{1/2+\theta}]^{-1}$, то

$$\exp\left(-\frac{2\pi^2 Q_i'(\overline{m})}{q^2 D_i(n^{-1}+4\pi^2x^2n)}\right) \ll \exp(-cQ_i'(\overline{m})),$$

где c – постоянная, $i=1,2$. Тогда

$$\sum_{\substack{\overline{m}\in\mathbf{Z}^2,\\ \overline{m}\neq\overline{0}}}\exp\left(-\frac{2\pi^2 Q_1'(\overline{m})}{q^2 D_1(n^{-1}+4\pi^2x^2n)}\right)\sum_{\substack{\overline{k}\in\mathbf{Z}^2,\\ \overline{k}\neq\overline{0}}}\exp\left(-\frac{2\pi^2 Q_2'(\overline{k})}{q^2 D_2(n^{-1}+4\pi^2x^2n)}\right)\ll 1.$$

Интеграл оценим тривиально:

$$\int\limits_0^{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}}\frac{dx}{n^{-2}+4\pi^2x^2}\ll n\int\limits_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}\ll n\,.$$

В итоге получаем следующую оценку для суммы $\sum_{42}$:

$$\sum\nolimits_{42}\ll n^{1+2\varepsilon}\sum_{n^{1/2-\theta}<q_1q_2\leq N}q_1^{-3/2}(h,q_1)^{1/2}q_2^{-1}\ll$$

$$\ll n^{1+\varepsilon}\sum_{q_2\leq N}{}'q_2^{-1}\sum_{s|h}s^{-1}\sum_{q_1>\frac{n^{1/2-\theta}}{q_2 s}}q_1^{-3/2}\ll n^{3/4+\varepsilon},$$

где $'$ в сумме по q_2 означает, что суммирование идет по всем не взаимно простым с D_1 или D_2 числам. Таким образом, доказана оценка: $I_{4,2}=O(n^{3/4+\varepsilon})$.

7. Интегралы $I_{4,1}$ и $I_{4,3}$ оцениваются одинаково. Все рассуждения проведем для $I_{4,3}$. Используем оценку $V(q_1q_2,h,\overline{m},\overline{k})\ll q_1^{5/2+\varepsilon}(h,q_1)^{1/2}q_2^3$, полученную в лемме 5. Так как $q\leq N$ и $[qn^{1/2+\theta}]^{-1}\leq x\leq[q(q+q')]^{-1}$, то

$$\left|\sum_{\substack{\overline{m}\in\mathbb{Z}^2\\ \overline{m}\neq\overline{0}}}\exp\left(-\frac{2\pi^2 Q_1'(\overline{m})}{q^2 D_1(n^{-1}-2\pi ix)}\right)\right|=O(1),\quad\left|\sum_{\substack{\overline{k}\in\mathbb{Z}^2\\ \overline{k}\neq\overline{0}}}\exp\left(-\frac{2\pi^2 Q_2'(\overline{k})}{q^2 D_2(n^{-1}+2\pi ix)}\right)\right|=O(1).$$

Кроме того, при тех же ограничениях на q можем можем оценить интеграл:

$$\int\limits_{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}}\frac{e^{-2\pi ihx}dx}{n^{-2}+4\pi^2x^2}\ll\int\limits_{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}\ll qn^{1/2+\theta}.$$

После проведенных рассуждений получаем, что

$$I_{4,3}\ll n^{1/2+\theta+\varepsilon}\sum_{q_1q_2\leq N}q_1^{-1/2}(h,q_1)^{1/2}\ll n^{1/2+\theta+\varepsilon}\sum_{q_2\leq N}{}'\sum_{s|h}\sum_{q_1\leq N/q_2}q_1^{-1/2}\ll n^{3/4+\varepsilon}.$$

Объединяя оценки, получаем $I_4=O(n^{3/4+\varepsilon})$, и доказательство теоремы завершено.

4. Заключение

Получена асимптотическая формула для числа решений уравнения $Q_1(\overline{m})-Q_2(\overline{k})=h$, содержащего бинарные положительно определенные примитивные квадратичные формы, соответствующие классам идеалов двух мнимых квадратичных полей разных фиксированных дискриминантов. Число решений уравнения ищется с весами $\exp(-(Q_1(\overline{m})+Q_2(\overline{k}))/n)$ при росте параметра n. Данная задача является продолжением работ, касающихся бинарных аддитивных задач с квадратичными формами.

Список литературы
References

1. Архипов Г.И., Чубариков В.Н. 2006. Об аддитивной проблеме делителей Ингама. Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. № 5: 32–35.
Arhipov G.I., Chubarikov V.N. 2006. Ob additivnoj probleme delitelej Ingama. Vestnik Moskovskogo universiteta. Cer. 1. Matematika. Mehanika. № 5: 32–35.

2. Виноградов И.М. 2004. Основы теории чисел. СПб-М., Лань, 167 с.
Vinogradov I.M. 2004. Osnovy teorii chisel. SPb-M., Lan', 167 p.

3. Гриценко С.А. 2003. О функциональном уравнении одного арифметического ряда Дирихле. Чебышевский сборник. Т. 4. Вып. 2: 53–67.
Gritsenko S.A. 2003. O funkcional'nom uravnenii odnogo arifmeticheskogo rjada Dirihle. Chebyshevskij sbornik. T. 4. Vyp. 2: 53–67.

4. Гриценко С.А. 2012. Об одной аддитивной задаче и ее приложении к проблеме распределения нулей линейных комбинаций L-функций Гекке на критической прямой. Тр. МИАН. 276: 96–108.
Gritsenko S.A. 2012. On an additive problem and its application to the problem of distribution of zeros of linear combinations of Hecke L-functions on the critical line. Proc. Steklov Inst. Math. 276: 90–102. (in Russian).

