УДК 512.542
DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-1-64-87

О ПОДРЕШЕТКАХ РЕШЕТКИ ЧАСТИЧНО ТОТАЛЬНО НАСЫЩЕННЫХ ФОРМАЦИЙ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

ON SUBLATTICES OF THE LATTICE OF PARTIALLY TOTALLY SATURATED FORMATIONS OF FINITE GROUPS

В.В. Щербина, В.Г. Сафонов
V.V. Shcherbina, V.G. Safonov

Белорусский государственный университет,
Республика Беларусь, 220030, г. Минск, пр. Независимости, 4

Belarusian State University,
4 Nezavisimosti Avenue, Minsk, 220030, Republic of Belarus

E-mail: shcherbinavv@tut.by

Аннотация
Доказано, что для любого подгруппового функтора τ решетка всех τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки всех тотально ω-насыщенных формаций конечных групп. В частности, установлена вложимость решетки всех τ-замкнутых тотально насыщенных формаций в решетку всех тотально насыщенных формаций, а также вложимость решетки всех τ-замкнутых тотально p-насыщенных формаций в решетку всех тотально p-насыщенных формаций.

Abstract
All groups under consideration are finite. The paper studies some properties of the lattice of all τ-closed totally ω-saturated formations. Using methods of V.G. Safonov and L.A. Shemetkov, we prove that for any subgroup functor τ, the lattice of all τ-closed totally ω-saturated formations is a complete sublattice of the lattice of all totally ω-saturated formations. In particular, we show that the lattice of all τ-closed totally saturated formations is a complete sublattice of the lattice of all totally saturated formations. Similarly, the lattice of all τ-closed totally p-saturated formations is a complete sublattice of the lattice of all totally p-saturated formations.

Ключевые слова: формация конечных групп, тотально ω-насыщенная формация, решетка формаций, τ-замкнутая формация.
Keywords: formation of finite groups, totally ω-saturated formation, lattice of formations, τ-closed formation.

Введение

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Мы придерживаемся терминологии, принятой в работах Шеметкова, Скибы и других авторов [Шеметков, 1978; Шеметков, Скиба, 1989; Doerk, Hawkes, 1992; Скиба, 1997; Skiba, Shemetkov, 2000].

Одним из интенсивно развивающихся направлений теории формаций является направление, связанное с изучением внутренней структуры формаций различных типов и их классификацией. Существенную роль в таких исследованиях играют методы и конструкции общей теории решеток, которые активно стали применяться в теории формаций после установления А.Н. Скибой [1986] модулярности решетки всех формаций. Основные результаты структурной теории формаций изложены в книгах Шеметкова, Скибы и других авторов [Шеметков, Скиба, 1989; Doerk, Hawkes, 1992; Скиба, 1997; Guo, 2000; Ballester-Bolinches, Ezquerro, 2006; Воробьев, 2012]. В работах Л.А. Шеметкова и А.Н. Скибы [1989] и А.Н. Скибы [1997], в частности, было показано, что решетка разрешимых тотально насыщенных формаций является дистрибутивной. Ряд свойств решетки всех тотально насыщенных формаций установлен в других работах [Воробьев, 2000; Safonov, 2006 a, b; Safonov, 2007; Сафонов, Шеметков, 2008; Safonov, 2010].

В 1999 году в теории формаций А.Н. Скибой и Л.А. Шеметковым был предложен подход, использующий идеи частичной [Шеметков, 1984] и кратной (тотальной) [Скиба, 1984] насыщенности формации, объединенные в понятии n-кратно (тотально) ω-насыщенной формации [Skiba, Shemetkov, 2000].

Особая роль частично тотально насыщенных формаций обусловлена прежде всего тем, что большинство наиболее известных конкретных классов конечных групп являются тотально частично насыщенными формациями, и поэтому они наиболее часто применяются в различных приложениях.

В теории частично насыщенных формаций А.Н. Скибой и Л.А. Шеметковым [2000] была установлена модулярность решетки всех n-кратно ω-насыщенных формаций при любом натуральном n. Позднее В.Г. Сафоновым [2004] была доказана модулярность решетки всех тотально ω-насыщенных формаций, а также установлена алгебраичность этой решетки. Описание минимальных тотально ω-насыщенных не $\mathfrak{X}$-формаций, где $\mathfrak{X}$ – некоторая насыщенная подформация формации всех нильпотентных групп, было получено в работе Сафонова [2014].

А.Н. Скибой [1997] доказано, что решетка l_n^{τ} всех τ-замкнутых n-кратно насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки l_n всех n-кратно насыщенных формаций, а решетка разрешимых тотально насыщенных формаций не является подрешеткой в решетке всех τ-замкнутых n-кратно насыщенных формаций при любом целом неотрицательном n. В совместной работе В.Г. Сафонова и Л.А. Шеметкова [2008] показано, что решетка l_{∞}^{τ} всех τ-замкнутых тотально насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки l_{∞} всех тотально насыщенных формаций.

Развивая результат работы Сафонова и Шеметкова [2008], мы докажем, что справедлива следующая теорема.

Теорема. *Решетка $l_{\omega_\infty}^{\tau}$ всех τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки l_{∞}^{ω} всех тотально ω-насыщенных формаций.*

1. Определения и обозначения

В дальнейшем ω обозначает некоторое непустое множество простых чисел, p и q – простые числа, $[K]A$ – полупрямое произведение группы K с некоторой группой операторов A этой группы, $A \wr B$ – стандартное сплетение группы A с группой B. Для каждого множества простых чисел π через π' обозначается дополнение к π во множестве всех простых чисел. Символами $\pi(G)$ и $O_{\pi}(G)$ обозначаются соответственно множество всех простых делителей порядка группы G и наибольшая нормальная π-подгруппа группы G. $\mathfrak{X}$-группой, где $\mathfrak{X}$ – некоторый непустой класс групп, называется группа из $\mathfrak{X}$. Символы $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_{\pi}$, $\mathfrak{N}_{p}$, $\mathfrak{S}_{\pi}$ и $\mathfrak{N}_{\pi}$ обозначают класс всех групп, π-групп, p-групп, разрешимых π-групп и нильпотентных π-групп соответственно. Символом (1) обозначается класс всех единичных групп.

Для произвольного класса групп $\mathfrak{F} \supseteq (1)$ символ $G^{\mathfrak{F}}$ обозначает пересечение всех таких нормальных подгрупп N, что $G/N \in \mathfrak{F}$, символ $G_{\mathfrak{F}}$ – произведение всех нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп группы G.

Напомним, что ωd-группа – это группа, порядок которой делится хотя бы на одно число из ω. Через $\mathfrak{G}_{\omega d}$ обозначают класс всех тех групп, у которых каждый композиционный фактор является ωd-группой. По определению $1 \in \mathfrak{G}_{\omega d}$.

Полагают $G_{\omega d} = G_{\mathfrak{G}_{\omega d}}$, $F_p(G) = G_{\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p}$.

Формация – это класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. В дальнейшем символом $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ обозначается, если не оговорено противное, *корадикальное произведение формаций* $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$, т. е. $\mathfrak{M}\mathfrak{H} = \{G \mid G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M}\}$.

Всякую функцию вида $f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{\text{формации групп}\}$ называют *ω-локальным спутником*.

Если $\omega = \{p\}$, то ω-локальные формации (спутники) называют p-локальными. В другом предельном случае, когда $\omega = \mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, символ ω опускают.

Для произвольного ω-локального спутника f полагают $LF_{\omega}(f) = \{G \mid G/G_{\omega d} \in f(\omega') \text{ и } G/F_p(G) \in f(p) \text{ для всех простых } p \in \omega \cap \pi(G)\}$.

Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f)$, то говорят, что она ω-локальна, а f – ω-локальный спутник этой формации. Если при этом все значения f лежат в $\mathfrak{F}$, то f называется *внутренним* (или *приведенным*) спутником.

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ – произвольный набор ω-локальных спутников. Через $\bigcap_{i \in I} f_i$ обозначают такой ω-локальный спутник f, что $f(a) = \bigcap_{i \in I} f_i(a)$ для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$.

Пусть f и h – ω-локальные спутники. Тогда полагают $f \le h$, если $f(a) \subseteq h(a)$ для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$.

Формацию $\mathfrak{F}$ называют *ω-насыщенной*, если ей принадлежит всякая группа G, удовлетворяющая условию $G/L \in \mathfrak{F}$, где $L \subseteq \Phi(G) \cap O_{\omega}(G)$.

Пусть A, B – группы, $\varphi : A \to B$ – эпиморфизм, Ω и Σ – некоторые системы подгрупп в A и B соответственно. Тогда через Ω^{φ} обозначается множество $\{H^{\varphi} \mid H \in \Omega\}$, а через $\Sigma^{\varphi^{-1}}$ – множество $\{H^{\varphi^{-1}} \mid H \in \Sigma\}$ всех полных прообразов в A всех групп из Σ.

Пусть $\mathfrak{X}$ – произвольный непустой класс групп и всякой группе $G \in \mathfrak{X}$ сопоставлена некоторая система ее подгрупп $\tau(G)$. Говорят, что τ – *подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор* в смысле А.Н. Скибы [1997] (или иначе, τ – *подгрупповой функтор на* $\mathfrak{X}$), если для всякого эпиморфизма $\varphi : A \to B$, где $A, B \in \mathfrak{X}$, выполнены включения $(\tau(A))^{\varphi} \subseteq \tau(B)$, $(\tau(B))^{\varphi^{-1}} \subseteq \tau(A)$ и, кроме того, для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ имеет место

$G \in \tau(G)$. Если $\mathfrak{X} = \mathfrak{G}$ – класс всех групп, то символ $\mathfrak{X}$ опускают и говорят просто о подгрупповом функторе. Через $S\{G\}$ обозначают совокупность всех подгрупп группы G, через $S_n\{G\}$ – совокупность всех нормальных подгрупп группы G. Подгрупповой функтор τ называется *тривиальным*, если $\tau(G) = \{G\}$, *единичным*, если $\tau(G) = S\{G\}$ для любой группы G. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *τ-замкнутым*, если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для любой группы $G \in \mathfrak{F}$.

Напомним, что *решеткой* называется частично упорядоченное множество L, в котором любые два элемента имеют точную нижнюю грань, обозначаемую $x \wedge y$, и точную верхнюю грань, обозначаемую $x \vee y$ [Биркгоф, 1984, с. 18]. Решетка L называется *полной*, если любое ее подмножество X имеет в L точные верхнюю и нижнюю грани. *Подрешеткой* решетки L называется подмножество $Y \subset L$, такое, что если $a \in Y$, $b \in Y$, то $a \wedge b \in Y$ и $a \vee b \in Y$. Подрешетка решетки сама является решеткой с теми же операциями объединения и пересечения.

