ФИЗИКА
PHYSICS

УДК 530.182
DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-1-96-103

ЛОКАЛИЗАЦИЯ В СИММЕТРИЧНОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ СТРУКТУРЕ ИЗ ДЕФОКУСИРУЮЩЕГО СЛОЯ С ФОКУСИРУЮЩИМИ ОБКЛАДКАМИ, РАЗДЕЛЕННЫМИ ГРАНИЦАМИ С НЕЛИНЕЙНЫМ ОТКЛИКОМ

LOCALIZATION IN A SYMMETRIC THREE-LAYER STRUCTURE CONSISTING OF A DEFOCUSING LAYER WITH FOCUSING COVERS SEPARATED BY INTERFACES WITH A NONLINEAR RESPONSE

С.Е. Савотченко
S.E. Savotchenko

Белгородский государственный технологический университет имени В.Г. Шухова
Россия, 308012, Белгород, ул. Костюкова, 46

V.G. Shukhov Belgorod State Technological University
46 Kostukova St., Belgorod, 308012, Russia

E-mail: savotchenkose@mail.ru

Аннотация

Рассмотрены особенности локализации стационарных состояний в симметричной трехслойной структуре, в которой внутренний слой характеризуется дефокусирующейкерровской нелинейностью, а внешние обкладки – фокусирующей. Для описания локализации поля вблизи границ раздела с нелинейным откликом использовано нелинейное уравнение Шредингера с нелинейным самосогласованным потенциалом. Показано, что существует локализованное состояние с антисимметричным распределением профиля поля относительно средины внутреннего слоя. Найдены в явном аналитическом виде энергии стационарных локализованных состояний и проанализированы условия их существования.

Abstract

The peculiarities of stationary state localization in a symmetric three-layer structure, in which the inner layer is characterized by a defocusing Kerr nonlinearity, and the outer plates are focused, are considered. Nonlinear Schrödinger equation with a nonlinear self-consistent potential was used to describe the localization of the field near the interfaces with a nonlinear response. It is shown that a localized state exists with an antisymmetric distribution of the field profile relative to the middle of the inner layer. The energies of stationary localized states are found in an explicit analytic form and the conditions for their existence are analyzed.

Ключевые слова:уравнение Шредингера, слоистая среда, плоский дефект, граница раздела сред, нелинейные поверхностные волны, локализованные состояния.
Keywords: Schrödinger equation, layered medium, planar defect, interface, nonlinear surface waves, localized states.

Введение

Теоретическое описание нелинейных явлений, акцентируемое на изучении особенностей локализации возбуждений различной физической природы вблизи разнообразных дефектов, в том числе границ раздела сред, имеет большое значение для технических приложений [Nonlinearity and Disorder, 2001; Kivshar, 2003; Carretero-González, 2013]. При математическом моделировании таких эффектов используются нелинейные дифференциальные уравнения с частными производными, особое место среди которых занимает нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) [Давыдов, 1984; Косевич, 1989].

Распространению волн в слоистых средах, в том числе и трехслойных структурах, посвящено большое количество теоретических работ [Михалаке, 1989; Kartashov, 2011; Коровай, 2010; Qian 2009; Panyaev, 2016; Trofimov 2017]. Однако в большинстве из них пренебрегается взаимодействием поля волны с границами раздела слоев. Влияние взаимодействия границы раздела слоев в симметричных трехслойных структурах на локализацию поля рассматривалось в работах Герасимчук [2000, 2003].

В случае, когда слои представляют собой нелинейные оптические среды, имеет смысл учитывать и нелинейный отклик взаимодействия поля волны с тонкой границей как с плоским дефектом [Gerasimchuk, 2012; Gerasimchuk, 2015].