5. Исмоилов Д.И. 1979. Об асимптотике представления чисел как разности двух произведений. Докл. АН Тадж. ССР. Т. 22, № 2: 75–79.
Ismoilov D.I. 1979. Ob asimptotike predstavlenija chisel kak raznosti dvuh proizvedenij. Dokl. AN Tadzh. SSR. T. 22, № 2: 75–79.

6. Кузнецов Н.В. 1980. Гипотеза Петерсона для параболических форм веса нуль и гипотеза Линника. Суммы сумм Клоостермана. Матем. сб. Т. 111(153). № 3: 334–383.
Kuznetsov N.V. 1981. Petersson's conjecture for cusp forms of weight zero and Linnik's conjecture. Sums of Kloosterman sums. Math. USSR-Sb. 39:3: 299–342. (in Russian).

7. Куртова Л.Н. 2007. Об одной бинарной аддитивной задаче с квадратичными формами. Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. Математика. № 7(57): 107–121.
Kurtova L.N. 2007. On a binary additive problem with quadratic forms. Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennonauchnaja serija. Matematika. № 7(57): 107–121. (in Russian).

8. Куртова Л.Н. 2013. О числе решений одного определенного уравнения с квадратичными формами Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика Физика: Научный рецензируемый журнал. Белгород: Изд-во "БелГУ". № 19 (162). Вып. 32: 67–77.
Kurtova L.N. 2013. About the number of solutions of one definite equation with quadratic forms. Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Serija: Matematika Fizika: Nauchnyj recenziruemyj zhurnal. Belgorod: Izd-vo "BelGU". № 19 (162). Vyp. 32: 67–77. (in Russian).

9. Куртова Л.Н. 2014 а. Об одном аналоге аддитивной проблемы делителей с квадратичными формами. Чебышевский сборник. Т. 15, № 2: 33–49.

Kurtova L.N. 2014 a. About one analog of the additive divisor problem with quadratic forms. Chebyshevskij sbornik. T. 15, № 2: 33–49. (in Russian).

10. Куртова Л.Н. 2014 б. Бинарные аддитивные задачи с квадратичными формами. Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук, Ульяновск, 18 с.
Kurtova L.N. 2014 b. Binarnye additivnye zadachi s kvadratichnymi formami. Avtoref. dis. kand. fiz.-mat. nauk, Ul'janovsk, 18 p.

11. Лаврентьев М.А. Шабат Б.В. 1958. Методы теории функций комплексного переменного. М., Физматлит, 678 с.
Lavrent'ev M.A. Shabat B.V. 1958. Metody teorii funkcij kompleksnogo peremennogo. M., Fizmatlit, 678 p.

12. Малышев А.В. 1962. О представлении целых чисел положительными квадратичными формами. Труды математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. Т. 65: 3–212.
Malyshev A.V. 1962. O predstavlenii celyh chisel polozhitel'nymi kvadratichnymi formami. Trudy matematicheskogo instituta im. V.A. Steklova AN SSSR. T. 65: 3–212.

13. Пачев У.М., Дохов Р.А. 2013. О двойных суммах Гаусса, соответствующих классам идеалов мнимого квадратичного поля. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. № 19(162). Вып. 32: 108-119.
Pachev U.M., Dohov R.A. 2013. About Gauss's double sums correspoding to classes of igeals of maginary quadratic field. Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Serija: Matematika. Fizika. № 19(162). Vyp. 32: 108–119. (in Russian).

14. Deshouillers J.-M., Iwaniec H. 1982. An additive divisor problem. J. London Math. Soc. V. 26(2): 1–14.
Deshouillers J.-M., Iwaniec H. 1982. An additive divisor problem. J. London Math. Soc. V. 26(2): 1–14.

15. Estermann T. 1931. Uber die Darstellung einer Zahl als Di erenz von zwei Produkten. J. Reine Angew. Math. V. 164: 173–182.
Estermann T. 1931. Uber die Darstellung einer Zahl als Di erenz von zwei Produkten. J. Reine Angew. Math. V. 164: 173–182.

16. Estermann T. 1961. On Klostermann's sum. Mathematika. 8: 83–86.
Estermann T. 1961. On Klostermann's sum. Mathematika. 8: 83–86.

17. Heath-Brown D.R. 1979.The fourths power moment of the Riemann zeta-function. Proc. London Math. Soc. V. 38. № 3: 385–422.
Heath-Brown D.R. 1979.The fourths power moment of the Riemann zeta-function. Proc. London Math. Soc. V. 38. № 3: 385–422.

18. Ingham A.E. 1927. Some asymptotic formulae in the theory of numbers. J. London Math. Soc. V. 2(7): 202–208.
Ingham A.E. 1927. Some asymptotic formulae in the theory of numbers. J. London Math. Soc. V. 2(7): 202–208.

19. Ogg A.P. 1969. Modular Forms and Dirichlet Series. N.-Y., W.A. Benjamin Inc., 211 p.
Ogg A.P. 1969. Modular Forms and Dirichlet Series. N.-Y., W.A. Benjamin Inc., 211 p.

20. Weil A. 1948. On some exponential sums. Proc. Nat. Acad. Of Sci. 34: 204–207.
Weil A. 1948. On some exponential sums. Proc. Nat. Acad. Of Sci. 34: 204–207.

Ссылка для цитирования статьи
Reference to article

Куртова Л.Н. 2019. Число решений уравнения с квадратичными формами разных дискриминантов. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 51 (3): 374–386. Doi: 10.18413/2075-4639-2019-51-3-374-386.

Kurtova L.N. 2019. A number of solutions the equation with quadratic forms of different discriminants. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics. 51 (3): 374–386 (in Russian). Doi: 10.18413/2075-4639-2019-51-3-374-386.