Непустую систему формаций θ называют *полной решеткой формаций*, если пересечение любой совокупности формаций из θ снова принадлежит θ, и во множестве θ имеется такая формация $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ для любой формации $\mathfrak{H} \in \theta$. Формации из θ называют *θ-формациями*. Спутник f называется *θ-значным*, если все его значения принадлежат θ. Символом θ^{ω} обозначается совокупность всех формаций, которые обладают ω-локальным θ-значным спутником.

Всякую формацию считают 0-*кратно ω-локальной*. При $n \geq 1$ формацию $\mathfrak{F}$ называют *n-кратно ω-локальной*, если $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f)$, где все значения f являются $(n-1)$-кратно ω-локальными формациями. Формацию $\mathfrak{F}$ называют *тотально ω-локальной* [Скиба, 1987], если она n-кратно ω-локальна для всех n. Если при этом формация $\mathfrak{F}$ является τ-замкнутой, то $\mathfrak{F}$ называют *τ-замкнутой n-кратно ω-локальной* и соответственно *τ-замкнутой тотально ω-локальной.*

Ввиду теоремы 1 [Skiba, Shemetkov, 2000] формация $\mathfrak{F}$ является ω-локальной тогда и только тогда, когда она ω-насыщена. Поэтому n-кратно ω-локальные и тотально ω-локальные формации называют также *n-кратно ω-насыщенными* и соответственно *тотально ω-насыщенными формациями*.

Символом $l^{\tau}_{\omega_\infty}$ обозначают совокупность всех τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций. Наряду с символом l_{ω_∞} для обозначения совокупности всех тотально ω-насыщенных формаций также используют символ l^{ω}_{∞}.

Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторая совокупность групп. Через $l^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}\mathfrak{X}$ обозначают пересечение всех τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций, содержащих $\mathfrak{X}$. Формацию $l^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}\mathfrak{X}$ называют *τ-замкнутой тотально ω-насыщенной формацией, порожденной совокупностью групп* $\mathfrak{X}$. Если $\mathfrak{X} = \{G\}$, то $l^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}\mathfrak{X} = l^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}G$ называют *однопорожденной τ-замкнутой тотально ω-насыщенной формацией*.

Для любых τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ полагают $\mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \mathfrak{H} = l^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$. Вместе с символом $\vee_{\omega_\infty}$ для обозначения верхней грани в решетке $l_{\omega_\infty} = l^{\omega}_{\infty}$ также используют символ $\vee^{\omega}_{\infty}$. Ввиду теоремы 1.5.4 [Воробьев, 2012, с. 54] множество всех τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций $l_{\omega_\infty}^{\tau}$, частично упорядоченное по включению, относительно операций $\vee_{\omega_\infty}^{\tau}$ и $\cap$ является полной решеткой формаций.

ω-Локальный спутник, все значения которого – $l_{\omega_\infty}^{\tau}$-формации, называется $l_{\omega_\infty}^{\tau}$*-значным*.

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ – некоторая система $l_{\omega_\infty}^{\tau}$-значных спутников. Тогда через $\vee_{\omega_\infty}^{\tau}(f_i \mid i \in I)$ обозначается такой спутник f, что $f(a) = l_{\omega_\infty}^{\tau}\,\mathrm{form}(\cup_{i\in I} f_i(a))$ для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$, если по крайней мере одна из формаций $f_i(a) \neq \varnothing$. В противном случае полагают $f(a) = \varnothing$.

Для всякой совокупности групп $\mathfrak{X}$ полагают $\mathfrak{X}(F_p) = \mathrm{form}(G/F_p(G) \mid G \in \mathfrak{X})$, если $p \in \pi(\mathfrak{X})$ и $\mathfrak{X}(F_p) = \varnothing$, если $p \notin \pi(\mathfrak{X})$.

Для произвольной последовательности простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$ из ω и всякой совокупности групп $\mathfrak{X}$ класс групп $\mathfrak{X}^{p_1 p_2 \cdots p_n}$ определяют следующим образом:

1) $\mathfrak{X}^{p_1} = (A/F_{p_1}(A) \mid A \in \mathfrak{X})$;

2) $\mathfrak{X}^{p_1 p_2 \cdots p_n} = (A/F_{p_n}(A) \mid A \in \mathfrak{X}^{p_1 p_2 \cdots p_{n-1}})$.

Последовательность простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$ называется *подходящей для* $\mathfrak{X}$ ω*-последовательностью*, если $p_1 \in \pi(\mathfrak{X}) \cap \omega$ и для любого $i \in \{2, \ldots, n\}$ число $p_i \in \pi(\mathfrak{X}^{p_1 p_2 \cdots p_{i-1}}) \cap \omega$.

Для произвольной τ-замкнутой тотально ω-насыщенной формации $\mathfrak{F}$ через $\mathfrak{F}_{\omega_\infty}^{\tau}$ обозначают ее *минимальный* ω*-локальный* $l_{\omega_\infty}^{\tau}$*-значный спутник*, т.е. пересечение всех ω-локальных $l_{\omega_\infty}^{\tau}$-значных спутников формации. Наряду с символом $\mathfrak{F}_{\omega_\infty}$ для обозначения минимального ω-локального l_{∞}^{ω}-значного спутника формации $\mathfrak{F}$ также используют символ $\mathfrak{F}_{\infty}^{\omega}$.

Для произвольной (тотально) ω-насыщенной формации $\mathfrak{F}$ через F обозначают ее *канонический (максимальный внутренний* ω*-локальный) спутник*. Согласно замечанию 1 [Skiba, Shemetkov, 2000] (см. также замечание 1.2.17 [Воробьев, 2012, с. 23]), если $\mathfrak{F} = \mathrm{LF}_\omega(F)$ и f – произвольный внутренний ω-локальный спутник формации $\mathfrak{F}$, то справедливо неравенство $f \leq F$.

Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – некоторая подходящая для $\mathfrak{F}$ ω-последовательность. Тогда ω-локальный $l_{\omega_\infty}^{\tau}$-значный спутник $Fp_1 p_2 \ldots p_n$ определим следующим образом:

1) Fp_1 – канонический ω-локальный спутник формации $F(p_1)$;

2) $Fp_1 \ldots p_n$ – канонический ω-локальный спутник формации $Fp_1 \ldots p_{n-1}(p_n)$.

2. Вспомогательные результаты

Нам понадобятся некоторые известные факты теории формаций конечных групп, которые мы сформулируем в виде следующих лемм.

Лемма 1 [Skiba, Shemetkov, 2000]. *Если* $\mathfrak{F} = \theta^{\omega}\,\mathrm{form}(\mathfrak{X})$ *и* f *– минимальный* ω*-локальный* θ*-значный спутник формации* $\mathfrak{F}$, *то справедливы следующие утверждения:*

1) $f(\omega') = \theta\mathrm{form}(G/G_{\omega d} \mid G \in \mathfrak{X})$;

2) $f(p) = \theta\mathrm{form}(\mathfrak{X}(F_p))$ *для всех* $p \in \omega$;

3) если $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(h)$, *спутник* h *является* θ*-значным и* p *– некоторый фиксированный элемент* ω, *то* $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f_1)$, *где* $f_1(a) = h(a)$ *для всех* $a \in (\omega \setminus \{p\}) \cup \{\omega'\}$,

$$f_1(p) = \theta\mathrm{form}(G \mid G \in h(p) \cap \mathfrak{F},\ O_p(G) = 1),$$

и, кроме того, $f_1(p) = f(p)$;

4) $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(g)$, *где* $g(\omega') = \mathfrak{F}$ *и* $g(p) = f(p)$ *для всех* $p \in \omega$.

Лемма 2 [Skiba, Shemetkov, 2000]. *Пусть формация* $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, *где* $\mathfrak{H} = LF_{\omega}(h)$, $\mathfrak{M} = LF_{\omega}(m)$ *и спутники* h *и* m *являются внутренними. Тогда формация* $\mathfrak{F}$ ω*-локальна и* $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f)$, *где* $f(\omega') = \mathfrak{F}$ *и*

$$f(p) = \begin{cases} m(p)\mathfrak{H}, & \text{если } p \in \pi(\mathfrak{M}) \cap \omega, \\ h(p), & \text{если } p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{M}). \end{cases}$$

Лемма 3 [Skiba, Shemetkov, 2000]. *Если* $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f)$ *и* $G/O_p(G) \in \mathfrak{F} \cap f(p)$ *для некоторого* $p \in \omega$, *то* $G \in \mathfrak{F}$.

Лемма 4 [Скиба, 1997, с. 152]. *Пусть* $N_1 \times \ldots \times N_k = \mathrm{Soc}(G)$, *где* $k > 1$ *и* G *– группа с* $O_p(G) = 1$. *Пусть* M_i *– наибольшая нормальная в* G *группа, содержащая* $N_1 \times \ldots \times N_{i-1} \times N_{i+1} \times \ldots \times N_k$, *но не содержащая* N_i. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) для любого $i \in \{1, \ldots, k\}$ *факторгруппа* G/M_i *монолитична и ее монолит* $N_i M_i / M_i$ G*-изоморфен* N_i *и* $O_p(G/M_i) = 1$;

2) $M_1 \cap \ldots \cap M_k = 1$.

Лемма 5 [Safonov, 2006a; Safonov, 2007]. *Пусть* $\mathfrak{M}$ *– непустая наследственная формация,* $\mathfrak{F}$ *– непустая* τ*-замкнутая формация. Тогда* $\mathfrak{M}\mathfrak{F}$ *–* τ*-замкнутая формация.*

Лемма 6 [Сафонов, 2004]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– непустая формация,* π *– такое множество простых чисел, что* $\pi(\mathfrak{F}) \cap \omega \subseteq \pi$. *Тогда произведение формаций* $\mathfrak{S}_{\pi}\mathfrak{F}$ *является тотально* ω*-насыщенной формацией.*

Из лемм 5 и 6 непосредственно вытекает

Лемма 7. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– непустая* τ*-замкнутая формация,* π *– такое множество простых чисел, что* $\pi(\mathfrak{F}) \cap \omega \subseteq \pi$. *Тогда произведение формаций* $\mathfrak{S}_{\pi}\mathfrak{F}$ *является* τ*-замкнутой тотально* ω*-насыщенной формацией.*

Лемма 8 [Skiba, Shemetkov, 2000]. *Пусть* $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f)$, *где* $f(\omega') = \mathfrak{F}$ *и* $G \notin \mathfrak{F}$. *Тогда либо* $G^{\mathfrak{F}} \not\subseteq G_{\omega d}$, *либо найдется такое число* $p \in \pi(G^{\mathfrak{F}}) \cap \omega$, *что* $G/F_p(G)) \notin f(p)$.