В данной работе будут рассмотрены эффекты локализации поля в симметричной трехслойной структуре при наличии нелинейного отклика границ раздела слоев. В рассматриваемой структуре внутренний слой, характеризующийся дефокусировкой (отрицательной керровской нелинейностью), окружен симметричными обкладками с нелинейностью противоположного знака, то есть с фокусировкой. В силу симметрии структуры появляется возможность описать аналитически простые стационарные локализованные состояния, также обладающие симметрией. При моделировании такой структуры используется НУШ с нелинейным самосогласованным потенциалом, использованным ранее в ряде работ [Gerasimchuk, 2012, 2015; Савотченко, 2018a, b, c, d, e, 2019a, b; Savotchenko, 2018a, b, c, d, e] для описания взаимодействия возбуждений с границей раздела слоев.

1. Уравнения модели

Рассмотрим трехслойную структуру, в которой внутренний слой толщины $2a$ с отрицательной (дефокусирующей) нелинейностью керровского типа разделяет два кристалла с положительной (фокусирующей) нелинейностью керровского типа. Фактически рассматриваемая система представляет собой тонкий дефокусирующий слой между двумя массивными фокусирующими обкладками.

Границы раздела сред будем считать плоскими, а их толщину много меньше характерного масштаба локализации возмущений параметров среды, создаваемых ими. Ширина внутреннего слоя будет считаться существенно больше ширины границ раздела слоев. В данном контексте плоскопараллельные границы раздела слоев можно называть волноводами.

Выберем систему координат так, чтобы середина нелинейного слоя проходила через начало координат. Границы раздела слоев лежат в плоскостях $x = \pm a$ перпендикулярно оси x. Пусть фокусирующие обкладки занимают полупространства $|x| > a$, а оптический слой с дефокусирующей нелинейностью расположен в области $|x| < a$.

Как было показано [Gerasimchuk, 2012, 2015; Савотченко, 2018a; 2018b; 2018c; 2018d; 2018e; 2019a; 2019b; Savotchenko, 2018a; 2018b; 2018c; 2018d; Savotchenko, 2018e], для описания распределения поля в световом пучке, локализованном вдоль волноводов, можно использовать одномерное НУШ:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{1}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\Omega\psi-\gamma(x)|\psi|^2\psi+U(x,|\psi|^2)\psi\,, \tag{1}$$

где m– эффективная масса возбуждений (положительная постоянная величина).

В НУШ (1) потенциал, описывающий нелинейные свойства границ раздела, имеет вид [Савотченко, 2019a, b]:

$$U(x,|\psi|^2)=\{U_0-W_0|\psi|^2\}\{\delta(x+a)+\delta(x-a)\}\,, \tag{2}$$

где величина U_0 интерпретируется как интенсивность взаимодействия возбуждений поля с границами раздела в линейном приближении («мощность» дефекта). При $U_0 > 0$ возбуждения отталкиваются от границы, а при $U_0 < 0$ – притягиваются. Параметр нелинейности границ раздела слоев W_0 характеризует нелинейный отклик их взаимодействия с возбуждениями. При $W_0 > 0$ соответствующая граница характеризуется внутренней фокусировкой, а при $W_0 < 0$ –дефокусировкой.

Керровскую нелинейность в НУШ (1) будем аппроксимировать кусочно-постоянной функцией:

$$\gamma(x)=\begin{cases}\gamma_0, & x<-a\\ -g_0, & |x|<a\\ \gamma_0, & x>a\end{cases}$$

где $\gamma_0>0$ и $g_0>0$– постоянные величины.

Характеристики слоев $\Omega(x)$ также будем аппроксимировать кусочно-постоянной функцией:

$$\Omega(x)=\begin{cases}\Omega_1, & x<-a;\\ \Omega_0, & |x|<a;\\ \Omega_1, & x>a;\end{cases}$$

где $\Omega_1 > 0$ и $\Omega_0 > 0$ – постоянные величины.