Лемма 9 [Skiba, Shemetkov, 2000]. *Пусть* θ *– такая полная решетка формаций, что* $\theta^{\omega} \subseteq \theta$ *и для любой формации* $\mathfrak{H} \in \theta$ *формация* $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$ *принадлежит* θ *для всех* $p \in \omega$. *Тогда если* $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(F) \in \theta^{\omega}$, *то спутник* F *является* θ*-значным.*

Лемма 10 [Скиба, 1997, с. 158]. *Решетка* l_n^τ *является полной подрешеткой решетки* l_n.

3. Основной результат

Для доказательства теоремы установим несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 11. Для любого простого числа p и для любой формации $\mathfrak{H} \in l_{\omega_\infty}^\tau$ имеет место $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H} \in l_{\omega_\infty}^\tau$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$. Поскольку формация $\mathfrak{H}$ – τ-замкнутая, то по лемме 5 формация $\mathfrak{M}$ также является τ-замкнутой формацией. Докажем, что $\mathfrak{M}$ тотально ω-насыщена.

Пусть вначале $p \in \omega$. Формация $\mathfrak{N}_p$ имеет такой внутренний ω-локальный спутник m, что $m(p)=(1)$, $m(\omega')=(1)$ и $m(q)=\varnothing$ для всех $q \in \omega \setminus \{p\}$ (см. доказательство леммы 11 [Skiba, Shemetkov, 2000] и леммы 1.5.6 [Воробьев, 2012, с. 58]) Ввиду леммы 2 формация $\mathfrak{M}$ имеет спутник f, удовлетворяющий условиям: $f(p)=\mathfrak{H}$, $f(\omega')=\mathfrak{M}$ и $f(q)=h(q)$ для любого $q \in \omega \setminus \{p\}$. Поскольку $\mathfrak{H} \in l_{\omega_\infty}^\tau$, то $\mathfrak{M}$ является n-кратно ω-насыщенной для любого натурального n. Следовательно, $\mathfrak{M}$ – тотально ω-насыщенная формация.

Пусть теперь $p \notin \omega$. Формация $\mathfrak{N}_p$ имеет такой пустой ω-локальный спутник m, что $m(q)=\varnothing$ для всех $q \in \omega$ и $m(\omega')=\mathfrak{N}_p$ [Skiba, Shemetkov, 2000; Воробьев, 2012, с. 17]. Тогда согласно лемме 2, формация $\mathfrak{M}$ имеет спутник f, такой что $f(q)=h(q)$ для любого $q \in \omega$ и $f(\omega')=\mathfrak{M}$. Следовательно, $\mathfrak{M}$ – тотально ω-насыщенная формация. Таким образом, в любом случае $\mathfrak{M} \in l_{\omega_\infty}^\tau$. Лемма доказана.

Лемма 12. Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга, замкнутый относительно фактор-групп. И пусть $G = G_1 \times \ldots \times G_n$, где $n \geq 2$. Тогда $G_\mathfrak{F} = (G_1)_\mathfrak{F} \times \ldots \times (G_n)_\mathfrak{F}$.

Доказательство. Индукция по числу сомножителей n прямого произведения. Пусть $n=2$. Поскольку $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга, то $(G_1)_\mathfrak{F} \times (G_2)_\mathfrak{F} \leq G_\mathfrak{F}$ и $G_\mathfrak{F} \cap G_i = (G_i)_\mathfrak{F}$, $i=1,2$. Ввиду того, что $G_1G_\mathfrak{F}/G_1 \trianglelefteq G/G_1 \cong G_2$ и $\mathfrak{F}$ – класс, замкнутый относительно фактор-групп (гомоморф), имеем $G_1G_\mathfrak{F}/G_1 \cong G_\mathfrak{F}/G_\mathfrak{F} \cap G_1 = G_\mathfrak{F}/(G_1)_\mathfrak{F} \in \mathfrak{F}$, и группа $G_\mathfrak{F}/(G_1)_\mathfrak{F}$ – изоморфна нормальной $\mathfrak{F}$-подгруппе группы G_2. Поэтому $|G_\mathfrak{F}/(G_1)_\mathfrak{F}| \leq |(G_2)_\mathfrak{F}|$ и $G_\mathfrak{F} = (G_1)_\mathfrak{F} \times (G_2)_\mathfrak{F}$ (т. е. $\mathfrak{F}$ в данном случае является классом Локетта; см. теорема 1.9 [Doerk, Hawkes, 1992, p. 680], а также предложение 1.25 [Doerk, Hawkes, 1992, p. 686]).

Утверждение леммы для произвольного натурального $n \geq 3$ следует, с учетом базы и предположения индукции, из соотношений

$$G_\mathfrak{F} = (G_1 \times \ldots \times G_n)_\mathfrak{F} = ((G_1 \times \ldots \times G_{n-1}) \times G_n)_\mathfrak{F} = (G_1 \times \ldots \times G_{n-1})_\mathfrak{F} \times (G_n)_\mathfrak{F} =$$
$$= (G_1)_\mathfrak{F} \times \ldots \times (G_{n-1})_\mathfrak{F} \times (G_n)_\mathfrak{F}.$$

Лемма доказана.

Лемма 13. *Пусть* $W = A\,wr\,B = [K]B$, *где* K – *база регулярного сплетения* W, $A, B \neq 1$. *И пусть* B_1 – *подгруппа группы* B, *такая что* $1 \neq B_1 \lhd B$, $m = |B : B_1|$, $I = \{1,\ldots,m\}$, $T = \{t_i \mid i \in I\}$ – *левая трансверсаль* B_1 *в* B ($B = \bigcup\limits_{i=1}^{m} t_i B_1$). *Тогда*

1) если $M_1 = \{f \in K \mid \forall\, i \in I : \prod\limits_{b_1 \in B_1} f(t_i b_1) \in A'\}$, *где* $A' = [A, A]$ – *коммутант группы* A, *то* $[B_1, K] = M_1$ *и* $M_1 = \langle X_1 \rangle$, *где*

$$X_1 = \{f \in K \mid \exists\, i_0 \in I\ \exists\, b_{1,0} \in B_1, b_{1,0} \neq 1 : f(t_{i_0}) = f(t_{i_0} b_{1,0})^{-1};\ f(y) = 1,\ y \neq t_{i_0}, t_{i_0} b_{1,0}\}.$$

Кроме того, M_1 *является подпрямым произведением в* K;

2) Для нормального замыкания B_1^W *подгруппы* B_1 *в* W *имеет место* $B_1^W = B_1 \cdot M_1$;

3) Пусть, кроме того, $N \lhd W$ *и* $B_1 = N \cap B \neq 1$. *Тогда* $N \cap K$ – *подпрямое произведение в* K.

Доказательство. 1. Здесь и далее для заданных групп A и B через $A^{(B)}$ будем обозначать прямое произведение изоморфных копий группы A, индексированных элементами группы B. Тогда $A^{(B)} = \{f \mid f : B \to A\}$ – группа всех функций $f : B \to A$ с покомпонентным умножением. Для произвольного $b \in B$ через A_b будем обозначать b-ую копию пассивной группы A, т. е. $A_b = \{f \in K \mid f(y) = 1, y \neq b\}$. Таким образом, $K = A^{(B)} = \prod\limits_{b \in B}^{\times} A_b$. Напомним, что для $f \in A^{(B)}$, $b \in B$, функцию f^b определяют, полагая $f^b(y) = f(y b^{-1})$ для всех $y \in B$ [Doerk, Hawkes, 1992; Neumann et al., 1962; Neumann, 1964]. Согласно лемме 8.1 [Neumann, 1964] (см. также лемма 18.8 (a) [Doerk, Hawkes, 1992, p. 67]), $K \cdot B_1 \overset{\psi}{\cong} A^{(T)}\, wr\, B_1$, где изоморфизм $\psi : K \cdot B_1 \to A^{(T)}\, wr\, B_1$ задается в виде $\psi : f \cdot b_1 \mapsto \tilde{f} \cdot b_1$, причем $f \in K = A^{(B)}$, $b_1 \in B_1$, $\tilde{f} \in (A^{(T)})^{(B_1)}$. Функция $\tilde{f}$ определяется следующим образом (см. теорема 5.4 [Neumann et al., 1962]): $\tilde{f}(y) = \varphi \in A^{(T)}$, где $\varphi : T \to A$ – зависит от $y \in B_1$ и удовлетворяет равенству $\varphi(t_i) = f(t_i y)$ для любого $i \in I$. Отсюда $f(t_i y) = \tilde{f}(y)(t_i)$. Для $\tilde{f} \in (A^{(T)})^{(B_1)}$, $b_1 \in B_1$ функцию $\tilde{f}^{b_1}$ определяют, полагая $\tilde{f}^{b_1}(y) = \tilde{f}(y b_1^{-1})$. При этом $\psi(f^{b_1}) = \tilde{f}^{b_1}$.

Обозначим через $\tilde{K}$ базу регулярного сплетения $A^{(T)}\, wr\, B_1$. Тогда, как несложно видеть, $\psi(K) = (A^{(T)})^{(B_1)} = \tilde{K}$. Для образа взаимного коммутанта $[B_1, K]$ при изоморфизме ψ имеют место соотношения $\psi([B_1, K]) = [\psi(B_1), \psi(K)] = [B_1, \psi(K)] = [B_1, \tilde{K}]$.

Поскольку $B_1 \neq 1$, то ввиду теоремы 4.1 [Neumann, 1964] (см. лемма 18.3 (a), (b) [Doerk, Hawkes, 1992, p. 63] и предложение 18.4 (b) [Doerk, Hawkes, 1992, p. 65]) имеет место равенство $[B_1, \tilde{K}] = \tilde{M}_1$, где $\tilde{M}_1 = \{\tilde{f} \in \tilde{K} \mid \prod\limits_{b_1 \in B_1} \tilde{f}(b_1) \in (A^{(T)})'\}$. Учитывая, что по свойствам коммутанта $(A^{(T)})' = (\prod\limits_{i \in I} A_{t_i})' = \prod\limits_{i \in I} A'_{t_i} = A'^{(T)}$, а также равенство $f(t_i b_1) = \tilde{f}(b_1)(t_i)$, справедливое для любых $b_1 \in B_1$, $i \in I$, видим, что условие

$\prod\limits_{b_1\in B_1}\widetilde{f}(b_1)\in(A^{(T)})'=A'^{(T)}$, интерпретируемое в W, или, иначе, относящееся к соответствующему при изоморфизме ψ^{-1} множеству M_1, равносильно условию

$$\forall\, i\in I:(\prod_{b_1\in B_1}\widetilde{f}(b_1))(t_i)=\prod_{b_1\in B_1}\widetilde{f}(b_1)(t_i)=\prod_{b_1\in B_1}f(t_ib_1)\in A'_{t_i}\cong A'.$$

Значит, $\psi^{-1}(\widetilde{M}_1)=M_1$. Применяя к обеим частям равенства $[B_1,\widetilde{K}]=\widetilde{M}_1$ изоморфизм ψ^{-1} и учитывая равенство $\psi([B_1,K])=[B_1,\widetilde{K}]$, получаем $[B_1,K]=M_1$.

Далее, из той же теоремы следует, что $\widetilde{M}_1=\left\langle\widetilde{X}_1\right\rangle$, где

$$\widetilde{X}_1=\{\widetilde{f}\in\widetilde{K}\mid\exists\, b_{1,0}\in B_1, b_{1,0}\neq 1:\widetilde{f}(1)=\widetilde{f}(b_{1,0})^{-1};\ \widetilde{f}(y)=1,\ y\neq 1, b_{1,0}\}.$$

Рассуждая аналогично предыдущему, находим, что $\psi^{-1}(\widetilde{X}_1)=\widehat{X}_1$, где

$$\widehat{X}_1=\{f\in K\mid\exists\, b_{1,0}\in B_1, b_{1,0}\neq 1\ \forall\, i\in I: f(t_i)=f(t_ib_{1,0})^{-1};\ f(y)=1,\ y\neq t_i, t_ib_{1,0}\}.$$

Тогда из $\widetilde{M}_1=\left\langle\widetilde{X}_1\right\rangle$ ввиду $\psi^{-1}(\widetilde{M}_1)=M_1$ следует $M_1=\left\langle\widehat{X}_1\right\rangle$.

Покажем, что $\left\langle\widehat{X}_1\right\rangle=\left\langle X_1\right\rangle$, где X_1 – множество из условия теоремы. Заметим, что если $m=|B:B_1|=1$, то $B_1=B$. Тогда $\widehat{X}_1=X_1$, откуда $\left\langle\widehat{X}_1\right\rangle=\left\langle X_1\right\rangle$. Поэтому считаем, что $m\neq 1$. Из очевидного включения $X_1\subseteq\widehat{X}_1$ следует $\left\langle X_1\right\rangle\subseteq\left\langle\widehat{X}_1\right\rangle$. Пусть $f\in\widehat{X}_1$. Если $f=1$ – единичная функция (т. е. $f(y)=1$ для любого $y\in B$), то очевидно, что $f\in X_1$. Пусть $f\neq 1$. И пусть $I_0=\{i\in I\mid t_i\in\mathrm{supp}(f)\cap T\}$, где $\mathrm{supp}(f)=\{b\in B\mid f(b)\neq 1\}$ – носитель функции f. Тогда $I_0\neq\varnothing$ и из определения $\widehat{X}_1$ следует существование такого $\widehat{b}_1\in B_1$, $\widehat{b}_1\neq 1$, что для любого $i\in I_0$ имеет место $f(t_i)=f(t_i\widehat{b}_1)^{-1}\neq 1$. Для каждого $i\in I_0$ определим такую функцию $\varphi_i\in X_1$, что $\varphi_i(t_i)=\varphi_i(t_i\widehat{b}_1)^{-1}=f(t_i)$; $\varphi_i(y)=1$, если $y\neq t_i, t_i\widehat{b}_1$. Тогда $f=\prod\limits_{i\in I_0}\varphi_i$, причем произведение не зависит от порядка следования сомножителей, поскольку для любых $k,l\in I_0$, $k\neq l$ ввиду $\mathrm{supp}(\varphi_k)\cap\mathrm{supp}(\varphi_l)=\varnothing$ функции φ_k и φ_l коммутируют. Значит, $f\in X_1$. Следовательно, $\left\langle\widehat{X}_1\right\rangle\subseteq\left\langle X_1\right\rangle$. Таким образом, $M_1=\left\langle\widehat{X}_1\right\rangle=\left\langle X_1\right\rangle$.

Наконец, для произвольного $b_0\in B$ пусть $\pi_{b_0}:K\to A_{b_0}$ – проектирование $K=A^{(B)}=\prod\limits_{b\in B}^{\times}A_b$ на A_{b_0} – b_0-ую копию пассивной группы. Поскольку T – левая трансверсаль B_1 в B, то b_0 единственным образом представляется в виде $b_0=t_{i_0}b_{1,0}$, где $t_{i_0}\in T$, $b_{1,0}\in B_1$. Пусть $a\in A$ – произвольный элемент пассивной группы A. Тогда если $b_{1,0}\neq 1$, то для функции $g\in K$ с условием $g(t_{i_0})=g(t_{i_0}b_{1,0})^{-1}=g(b_0)^{-1}=a^{-1}$; $g(y)=1$, если $y\neq t_{i_0}, t_{i_0}b_{1,0}$ – имеет место $g\in X_1$. Если $b_{1,0}=1$, то $b_0=t_{i_0}$. Поскольку $B_1\neq 1$, то существует $\overline{b}_1\in B_1$, $\overline{b}_1\neq 1$. Рассматривая теперь функцию $h\in K$ с условием $h(t_{i_0})=h(b_0)=h(t_{i_0}\overline{b}_1)^{-1}=a$; $h(y)=1$, если $y\neq t_{i_0}, t_{i_0}\overline{b}_1$, – аналогично имеем $h\in X_1$.

Ввиду включения $X_1 \subseteq \langle X_1 \rangle = M_1$ делаем вывод, что $\pi_{b_0}(M_1) = A_{b_0} \cong A$. Следовательно, M_1 – подпрямое произведение в K.

2. Для B_1^W ввиду леммы 7.4 (h) [Doerk, Hawkes, 1992, p. 23] имеем

$$B_1^W = B_1[B_1, W] = B_1[B_1, K \cdot B] = B_1[B_1, B][B_1, K] = B_1[B_1, K] = B_1M_1$$

(здесь мы использовали также условия $B \in N_W(K)$, $B_1 \lhd B$ и установленное в утверждении 1 равенство $[B_1, K] = M_1$).

3. По условию $B_1 = N \cap B \neq 1$, поэтому N – неединичная нормальная подгруппа регулярного сплетения $W = A \wr B$. Отсюда из леммы 18.8 (b) [Doerk, Hawkes, 1992, p. 67; Каргаполов, Мерзляков, 2009, с. 72] следует, что $N \cap K \neq 1$. Из утверждений 1 и 2 получаем, что $N \supseteq B_1^W = B_1 \cdot M_1 \supseteq M_1$. Тогда $N \cap K \supseteq M_1 \cap K = M_1$. Согласно утверждению 1, M_1 – подпрямое произведение в K. Следовательно, $N \cap K$ – также подпрямое произведение в K. Лемма доказана.

Напомним, что абстрактный класс $\mathfrak{F}$ называется *радикальным классом*, или *классом Фиттинга*, если он замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и для любой группы G имеет место включение $G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$. При доказательстве следующей леммы символом $\mathfrak{MH}$ обозначается *радикальное произведение классов Фиттинга* $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$, т. е. $\mathfrak{MH} = \{G \mid G/G_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{H}\}$.

Напомним также, что для любых непустых множеств простых чисел π, σ символом $O_{\pi,\sigma}(G)$ обозначается характеристическая подгруппа группы G, определяемая соотношением $O_{\pi,\sigma}(G)/O_\pi(G) = O_\sigma(G/O_\pi(G))$ [Doerk, Hawkes, 1992, p. 28]. Тогда для любого простого числа p имеет место $F_p(G) = O_{p',p}(G)$. Символом $F_\pi(G)$ обозначим характеристическую подгруппу группы G, определяемую соотношением

$$F_\pi(G) = \bigcap_{p\in\pi} F_p(G) = \bigcap_{p\in\pi} O_{p',p}(G).$$

Лемма 14. *Пусть* $\mathfrak{X}$ *– класс Фиттинга, замкнутый относительно фактор-групп. И пусть* $W_1 = K \cdot B_1 \le W = A \wr B = K \cdot B$, *где* $K = A^{(B)} = \{f \mid f : B \to A\}$ *– база регулярного сплетения* W, $A, B \neq 1$, B_1 *– подгруппа группы* B. *Тогда*

1) Если $A_{\mathfrak{X}} \neq A$, *то* $(W_1)_{\mathfrak{X}} = K_{\mathfrak{X}} = (A_{\mathfrak{X}})^{(B)}$; *в частности, если* $A_{\mathfrak{X}} = 1$, *то* $(W_1)_{\mathfrak{X}} = 1$.