Стационарные состояния с энергией E определяются после подстановки зависимости $\psi(x,t)=\psi(x)\exp(-iEt)$ в НУШ (1) из стационарного НУШ:

$$\psi''+2m\psi\{E-\Omega+\gamma(x)|\psi|^2-U(x,|\psi|^2)\}=0\,. \tag{3}$$

Решение НУШ (3) с потенциалом (2) эквивалентно решению НУШ без потенциала:

$$\psi''+2m\psi\{E-\Omega+\gamma(x)|\psi|^2\}=0\,, \tag{4}$$

с граничными условиями:

$$\psi(\mp a-0)=\psi(\mp a+0)=\psi_{0j}\,, \tag{5}$$

$$\psi'(\mp a+0)-\psi'(\mp a-0)=2m\{U_0-W_0|\psi_{0j}|^2\}\psi_{0j}\,. \tag{6}$$

где $\psi_{0j}=\psi(\pm a)$– амплитуды поля на границах раздела слоев. Здесь и далее значение индекса $j = 1$ соответствует величинам, относящимся к области $x < - a$, $j = 2$ – к области $x > a$, $j = 0$ – к внутреннему слою при $|x| < a$. При этом в формулах (5), (6) и далее для $j = 1$ следует выбирать верхний знак, а для $j = 2$ – нижний.

При отсутствии взаимодействия поля с границами раздела слоев, когда $U_0 = 0$, $W_0 = 0$, из условия (6) получается условие непрерывности производной поля. Такой случай, как для одиночной границы раздела двух полупространств, так и для трехслойных структур, был наиболее подробно проанализирован Михалаке [1989].

В случае одной границы раздела в плоскости x=0 при $U_0 = 0$, $W_0 \neq 0$ и $a = 0$ для случая нелинейного плоского дефекта из условия (6) получается одно граничное условие [Gerasimchuk, 2012, 2015; Савотченко, 2018a], а для случая обоих ненулевых параметров

U_0 и W_0 – описано Савотченко [2018b; 2018c; 2018d;]. Для системы двух плоскопараллельных дефектов с линейным взаимодействием $U_0 \neq 0$, $W_0 = 0$ и $a \neq 0$ из условия (6) получаются граничные условия [Герасимчук, 2000, 2003]. При $U_0 = 0$, $W_0 \neq 0$ и $a \neq 0$ из условия (6) получаются граничные условия [Savotchenko, 2018e] для двух плоскопараллельных дефектов с преобладающим нелинейным откликом, а при обоих ненулевых параметрах U_0 и W_0 – в других работах [Савотченко, 2019a, 2019b].

2. Локализованное состояние

Если энергия стационарного состояния лежит в диапазоне $\Omega_0 < E < \Omega_1$, то НУШ (4) имеет частное решение в виде

$$\psi(x) = \begin{cases} -A/\mathrm{ch}q(x+a), & x < -a, \\ A_s \mathrm{sn}(q_s x, k), & |x| < a, \\ A/\mathrm{ch}q(x-a), & x > a, \end{cases} \tag{7}$$

описывающее локализованное состояние с антисимметричным распределением профиля поля относительно средины внутреннего слоя, то есть обладающее свойством нечетности: $\psi(-x) = -\psi(x)$. Здесь k – модуль эллиптического синуса.

Решение (7) всюду ограничено и удовлетворяет условию исчезновения на бесконечности: $|\psi(x)| \to 0$ при $x \to \infty$.

Параметры решения (7) определяются выражениями, получаемыми после подстановки (7) в НУШ (4):

$$A_s = q_s (m g_0)^{-1/2}, \tag{8}$$

$$q_s^2 = 2m(E - \Omega_0)/(1+k^2), \tag{9}$$

$$A = q(m\gamma_0)^{-1/2}, \tag{10}$$

$$q^2 = 2m(\Omega_1 - E). \tag{11}$$

Подстановка решения (7) в граничные условия (5) и (6) приводит к системе дисперсионных уравнений:

$$q = \eta q_s \mathrm{sn}(q_s a, k). \tag{12}$$

$$\frac{q_s \mathrm{cn}(q_s a, k)\mathrm{dn}(q_s a, k)}{\mathrm{sn}(q_s a, k)} = w_0 q^2 - u_0 \tag{13}$$

где $\eta = (\gamma_0/g_0)^{1/2}$, $u_0 = 2mU_0$, $w_0 = 2W_0/\gamma_0$.