Если $A_{\mathfrak{X}} = A$, *то* $(W_1)_{\mathfrak{X}} = K \cdot \overline{B}_1 = A^{(B)} \cdot \overline{B}_1$, *где* $\overline{B}_1 = \prod_{\substack{N \lhd B_1,\, N\in\mathfrak{X},\\ K\cdot N\in\mathfrak{X}}} N$, $\overline{B}_1 \le (B_1)_{\mathfrak{X}}$ *и, кроме того,* $\overline{B}_1$ *является наибольшей нормальной* $\mathfrak{X}$*-подгруппой группы* B_1, *удовлетворяющей условию* $K \cdot \overline{B}_1 \in \mathfrak{X}$; *в частности, если* $K \cdot (B_1)_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{X}$, *то* $(W_1)_{\mathfrak{X}} = K \cdot (B_1)_{\mathfrak{X}} = A^{(B)} \cdot (B_1)_{\mathfrak{X}}$;

2) Пусть, кроме того, $A = P$ *– неединичная* p*-группа для некоторого простого числа* p, σ и ν *– такие непустые множества простых чисел, что* $p \in \nu$, $\sigma \subseteq p'$. *Тогда*

$$O_\sigma(W_1) = 1,$$

$$O_\nu(W_1) = K \cdot O_\nu(B_1) = P^{(B)} \cdot O_\nu(B_1),$$

$$O_{\nu,\sigma}(W_1) = K \cdot O_{\nu,\sigma}(B_1) = P^{(B)} \cdot O_{\nu,\sigma}(B_1),$$

$$O_{\sigma,\nu}(W_1) = O_\nu(W_1) = K \cdot O_\nu(B_1) = P^{(B)} \cdot O_\nu(B_1).$$

В частности,

$$F_p(W_1) = F_\nu(W_1) = F(W_1) = O_p(W_1) = K \cdot O_p(B_1) = P^{(B)} \cdot O_p(B_1).$$

Доказательство. 1. Поскольку $K \triangleleft W$ и $\mathfrak{X}$ – класс Фиттинга, то $K \triangleleft W_1$ и $K_{\mathfrak{X}} = (W_1)_{\mathfrak{X}} \cap K$. Ввиду леммы 12

$$K_{\mathfrak{X}} = (A^{(B)})_{\mathfrak{X}} = (\prod_{b\in B}{}^{\times} A_b)_{\mathfrak{X}} = \prod_{b\in B}{}^{\times} (A_b)_{\mathfrak{X}} = \prod_{b\in B}{}^{\times} (A_{\mathfrak{X}})_b = (A_{\mathfrak{X}})^{(B)}.$$

Тогда если $B_1 = 1$, то $W_1 = K = A^{(B)}$ и $(W_1)_{\mathfrak{X}} = K_{\mathfrak{X}} = (A^{(B)})_{\mathfrak{X}} = (A_{\mathfrak{X}})^{(B)}$. Поэтому если $A_{\mathfrak{X}} \neq A$, то $(W_1)_{\mathfrak{X}} = K_{\mathfrak{X}} = (A_{\mathfrak{X}})^{(B)}$. Если $A_{\mathfrak{X}} = A$, то $K_{\mathfrak{X}} = (A_{\mathfrak{X}})^{(B)} = A^{(B)} = K$, $\overline{B}_1 = B_1 = 1$ и $(W_1)_{\mathfrak{X}} = K_{\mathfrak{X}} = K \cdot 1 = A^{(B)} \cdot 1$. Значит, для $B_1 = 1$ утверждение 1 справедливо. В дальнейшем считаем, что $B_1 \neq 1$.

Пусть $A_{\mathfrak{X}} \neq A$. Если $A_{\mathfrak{X}} = 1$, то из соотношений $K_{\mathfrak{X}} = (A_{\mathfrak{X}})^{(B)}$ и $K_{\mathfrak{X}} = (W_1)_{\mathfrak{X}} \cap K$ следует, что $K_{\mathfrak{X}} = 1$ и $(W_1)_{\mathfrak{X}} \cap K = 1$. Согласно лемме 8.1 [Neumann, 1964] (см. также лемма 18.8 (a) [Doerk, Hawkes, 1992, p. 67]) имеем $W_1 = K \cdot B_1 \overset{\psi}{\cong} A^{(T)} wr B_1$, где T – левая трансверсаль B_1 в B, ψ – изоморфизм, описанный при доказательстве леммы 13. Обозначим через $\widetilde{W}_1$ регулярное сплетение $A^{(T)} wr B$, через $\widetilde{K}$ – его базу. Тогда $\psi(W_1) = \widetilde{W}_1$, $\psi(K) = (A^{(T)})^{(B_1)} = \widetilde{K}$ и, кроме того, $\psi((W_1)_{\mathfrak{X}}) = (\widetilde{W}_1)_{\mathfrak{X}}$. Применяя ψ к обеим частям равенства $(W_1)_{\mathfrak{X}} \cap K = 1$, получаем $(\widetilde{W}_1)_{\mathfrak{X}} \cap \widetilde{K} = 1$. Тогда $(\widetilde{W}_1)_{\mathfrak{X}} = 1$ согласно лемме 18.8 (b) [Doerk, Hawkes, 1992, p. 67] (см. также упражнение 6.2.2 [Каргаполов, Мерзляков, 2009, с. 72]). Из последнего равенства, ввиду $K_{\mathfrak{X}} = 1$, следуют соотношения

$$\psi^{-1}((\widetilde{W}_1)_{\mathfrak{X}}) = (W_1)_{\mathfrak{X}} = 1 = K_{\mathfrak{X}} = (A_{\mathfrak{X}})^{(B)}.$$

Значит, утверждение для $A_{\mathfrak{X}} = 1$ справедливо.

Пусть теперь $A_{\mathfrak{X}} \neq 1$. Тогда из соотношений $K_{\mathfrak{X}} = (A_{\mathfrak{X}})^{(B)}$ и $K_{\mathfrak{X}} = (W_1)_{\mathfrak{X}} \cap K$ получаем, что $K_{\mathfrak{X}} \neq 1$ и $(W_1)_{\mathfrak{X}} \cap K \neq 1$. Следовательно, $(W_1)_{\mathfrak{X}} \neq 1$. Пусть $H_1 = (W_1)_{\mathfrak{X}} \cap B_1$. Предположим, что $H_1 \neq 1$. Обозначим через $\widetilde{H}_1$ подгруппу группы $\widetilde{W}_1$, ψ-изоморфную H_1. Тогда из последнего равенства имеем

$$\widetilde{H}_1 = (\widetilde{W}_1)_{\mathfrak{X}} \cap \widetilde{B}_1 = (\widetilde{W}_1)_{\mathfrak{X}} \cap B_1 \neq 1.$$

Применяя лемму 13, заключаем, что $(\widetilde{W}_1)_{\mathfrak{X}} \cap \widetilde{K}$ – подпрямое произведение в $\widetilde{K}$. Отсюда ввиду соотношений

$$\psi^{-1}((\widetilde{W}_1)_{\mathfrak{X}} \cap \widetilde{K}) = (W_1)_{\mathfrak{X}} \cap K = K_{\mathfrak{X}}$$

получаем, что $K_{\mathfrak{X}}$ – подпрямое произведение в K.

Для произвольного $b_0 \in B$ пусть $\pi_{b_0} : K \to A_{b_0}$ – проектирование $K = A^{(B)} = \prod_{b\in B}{}^{\times} A_b$ на A_{b_0} – b_0-ую копию пассивной группы. Тогда ввиду $K_{\mathfrak{X}} = (A_{\mathfrak{X}})^{(B)}$ имеем

$$\pi_{b_0}(K_{\mathfrak{X}}) = \pi_{b_0}((A_{\mathfrak{X}})^{(B)}) = (A_{\mathfrak{X}})_{b_0} \cong A_{\mathfrak{X}} \neq A..$$

Получили противоречие. Значит, исходное предположение неверно, и $H_1 = (W_1)_{\mathfrak{X}} \cap B_1 = 1$. Тогда из соотношений $W_1 = K \cdot B_1$, $K \cap B_1 = 1$ следует, что $(W_1)_{\mathfrak{X}} \leq K$. Учитывая, что $K_{\mathfrak{X}} = (W_1)_{\mathfrak{X}} \cap K$, окончательно получаем

$$(W_1)_{\mathfrak{X}} = K_{\mathfrak{X}} = (A_{\mathfrak{X}})^{(B)}.$$

Замечание 1. Несложно видеть, что если $\mathfrak{X}$ – класс Локетта (см. теорема 1.9 [Doerk, Hawkes, 1992, p. 680]), то рассуждения, проведенные при доказательстве данной части утверждения, останутся в силе. Тогда также получаем доказательство утверждения 2.1 (a) [Doerk, Hawkes, 1992, p. 697].

Пусть теперь $A_{\mathfrak{X}} = A$. Ввиду установленного выше равенства $K_{\mathfrak{X}} = (A_{\mathfrak{X}})^{(B)}$ имеем

$$K_{\mathfrak{X}} = (A_{\mathfrak{X}})^{(B)} = A^{(B)} = K,$$

(т. е. K является $\mathfrak{X}$-группой). Поэтому $K \leq (W_1)_{\mathfrak{X}}$. Тогда имеют место равенства

$$(W_1)_{\mathfrak{X}} = (W_1)_{\mathfrak{X}} \cap W_1 = (W_1)_{\mathfrak{X}} \cap K \cdot B_1 = K \cdot ((W_1)_{\mathfrak{X}} \cap B_1).$$

Поскольку $K \cap ((W_1)_{\mathfrak{X}} \cap B_1) \leq K \cap B_1 = 1$ и класс $\mathfrak{X}$ замкнут относительно фактор-групп, то $K \cap ((W_1)_{\mathfrak{X}} \cap B_1) = 1$ и $(W_1)_{\mathfrak{X}} / K \cong (W_1)_{\mathfrak{X}} \cap B_1 \in \mathfrak{X}$. Следовательно, так как $(W_1)_{\mathfrak{X}} \trianglelefteq W_1$, то $(W_1)_{\mathfrak{X}} \cap B_1$ – нормальная $\mathfrak{X}$-подгруппа группы B_1.

Пусть $X_{B_1} = \{N \trianglelefteq B_1 \mid N \in \mathfrak{X},\ K \cdot N \in \mathfrak{X}\}$ и $\overline{B_1}$ – группа из условия теоремы. Ввиду того, что K – $\mathfrak{X}$-группа, множество $X_{B_1} \neq \varnothing$, так как оно содержит единичную подгруппу. Очевидно, что $\forall\, N \in X_{B_1} : N \leq (B_1)_{\mathfrak{X}}$. Заметим также, что $\forall\, N \in X_{B_1} : K \cdot N \trianglelefteq W_1$, так как $N \trianglelefteq B_1$ и $K \trianglelefteq W_1$. Далее, X_{B_1} – частично упорядочено по включению и имеет единственный максимальный элемент $\widehat{B_1} = \left\langle N \mid N \in X_{B_1} \right\rangle$. Действительно, так как $\forall\, N \in X_{B_1} : N \trianglelefteq B_1$, $N \in \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}$-класс Фиттинга, то $\widehat{B_1}$ совпадает с произведением всех $N \in X_{B_1}$ и является нормальной $\mathfrak{X}$-подгруппой B_1. Следовательно,

$$\widehat{B_1} = \prod_{N \in X_{B_1}} N = \overline{B_1},$$

а также $\widehat{B_1} \leq (B_1)_{\mathfrak{X}}$. Аналогично из условий $\forall\, N \in X_{B_1} : K \cdot N \trianglelefteq W_1$, $K \cdot N \in \mathfrak{X}$, учитывая также, что $\mathfrak{X}$-класс Фиттинга, получаем, что подгруппа

$$\prod_{N \in X_{B_1}} K \cdot N = K \cdot \prod_{N \in X_{B_1}} N = K \cdot \widehat{B_1}$$

является нормальной $\mathfrak{X}$-подгруппой группы W_1. Это означает, что $\overline{B_1} = \widehat{B_1} \in X_{B_1}$. Поэтому $\overline{B_1}$ – наибольшая нормальная $\mathfrak{X}$-подгруппа группы B_1, удовлетворяющая условию $K \cdot \overline{B_1} \in \mathfrak{X}$.

Наконец, поскольку $(W_1)_{\mathfrak{X}} \cap B_1$ – нормальная $\mathfrak{X}$-подгруппа группы B_1 и $(W_1)_{\mathfrak{X}} = K \cdot ((W_1)_{\mathfrak{X}} \cap B_1) \in \mathfrak{X}$, то $(W_1)_{\mathfrak{X}} \cap B_1 \leq \overline{B_1}$. Следовательно, $(W_1)_{\mathfrak{X}} \leq K \cdot \overline{B_1}$. С другой стороны, $K \cdot \overline{B_1}$ – нормальная $\mathfrak{X}$-подгруппа группы W_1. Поэтому $K \cdot \overline{B_1} \leq (W_1)_{\mathfrak{X}}$. Следовательно,

$$(W_1)_{\mathfrak{X}} = K \cdot \overline{B}_1 = A^{(B)} \cdot \overline{B}_1 .$$

В частности, если $K \cdot (B_1)_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{X}$, то $\overline{B}_1 = (B_1)_{\mathfrak{X}}$ и $(W_1)_{\mathfrak{X}} = K \cdot (B_1)_{\mathfrak{X}} = A^{(B)} \cdot (B_1)_{\mathfrak{X}}$.

Замечание 2. Как следует из доказательства утверждения, если для класса $\mathfrak{X}$ дополнительно выполняется требование $\mathrm{Ext}_{\mathfrak{X}}\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}$, где $\mathrm{Ext}_{\mathfrak{X}}\mathfrak{X}$ – расширение $\mathfrak{X}$-группы посредством группы из $\mathfrak{X}$ (совпадающее в данном случае с $\mathfrak{X}\mathfrak{X}$ – радикальным произведением $\mathfrak{X}$ с $\mathfrak{X}$), то для случая $A_{\mathfrak{X}} = A$ имеет место включение $K \cdot (B_1)_{\mathfrak{X}} \in \mathrm{Ext}_{\mathfrak{X}}\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}$. Следовательно, $(W_1)_{\mathfrak{X}} = K \cdot (B_1)_{\mathfrak{X}} = A^{(B)} \cdot (B_1)_{\mathfrak{X}}$.

2. Пусть $A = P$ – неединичная p-группа для некоторого простого числа p, подмножества σ, ν – из условия теоремы. Для любого непустого множества $\pi \subseteq \mathrm{P}$ $\mathfrak{G}_{\pi}$ – радикальная формация, причем $\mathrm{Ext}_{\mathfrak{G}_{\pi}}\mathfrak{G}_{\pi} = \mathfrak{G}_{\pi}\mathfrak{G}_{\pi} \subseteq \mathfrak{G}_{\pi}$ (радикальное и корадикальное произведения в данном случае совпадают). Полагая последовательно π равным σ, ν и учитывая, что $O_{\sigma}(A) = 1$ и $O_{\nu}(A) = A$, из утверждения 1 получаем

$$O_{\sigma}(W_1) = 1,$$

$$O_{\nu}(W_1) = K \cdot O_{\nu}(B_1) = P^{(B)} \cdot O_{\nu}(B_1).$$

Покажем, что $O_{\nu,\sigma}(W_1) = K \cdot O_{\nu,\sigma}(B_1)$. Так как $O_{\nu}(A) = A$, то $O_{\nu,\sigma}(A) = A$. Пусть $\widehat{W}_1 = K \cdot O_{\nu,\sigma}(B_1)$. Поскольку $\mathrm{Ext}_{\mathfrak{G}_{\nu}}\mathfrak{G}_{\sigma} = \mathfrak{G}_{\nu}\mathfrak{G}_{\sigma}$ – радикальная формация (радикальное и корадикальное произведения в данном случае также совпадают), то ввиду утверждения 1 для доказательства тождества достаточно проверить выполнение условия $\widehat{W}_1 \in \mathfrak{G}_{\nu}\mathfrak{G}_{\sigma}$. Поскольку $O_{\nu,\sigma}(B_1) \le B_1$ и $K \cap B_1 = 1$, то $K \cap O_{\nu,\sigma}(B_1) = 1$. Кроме того, из условий $O_{\nu}(B_1) \triangleleft O_{\nu,\sigma}(B_1)$ и $K \triangleleft W_1$ следует, что

$$O_{\nu}(W_1) = K \cdot O_{\nu}(B_1) \triangleleft K \cdot O_{\nu,\sigma}(B_1) = \widehat{W}_1 .$$

Поэтому

$$\widehat{W}_1 / O_{\nu}(W_1) = K \cdot O_{\nu,\sigma}(B_1) / K \cdot O_{\nu}(B_1) \cong O_{\nu,\sigma}(B_1) / O_{\nu}(B_1) \cdot (K \cap O_{\nu,\sigma}(B_1)) =$$
$$= O_{\nu,\sigma}(B_1) / O_{\nu}(B_1) = O_{\sigma}(B_1 / O_{\nu}(B_1)) \in \mathfrak{G}_{\sigma} .$$

Таким образом, $\widehat{W}_1 \in \mathrm{Ext}_{\mathfrak{G}_{\nu}}\mathfrak{G}_{\sigma} = \mathfrak{G}_{\nu}\mathfrak{G}_{\sigma}$. Значит, ввиду утверждения 1 имеем

$$O_{\nu,\sigma}(W_1) = K \cdot O_{\nu,\sigma}(B_1) = P^{(B)} \cdot O_{\nu,\sigma}(B_1).$$

Наконец, из равенства $O_{\sigma}(W_1) = 1$ следует, что

$$O_{\sigma,\nu}(W_1) = O_{\nu}(W_1) = K \cdot O_{\nu}(B_1) = P^{(B)} \cdot O_{\nu}(B_1).$$

В частности,

$$F_p(W_1) = O_{p',p}(W_1) = O_p(W_1) = K \cdot O_p(B_1) = P^{(B)} \cdot O_p(B_1).$$

Учитывая последние соотношения, а также включения

$$O_p(W_1) \le \prod_{q \in \pi(W_1)}^{\times} O_q(W_1) = F(W_1) = \bigcap_{q \in \mathrm{P}} F_q(W_1) \le \bigcap_{q \in \nu} F_q(W_1) = F_{\nu}(W_1) \le F_p(W_1),$$

справедливые для любого множества ν из условия теоремы (см. теорема 13.4 (g) [Doerk, Hawkes, 1992, p. 44]), имеем

$$F_p(W_1) = F_{\nu}(W_1) = F(W_1) = O_p(W_1) = K \cdot O_p(B_1) = P^{(B)} \cdot O_p(B_1).$$

Лемма доказана.

Лемма 15. *Пусть* $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f)$, *где* f – ω*-локальный* $l_{\omega_{\infty}}^{\tau}$*-значный спутник формации* $\mathfrak{F}$. *Тогда* $\mathfrak{F}$ *является* τ*-замкнутой тотально* ω*-насыщенной формацией.*

Доказательство. Поскольку спутник f является $l_{\omega_{\infty}}^{\tau}$-значным, то по определению формация $\mathfrak{F}$ – тотально ω-насыщена. Покажем, что формация $\mathfrak{F}$ – τ-замкнута. Пусть $H \in \tau(G)$, где $G \in \mathfrak{F}$. И пусть $p \in \pi(H) \cap \omega$, $F_p = F_p(G)$. Тогда, поскольку для любого $a \in \omega \cup \{\omega'\}$ формация $f(a)$ – τ-замкнута, имеют место соотношения:

$$H/F_p \cap H \cong HF_p/F_p \in \tau(G/F_p) \subseteq f(p),$$
$$H/G_{\omega d} \cap H \cong HG_{\omega d}/G_{\omega d} \in \tau(G/G_{\omega d}) \subseteq f(\omega').$$

Так как

$$F_p \cap H \subseteq F_p(H) \text{ и } G_{\omega d} \cap H \subseteq H_{\omega d},$$

то для любого $p \in \pi(H) \cap \omega$ имеет место $H/F_p(H) \in f(p)$ и, кроме того, $H/H_{\omega d} \in f(\omega')$. Следовательно, $H \in \mathfrak{F}$. Итак, формация $\mathfrak{F}$ τ-замкнута. Значит, $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая тотально ω-насыщенная формация. Лемма доказана.

Лемма 16. *Пусть* $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(F)$ – τ*-замкнутая тотально* ω*-насыщенная формация. Тогда канонический спутник* F *является* $l_{\omega_{\infty}}^{\tau}$*-значным.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что $F(\omega') = \mathfrak{F} \in l_{\omega_{\infty}}^{\tau}$. Ясно также, что если $p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{F})$, то $F(p) = \varnothing \in l_{\omega_{\infty}}^{\tau}$. Покажем, что для любого $p \in \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$ имеет место $F(p) \in l_{\omega_{\infty}}^{\tau}$. Поскольку $\mathfrak{F} \in l_{\omega_{\infty}}$, то $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f)$, где все значения f являются n-кратно ω-насыщенными формациями для любого натурального n. Следовательно, $f(a) \in l_{\omega_{\infty}}$ для любого $a \in \omega \cup \{\omega'\}$. Поэтому $\mathfrak{F} \in (l_{\omega_{\infty}})^{\omega}$. Тогда, учитывая очевидное включение $(l_{\omega_{\infty}})^{\omega} \subseteq l_{\omega_{\infty}}$ и лемму 11, из леммы 9 получаем, что $F(p) \in l_{\omega_{\infty}}$.

Покажем, что формация $F(p)$ τ-замкнута. Пусть $G \in F(p)$ и $H \in \tau(G)$. Индукцией по $|G|$ покажем, что $H \in F(p)$. Пусть R – минимальная нормальная подгруппа в G. Тогда $HR/R \in \tau(G/R)$. Так как по предположению индукции $G/R \in F(p)$, то

$$H/R \cap H \cong HR/R \in F(p).$$

Поэтому, если $O_p(G) \neq 1$, то $H \in \mathfrak{N}_p F(p) = F(p)$. Кроме того, если в G имеются две различные минимальные нормальные подгруппы R и N, то

$$H \cong H/1 = H/R \cap N \cap H \in F(p)$$

как подпрямое произведение групп, изоморфных $H/R \cap H$ и $H/N \cap H$.