Из уравнения (12) можно выразить эллиптический синус и подставить его в уравнение (13), исключив тем самым ширину a из системы. В результате получается одно дисперсионное уравнение:

$$(\eta^2 q_s^2 - q^2)^{1/2}(\eta^2 q_s^2 - k^2 q^2)^{1/2} = \eta q(q^2 w_0 - u_0), \tag{14}$$

определяющее зависимость энергии локализации от параметров нелинейности кристаллов и характеристик границы их раздела.

Используя связь

$$q_s^2 = (\omega - q^2)/(1+k^2), \tag{15}$$

вытекающую из выражений (9) и (11), где обозначили $\omega = 2m(\Omega_1 - \Omega_0) > 0$, дисперсионное уравнение (14) можно переписать в виде:

$$q^6 \eta w_0^2 - a_q q^4 + b_q q^2 - \{\omega\eta^2/(1+k^2)\}^2 = 0, \tag{16}$$

где $a_q = 2\eta u_0 w_0 + (1+\eta^2)(\eta^2 + k^2)$, $b_q = \eta\{u_0^2 + \mu\omega(1+k^2+2\eta^2)/(1+k^2)\}$.

3. Результаты и обсуждение

Решения дисперсионного уравнения (16) можно получить в явном аналитическом виде в ряде предельных случаев.

1) Пусть выполняется условие малости $\omega\eta << 1$, реализуемое, когда нелинейность внутреннего слоя существенно превосходит нелинейность обкладок. В этом случае решение дисперсионного уравнения (16) имеет вид:

$$q^2 = q_{10}^2 + q_{20}^2 + q_{30}^2, \qquad (17)$$

где

$$q_{10}^2 = u_0 / w_0, \; q_{20}^2 = (1+\eta^2)(\eta^2 + k^2)/2\eta w_0^2,$$
$$q_{30}^2 = \{(1+\eta^2)(\eta^2+k^2)(4\eta u_0 w_0 + (1+\eta^2)(\eta^2+k^2)\}^{1/2}/2\eta w_0^2.$$

В уравнении (17) первое слагаемое не зависит от параметров нелинейности, а второе слагаемое не зависит от интенсивности границы раздела u_0. При этом все слагаемые в уравнении (17) зависят от интенсивности нелинейного отклика границ раздела слоев w_0. Следовательно, для существования локализованного состояния с энергией

$$E = \Omega_1 - q^2/2m, \qquad (18)$$

куда подставляется (17), наличие нелинейного отклика границ раздела сред является обязательным требованием.

2) Если дополнительно к предыдущему условию потребовать, чтобы модуль эллиптической функции выражался через параметры трехслойной структуры в виде

$$k^2 = (1+\eta^2)\{[1 - 4\eta(\eta + 2u_0 w_0)/(1+\eta^2)^2]^{1/2} - 1\}/2, \qquad (19)$$

то энергия локализации примет вид

$$E = \Omega_1 - \frac{1}{2}\left(-\frac{\gamma_0 U_0}{m W_0}\right)^{1/2}. \qquad (20)$$

Для существования локализованного состояния с энергией (20) параметры границ раздела слоев должны иметь противоположные знаки.

3) Если нелинейный отклик границ раздела слоев пренебрежительно мал, то дисперсионное уравнение (16) имеет решение:

$$q^2 = q_a^2\{1 \pm (1 - q_b^2/q_a^2)^{1/2}\}, \qquad (21)$$

где $q_a^2 = \eta\{u_0^2(1+k^2) + 4\omega(1+k^2+2\eta^2)\}/2(1+k^2)^2(\eta^2+k^2)$, $q_b^2 = 2\eta^3\omega^2/(1+k^2)^2$.

Решению (21) соответствует, согласно (18), энергия локализации:

$$E = \Omega_1 - \Omega_a\{1 \pm (1 - \Omega_b/\Omega_a)^{1/2}\}, \qquad (22)$$

где $\Omega_{a,b} = q_{a,b}^2/2m$.