Пусть $O_p(G) = 1$ и R – единственная минимальная нормальная подгруппа в G. Пусть P – неединичная p-группа и $R = P \wr G = [K]G$, где K – база регулярного сплетения R. Поскольку $O_p(G) = 1$, то из леммы 14 следует, что $F_p(R) = O_p(R) = K$. Учитывая, что $R/O_p(R) \cong G \in F(p)$, из леммы 3 получаем, что $R \in \mathfrak{F}$. Пусть $\varphi : R \to R/K$ – канонический эпиморфизм группы R на R/K. Тогда $HK/K = H^{\varphi}$, и поэтому $HK/K \in \tau(R/K)$. Поскольку $R/K \cong G$ и $(HK/K)^{\varphi^{-1}} = HK$, то $HK \in \tau(R)$. Ввиду того, что $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая формация и $R \in \mathfrak{F}$, имеем $HK \in \mathfrak{F}$. Пусть $R_1 = HK$. Тогда $R_1/F_p(R_1) \in F(p)$. Далее, из леммы 14 следует, что

$$F_p(R_1) = O_p(R_1) = KO_p(H).$$

Значит,

$$R_1/F_p(R_1) = KH/KO_p(H) \cong H/O_p(H)(H \cap K) = H/O_p(H) \in F(p).$$

Следовательно, $H \in \mathfrak{N}_p F(p) = F(p)$. Поэтому формация $F(p)$ τ-замкнута для любого $p \in \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$.

Таким образом, формация $F(a)$ – τ-замкнута для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$. Следовательно, спутник F – $l^{\tau}_{\omega_\infty}$-значен. Лемма доказана.

Лемма 17. *Справедливо равенство* $(l^{\tau}_{\omega_\infty})^{\omega} = l^{\tau}_{\omega_\infty}$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} \in (l^{\tau}_{\omega_\infty})^{\omega}$. Тогда по определению $\mathfrak{F} = \mathrm{LF}_{\omega}(f)$, где f – ω-локальный $l^{\tau}_{\omega_\infty}$-значный спутник формации $\mathfrak{F}$. Ввиду леммы 15 $\mathfrak{F} \in l^{\tau}_{\omega_\infty}$. Следовательно, $(l^{\tau}_{\omega_\infty})^{\omega} \subseteq l^{\tau}_{\omega_\infty}$. Докажем обратное включение. Пусть $\mathfrak{F} \in l^{\tau}_{\omega_\infty}$ и $\mathfrak{F} = \mathrm{LF}_{\omega}(F)$. Из леммы 16 следует, что $F(a) \in l^{\tau}_{\omega_\infty}$ для любого $a \in \omega \cup \{\omega'\}$. Следовательно, $\mathfrak{F} \in (l^{\tau}_{\omega_\infty})^{\omega}$. Значит, $l^{\tau}_{\omega_\infty} \subseteq (l^{\tau}_{\omega_\infty})^{\omega}$. Лемма доказана.

Ввиду леммы 17 из леммы 1 вытекает следующий результат.

Лемма 18. *Пусть* $\mathfrak{F} = l^{\tau}_{\omega_\infty}\,\mathrm{form}(\mathfrak{X})$, *где* $\mathfrak{X}$ *– непустой класс групп. Тогда если* f *– минимальный* ω*-локальный* $l^{\tau}_{\omega_\infty}$*-значный спутник формации* $\mathfrak{F}$, *то справедливы следующие утверждения:*

1) $f(\omega') = l^{\tau}_{\omega_\infty}\,\mathrm{form}(G/G_{\omega d} \mid G \in \mathfrak{X})$;

2) $f(p) = l^{\tau}_{\omega_\infty}\,\mathrm{form}(\mathfrak{X}(F_p))$ *для всех* $p \in \omega$;

3) если h *– произвольный* ω*-локальный* $l^{\tau}_{\omega_\infty}$*-значный спутник формации* $\mathfrak{F}$ *и* p *– некоторое фиксированное число из* ω, *то* $\mathfrak{F} = \mathrm{LF}_{\omega}(f_1)$, *где* $f_1(a) = h(a)$ *для всех* $a \in (\omega \setminus \{p\}) \cup \{\omega'\}$,

$$f_1(p) = l^{\tau}_{\omega_\infty}\,\mathrm{form}(G \mid G \in h(p) \cap \mathfrak{F}, O_p(G) = 1),$$

кроме того, $f_1(p) = f(p)$.

Лемма 19. *Пусть* θ *– полная решетка формаций и* f_i *– минимальный* ω*-локальный* θ*-значный спутник формации* $\mathfrak{F}_i \in \theta^{\omega}$, *где* $i \in I$. *Тогда* $\vee_{\theta}(f_i \mid i \in I)$ *– минимальный* ω*-локальный* θ*-значный спутник формации* $\mathfrak{F} = \vee_{\theta^{\omega}}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$.

Доказательство. Введем следующие обозначения: $\pi = \pi(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i) = \bigcup_{i \in I} \pi(\mathfrak{F}_i) = \pi(\mathfrak{F})$, $f = \vee_{\theta}(f_i \mid i \in I)$ и h – минимальный ω-локальный θ-значный спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда, если $p \in \omega \setminus \pi$, то для любого $i \in I$ имеет место $f_i(p) = \varnothing$. Значит, $f(p) = \varnothing$. Понятно также, что $h(p) = \varnothing$.

Пусть теперь $p \in \pi \cap \omega$. Тогда найдется такое $i \in I$, что $f_i(p) \neq \varnothing$. Тогда, согласно лемме 1, имеют место равенства:

$$h(p)=\theta\operatorname{form}(G/F_p(G)\mid G\in\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i)=\theta\operatorname{form}(\bigcup_{i\in I}\theta\operatorname{form}(G/F_p(G)\mid G\in\mathfrak{F}_i))=$$
$$=\theta\operatorname{form}(\bigcup_{i\in I}f_i(p))=(\vee_\theta(f_i\mid i\in I))(p)=f(p).$$

Кроме того, из леммы 1 следует, что
$$h(\omega')=\theta\operatorname{form}(G/G_{\omega d}\mid G\in\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i)=\theta\operatorname{form}(\bigcup_{i\in I}\theta\operatorname{form}(G/G_{\omega d}\mid G\in\mathfrak{F}_i))=$$
$$=\theta\operatorname{form}(\bigcup_{i\in I}f_i(\omega'))=(\vee_\theta(f_i\mid i\in I))(\omega')=f(\omega').$$

Таким образом, $h=f$. Лемма доказана.

Полагая в лемме 19 $\theta=l^\tau_{\omega_\infty}$ и учитывая, что $l^\tau_{\omega_\infty}$ – полная решетка формаций (см. теорема 1.5.4 [Воробьев, 2012, с. 54]), получаем следующую лемму.

Лемма 20. *Пусть f_i – минимальный ω-локальный $l^\tau_{\omega_\infty}$-значный спутник τ-замкнутой тотально ω-насыщенной формации $\mathfrak{F}_i$, где $i\in I$. Тогда $\vee^\tau_{\omega_\infty}(f_i\mid i\in I)$ – минимальный ω-локальный $l^\tau_{\omega_\infty}$-значный спутник формации $\mathfrak{F}=\vee^\tau_{\omega_\infty}(\mathfrak{F}_i\mid i\in I)$.*

Следующая лемма является обобщением леммы 12 [Skiba, Shemetkov, 2000] и соответствующего утверждения теоремы [Воробьев, 2000] (см. также теорема 3.4.1 [Воробьев, 2012, с. 122]).

Лемма 21. *Пусть θ – такая полная решетка формаций, что $\theta^\omega\subseteq\theta$, и для любой формации $\mathfrak{H}\in\theta$ формация $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$ принадлежит θ для всех $p\in\omega$. Тогда для любого набора $\{\mathfrak{F}_i\mid i\in I\}$ формаций $\mathfrak{F}_i\in\theta^\omega$ и для всякого набора $\{f_i\mid i\in I\}$ внутренних ω-локальных θ-значных спутников, где $\mathfrak{F}_i=\mathrm{LF}_\omega(f_i)$, имеет место равенство*
$$\vee_{\theta^\omega}(\mathfrak{F}_i\mid i\in I)=\mathrm{LF}_\omega(\vee_\theta(f_i\mid i\in I)).$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}=\vee_{\theta^\omega}(\mathfrak{F}_i\mid i\in I)$ и h_i – минимальный ω-локальный θ-значный спутник формации $\mathfrak{F}_i=\mathrm{LF}_\omega(F_i)$, $i\in I$. И пусть $\mathfrak{F}=\mathrm{LF}_\omega(F)$, h – минимальный ω-локальный θ-значный спутник формации $\mathfrak{F}$, и кроме того, $p\in\omega$. Тогда по лемме 19 $h=\vee_\theta(h_i\mid i\in I)$. Ввиду замечания 1 [Skiba, Shemetkov, 2000] (см. также замечание 1.2.17 [Воробьев, 2012, с. 23]) и леммы 9 имеют место соотношения $h_i(p)\subseteq f_i(p)\subseteq\mathfrak{N}_ph_i(p)=F_i(p)\in\theta$. Ввиду того, что
$$\mathfrak{N}_ph_i(p)\subseteq\mathfrak{N}_p(\vee_\theta(h_i(p)\mid i\in I))\text{ и }\mathfrak{N}_p(\vee_\theta(h_i(p)\mid i\in I))\in\theta,$$
имеем
$$\theta\operatorname{form}(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{N}_ph_i(p))\subseteq\theta\operatorname{form}(\mathfrak{N}_p(\vee_\theta(h_i(p)\mid i\in I)))=\mathfrak{N}_p(\vee_\theta(h_i(p)\mid i\in I)).$$

Следовательно,
$$h(p)=\theta\operatorname{form}(\bigcup_{i\in I}h_i(p))\subseteq\theta\operatorname{form}(\bigcup_{i\in I}f_i(p))=f(p)\subseteq\theta\operatorname{form}(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{N}_ph_i(p))\subseteq$$
$$\subseteq\mathfrak{N}_p(\vee_\theta(h_i(p)\mid i\in I))=\mathfrak{N}_ph(p)=F(p).$$

Итак, $h(p)\subseteq f(p)\subseteq F(p)$ для всех $p\in\omega$.