Локализация поля с энергией (22) возможна при выполнении условия: $U_0^2 > U_c^2$, где

$$U_c^2 = (\Omega_1 - \Omega_0)\{\eta(1+k^2)^{1/2}(\eta^2+k^2)^{1/2} - 2(1+k^2+2\eta^2)\}/m(1+k^2).$$

4) Если дополнительно к предыдущему условию потребовать, чтобы $U_0 = U_c$, то $q = q_a$, а энергия локализации $E = \Omega_1 - \Omega_a$. Требование $U_0 = U_c$ фактически означает, что модуль эллиптической функции выражается через параметры трехслойной структуры определенным образом, получаемым из данного уравнения.

Заключение

В работе рассмотрена симметричная трехслойная структура из нелинейных слоев, причем внутренний слой характеризуется дефокусировкой, а внешние обкладки обладают фокусирующей керровской нелинейностью. Для теоретического описания локализации поля вблизи границ раздела слоев использовано НУШ. Взаимодействие поля с границами разделов слоев моделировалось нелинейным самосогласованным потенциалом.

Показано, что в рассматриваемой системе существует локализованное состояние с антисимметричным распределением профиля поля относительно середины внутреннего слоя, то есть обладающее свойством нечетности. Найдены в явном аналитическом виде энергии стационарных локализованных состояний и указаны условия их существования.

Полученные результаты могут иметь значение для разработки и совершенствования оптических волноводных систем с заданными характеристиками, оптических устройств управления на основе слоистых сред, а также различных оптических переключателей и ограничителей мощности, способных пропускать световые импульсы выше или ниже заданного значения потока энергии [Zhang, 1995; Strudley, 2014; Zhong, 2018].

Список литературы
References

1. Герасимчук И.В., Ковалев А.С. 2000. Локализация нелинейных волн в слоистых средах. Физика низких температур, 26 (8): 799-809.

Gerasimchuk I.V., Kovalev A.S. 2000. Lokalizacija nelinejnyh voln v sloistyh sredah. [Localization of nonlinear waves in layered media] Fizika nizkih temperature. 26 (8): 799-809. (in Russian)

2. Герасимчук И.В., Ковалев А.С. 2003. Локализация нелинейных волн между интерфейсами. Физика твердого тела, 45 (6): 1088-1090.

Gerasimchuk I.V., Kovalev A.S. 2003. Lokalizacija nelinejnyh voln mezhdu interfejsami [Localization of non-linear waves between interfaces]. Fizika tverdogo tela, 45 (6): 1088-1090. (in Russian)

3. Давыдов А.С. Солитоны в молекулярных системах. Киев: Наукова думка, 1984, 288 с.

Davydov A.S. Solitony v molekuljarnyh sistemah [Solitons in molecular systems]. Kiev: Naukova dumka, 1984, 288 p. (in Russian)

4. Коровай О.В., Хаджи П.И. 2010. Нелинейные ТЕ-поляризованные квазиповерхностные волны в симметричном световоде с нелинейной сердцевиной. Физика твердого тела, 52 (11): 2277-2282.

Korovaj O.V., Hadzhi P.I. 2010. Nelinejnye TE-poljarizovannye kvazipoverhnostnye volny v simmetrichnom svetovode s nelinejnoj serdcevinoj [Nonlinear TE-polarized quasi-surface waves in a symmetric fiber with a nonlinear core]. Fizika tverdogo tela, 52 (11): 2277-2282. (in Russian)

5. Косевич А.М., Ковалев А.С. Введение в нелинейную физическую механику. Киев: Наукова думка, 1989, 304 с.

Kosevich A.M., Kovalev A.S. Vvedenie v nelinejnuju fizicheskuju mehaniku [Introduction to Nonlinear Physical Mechanics]. Kiev: Naukova dumka, 1989, 304 p. (in Russian)

6. Михалаке Д., Назмитдинов Р.Г., Федянин В.К. 1989. Нелинейные оптические волны в слоистых структурах. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 20 (1): 198-253.

Mihalake D., Nazmitdinov R.G., Fedjanin V.K. 1989. Nelinejnye opticheskie volny v sloistyh strukturah [Nonlinear optical waves in layered structures]. Fizika jelementarnyh chastic i atomnogo jadra, 20 (1): 198-253. (in Russian)

7. Савотченко С.Е. 2018. Неоднородные состояния в нелинейной самофокусирующей среде, порождаемые нелинейным дефектом. Письма в журнал экспериментальной и теоретической физики, 107 (8): 481-483.

Savotchenko S.E. 2018. Neodnorodnye sostojanija v nelinejnoj samofokusirujushhej srede, porozhdaemye nelinejnym defektom [Heterogeneous states in a nonlinear self-focusing medium generated by a nonlinear defect]. Pis'ma v zhurnal jeksperimental'noj i teoreticheskoj fiziki, 107 (8): 481-483. (in Russian)

8. Савотченко С.Е. 2018. Особенности локализации возбуждений вблизи нелинейного слоя между линейными средами, разделенными плоскими дефектами с нелинейными свойствами. Нелинейный мир, 3: 25-32.

Savotchenko S.E. 2018. Osobennosti lokalizacii vozbuzhdenij vblizi nelinejnogo sloja mezhdu linejnymi sredami, razdelennymi ploskimi defektami s nelinejnymi svojstvami [Localization of excitations near the nonlinear layer between linear media separated by flat defects with nonlinear properties]. Nelinejnyj mir, 3: 25-32. (in Russian)

9. Савотченко С.Е. 2018. Периодические состояния вблизи плоского дефекта с нелинейным откликом, разделяющего нелинейный самофокусирующий и линейный кристаллы. Конденсированные среды и межфазные границы, 20 (2): 255-262.

Savotchenko S.E. 2018. Periodicheskie sostojanija vblizi ploskogo defekta s nelinejnym otklikom, razdeljajushhego nelinejnyj samofokusirujushhij i linejnyj kristally [Periodic states near a flat defect with a nonlinear response dividing nonlinear self-focusing and linear crystals]. Kondensirovannye sredy i mezhfaznye granicy, 20 (2): 255-262. (in Russian)

10. Савотченко С.Е. 2018. Пространственно-периодические неоднородные состояния в нелинейном кристалле с нелинейным дефектом. Журнал экспериментальной и теоретической физики, 154, 3(9): 514-525.

Savotchenko S.E. 2018. Prostranstvenno-periodicheskie neodnorodnye sostojanija v nelinejnom kristalle s nelinejnym defektom [Spatially periodic inhomogeneous states in a nonlinear crystal with a nonlinear defect]. Zhurnal jeksperimental'noj i teoreticheskoj fiziki, 154, 3(9): 514-525. (in Russian)

11. Савотченко С.Е. 2018. Энергия запирания поля на нелинейной границе раздела нелинейных дефокусирующих сред. Письма в журнал экспериментальной и теоретической физики, 108 (8): 175-179.

Savotchenko S.E. 2018. Jenergija zapiranija polja na nelinejnoj granice razdela nelinejnyh defokusirujushhih sred [The field locking energy at the nonlinear interface of nonlinear defocusing media]. Pis'ma v zhurnal jeksperimental'noj i teoreticheskoj fiziki, 108 (8): 175-179. (in Russian)

12. Савотченко С.Е. 2019. Локализация возбуждений в слоистой структуре с границами раздела, характеризующимися нелинейным откликом. Физика твердого тела. 61 (3): 571-580.

Savotchenko S.E. 2019. Lokalizacija vozbuzhdenij v sloistoj strukture s granicami razdela, harakterizujushhimisja nelinejnym otklikom [Localization of excitations in a layered structure with interfaces characterized by a nonlinear response]. Fizika tverdogo tela. 61 (3): 571-580. (in Russian)

13. Савотченко С.Е. 2019. Особенности локализации нелинейных спиновых волн в слоистом ферромагнетике, обусловленные магнитной анизотропией. Физика твердого тела. 61 (4): 698-702.

Savotchenko S.E. 2019. Osobennosti lokalizacii nelinejnyh spinovyh voln v sloistom ferromagnetike, obuslovlennye magnitnoj anizotropiej [Localization features of nonlinear spin waves in a layered ferromagnet, due to magnetic anisotropy]. Fizika tverdogo tela. 61 (4): 698-702. (in Russian)

14. Carretero-González R., Cuevas-Maraver J., Frantzeskakis D., Karachalios N., Kevrekidis P., Palmero-Acebedo F. Localized Excitations in Nonlinear Complex Systems, Springer Science & Business Media, 2013, 432.

15. Gerasimchuk I.V. 2015. Localized states and their stability in an anharmonic medium with a nonlinear defect, JETP. 121: 596-605.

16. Gerasimchuk I.V., Gorbach P.K., Dovhopolyi P.P. 2012. Localized states in a nonlinear medium containing a plane defect layer with nonlinear properties, Ukr. J. Phys. 57: 678-683.

17. Kartashov Y.V., Malomed B.A., Torner L. 2011. Solitons in nonlinear lattices, Rev. of Mod. Phys. 83: 247.

18. Kivshar Yu.S., Agrawal G.P. Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals, Academic Press, San Diego, 2003, 540 p.

19. Nonlinearity and Disorder: Theory and Applications, Eds: F. Abdullaev, O. Bang, M. P. Sorensen, Springer, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 2001, 445 p.

20. Panyaev I.S., Dadoenkova N.N., Dadoenkova Yu.S., Rozhleys I.A., Krawczyk M., Lyubchanckii I.L., Sannikov D.G. 2016. Four-layer nanocomposite structure as an effective optical waveguide switcher for near-IR regime, J. of Phys. D: Applied Phys. 49: 435103.

21.Qian Zh., Jin F., Lu T., Kishimoto K. 2009. Transverse surface waves in an FGM layered structure, Acta Mechanica, 207: 183-193.

22.Savotchenko S.E. 2018. Localization on the interface with nonlinear response between linear and nonlinear focusing media. Surfaces and Interfaces. 13: 157-162.

23.Savotchenko S.E. 2018. Localized states near the interface with anharmonic properties between nonlinear media with different characteristics. Modern Physics Letters B. 32 (10): 1850120-12.

24.Savotchenko S.E. 2018. Peculiarities of linear wave interaction with nonlinear media interface. Modern Physics Letters B. 32 (30): 1850371-13.

25.Savotchenko S.E. 2018. Stationary states near the interface with anharmonic properties between linear and nonlinear defocusing media. Solid State Communications. 283 (11): 1-8.

26.Savotchenko S.E. 2018. The field blocking on the interface with nonlinear response between nonlinear focusing media. Turkish Journal of Physics. 42: 721-736.

27.Strudley T., Bruck R., Mills B., Muskens O.L. 2014. An ultrafast reconfigurable nanophotonic switch using wavefront shaping of light in a nonlinear nanomaterial, Light: Science & Applications 3: e207.

28.Trofimov V.A., Zakharova I.G., Shestakov P.Y., Nonlinear localization of chirped femtosecond pulse in layered photonic structure, 2017 Progress In Electromagnetics Research Symposium - Spring (PIERS), St. Petersburg, (2017) 3378-3382.

29.Zhang D., Li Z., Hu W., Cheng B. 1995. Broadband optical reflector - an application of light localization in one dimension Appl. Phys. Lett. 67: 2431.

30.Zhong N., Wang Z., Chen M., Xin X., Wu R., Cen Y., Li Y. 2018. Three-layer-structure polymer optical fiber with a rough inter-layer surface as a highly sensitive evanescent wave sensor, Sensors and Actuators B: Chem. 254: 133-142.