Кроме того, поскольку $h_i(\omega')\subseteq f_i(\omega')\subseteq F_i(\omega')=\mathfrak{F}_i\in\theta^\omega$ и $\theta^\omega\subseteq\theta$, справедливы включения
$$h(\omega')=\theta\operatorname{form}(\bigcup_{i\in I}h_i(\omega'))\subseteq\theta\operatorname{form}(\bigcup_{i\in I}f_i(\omega'))=f(\omega')\subseteq\theta\operatorname{form}(\bigcup_{i\in I}F_i(\omega'))=$$

$$=\theta\,\mathrm{form}(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i)\subseteq\theta^{\omega}\,\mathrm{form}(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i)=\mathfrak{F}=F(\omega').$$

Значит, $h(\omega')\subseteq f(\omega')\subseteq F(\omega')$. Таким образом, $h\le f\le F$, и поэтому $\mathfrak{F}=\mathrm{LF}_{\omega}(f)$. Лемма доказана.

Учитывая леммы 11 и 17, из леммы 21 получаем следующий результат.

Лемма 22. *Для любого набора* $\{\mathfrak{F}_i \mid i\in I\}$ τ*-замкнутых тотально* ω*-насыщенных формаций* $\mathfrak{F}_i$ *и для всякого набора* $\{f_i \mid i\in I\}$ *внутренних* ω*-локальных* $l^{\tau}_{\omega_\infty}$*-значных спутников* f_i, *где* $\mathfrak{F}_i=\mathrm{LF}_{\omega}(f_i)$, *имеет место равенство*

$$\vee^{\tau}_{\omega_\infty}(\mathfrak{F}_i \mid i\in I)=\mathrm{LF}_{\omega}(\vee^{\tau}_{\omega_\infty}(f_i \mid i\in I)).$$

Лемма 23. *Пусть* $\mathfrak{M}_i$ – τ*-замкнутая тотально* ω*-насыщенная формация,* $i\in I$, $\mathfrak{L}=\vee_{\omega_\infty}(\mathfrak{M}_i \mid i\in I)$, $\mathfrak{H}=\vee^{\tau}_{\omega_\infty}(\mathfrak{M}_i \mid i\in I)$, A *– такая группа, что любая ее минимальная нормальная подгруппа является либо неабелевой группой, либо абелевой* ω'*-группой. Тогда если* $A\in\mathfrak{H}$, *то* $A\in\mathfrak{L}$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда группа A является монолитической. Пусть $P=\mathrm{Soc}(A)$. Тогда $A\in\vee^{\tau}_{\omega_\infty}(\mathfrak{M}_i \mid i\in I)=l^{\tau}_{\omega_\infty}\,\mathrm{form}(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{M}_i)$. Пусть $\pi=\pi(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{M}_i)\cap\omega$. В силу леммы 7 имеем $\mathfrak{S}_{\pi}\tau\,\mathrm{form}(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{M}_i)\in l^{\tau}_{\omega_\infty}$. Следовательно,

$$\mathfrak{H}=\vee^{\tau}_{\omega_\infty}(\mathfrak{M}_i \mid i\in I)=l^{\tau}_{\omega_\infty}\,\mathrm{form}(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{M}_i)\subseteq\mathfrak{S}_{\pi}\tau\,\mathrm{form}(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{M}_i).$$

Поэтому $A\in\mathfrak{S}_{\pi}\tau\,\mathrm{form}(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{M}_i)$. Поскольку по условию P является неабелевой группой или абелевой ω'-группой, то $A\in\tau\,\mathrm{form}(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{M}_i)$. По лемме 10 в силу τ-замкнутости формации $\mathfrak{M}_i$, $i\in I$, имеем $\tau\,\mathrm{form}(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{M}_i)=\mathrm{form}(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{M}_i)$. Значит,

$$A\in\mathrm{form}(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{M}_i)\subseteq l_{\omega_\infty}\,\mathrm{form}(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{M}_i)=\mathfrak{L}.$$

Пусть теперь группа A не является монолитической, и $\mathrm{Soc}(A)=N_1\times\ldots\times N_k$ $(k\ge 2)$, где N_i – минимальная нормальная подгруппа группы A. Обозначим через M_i наибольшую нормальную подгруппу группы A, содержащую $N_1\times\ldots\times N_{i-1}\times N_{i+1}\times\ldots\times N_k$ и не содержащую N_i. Ввиду леммы 4 $B_i=A/M_i$ – монолитическая группа с минимальной нормальной подгруппой N_iM_i/M_i, A-изоморфной N_i. Поскольку $B_i\in\mathfrak{H}$, то по доказанному $B_i\in\mathfrak{L}$. Но тогда, ввиду леммы 4, и группа $A\in\mathfrak{L}$ как подпрямое произведение групп, изоморфных $B_1,\ldots,B_k$. Лемма доказана.

Лемма 24. *Пусть* $\mathfrak{M}_i$ – τ*-замкнутая тотально* ω*-насыщенная формация,* $i\in I$ *и* π *– такое непустое множество простых чисел, что* $\pi\subseteq\omega$. *Тогда*

$$\vee^{\tau}_{\omega_\infty}(\mathfrak{N}_{\pi}\mathfrak{M}_i \mid i\in I)=\mathfrak{N}_{\pi}(\vee^{\tau}_{\omega_\infty}(\mathfrak{M}_i \mid i\in I)).$$

Доказательство. Положим $\mathfrak{X}_1=\vee^{\tau}_{\omega_\infty}(\mathfrak{N}_{\pi}\mathfrak{M}_i \mid i\in I)$, $\mathfrak{X}_2=\mathfrak{N}_{\pi}(\vee^{\tau}_{\omega_\infty}(\mathfrak{M}_i \mid i\in I))$. Поскольку $\mathfrak{M}_i\in\vee^{\tau}_{\omega_\infty}(\mathfrak{M}_i \mid i\in I)$ для любого $i\in I$, то

$$\bigcup_{i\in I}\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{M}_i \subseteq \mathfrak{N}_\pi(\vee^\tau_{\omega_\infty}(\mathfrak{M}_i \mid i\in I)) = \mathfrak{X}_2 .$$

Ввиду леммы 11 $\mathfrak{X}_2 \in l^\tau_{\omega_\infty}$. Значит,

$$\mathfrak{X}_1 = \vee^\tau_{\omega_\infty}(\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{M}_i \mid i\in I) \subseteq \mathfrak{N}_\pi(\vee^\tau_{\omega_\infty}(\mathfrak{M}_i \mid i\in I)) = \mathfrak{X}_2 .$$

Допустим, что $\mathfrak{X}_2 \setminus \mathfrak{X}_1 \neq \varnothing$, и пусть A – группа минимального порядка из $\mathfrak{X}_2 \setminus \mathfrak{X}_1$. Тогда A – монолитическая группа и $P = \mathrm{Soc}(A) = A^{\mathfrak{X}_1}$.

Если P – неабелева группа или абелева π'-группа, то $A \in \vee^\tau_{\omega_\infty}(\mathfrak{M}_i \mid i\in I) \subseteq \mathfrak{X}_1$. Противоречие. Значит, P – абелева p-группа для некоторого простого числа $p\in\pi$. Так как $\mathfrak{X}_1$ – ω-насыщенная формация и $p\in\omega$, то $P \not\subseteq \Phi(A)$. Поэтому $P = C_A(P) = F_p(A) = F(A) = O_p(A)$. Согласно лемме 18, формация $\mathfrak{N}_\pi$ имеет такой внутренний ω-локальный спутник n, что $n(q) = (1)$ для любого $q\in\pi$. Тогда, по лемме 2, формации $\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{M}_i$ и $\mathfrak{X}_2$ имеют такие ω-локальные спутники m_i и x_2, что $m_i(q) = \mathfrak{M}_i$ и $x_2(q) = \vee^\tau_{\omega_\infty}(\mathfrak{M}_i \mid i\in I)$ для любого $q\in\pi$, $i\in I$. Тогда, ввиду леммы 22, формация $\mathfrak{X}_1$ имеет такой внутренний ω-локальный спутник x_1, что $x_1(q) = \vee^\tau_{\omega_\infty}(\mathfrak{M}_i \mid i\in I)$ для любого $q\in\pi$. Следовательно, $x_1(q) = x_2(q)$ для всякого $q\in\pi$. В частности, поскольку $p\in\pi$, то $x_1(p) = x_2(p)$. Так как $A\in\mathfrak{X}_2$, то $A/O_p(A) = A/F_p(A) \in x_2(p) = x_1(p)$. Тогда, ввиду леммы 3, $A\in\mathfrak{X}_1$. Получили противоречие. Лемма доказана.

Пусть $\mathfrak{L} \in l_{\omega_\infty}$, $\mathfrak{H} \in l^\tau_{\omega_\infty}$ и $\mathfrak{M}_i \in l^\tau_{\omega_\infty}$ для любого $i\in I$. Тогда для любой подходящей для $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{H}$ ω-последовательности простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$ через L, H, Lp_1, Hp_1, …, $Lp_1\ldots p_n$, $Hp_1\ldots p_n$ обозначим такие l_{ω_∞}-значные и $l^\tau_{\omega_\infty}$-значные ω-локальные спутники, что

$$L(a) = \vee_{\omega_\infty}(M_i(a) \mid i\in I),\ \ H(a) = \vee^\tau_{\omega_\infty}(M_i(a) \mid i\in I),$$

$$Lp_1(a) = \vee_{\omega_\infty}(M_ip_1(a) \mid i\in I),\ \ Hp_1(a) = \vee^\tau_{\omega_\infty}(M_ip_1(a) \mid i\in I),$$

$$\ldots,$$

$$Lp_1\ldots p_n(a) = \vee_{\omega_\infty}(M_ip_1\ldots p_n(a) \mid i\in I),\ \ Hp_1\ldots p_n(a) = \vee^\tau_{\omega_\infty}(M_ip_1\ldots p_n(a) \mid i\in I),$$

для всякого $a\in\omega\cup\{\omega'\}$.

Лемма 25. *Пусть* $\mathfrak{M}_i$ – τ*-замкнутая тотально* ω*-насыщенная формация,* $i\in I$. *Тогда если* $\mathfrak{L} = \vee_{\omega_\infty}(\mathfrak{M}_i \mid i\in I)$, $\mathfrak{H} = \vee^\tau_{\omega_\infty}(\mathfrak{M}_i \mid i\in I)$, *то*

1) $\pi(\mathfrak{L})\cap\omega = \pi(\mathfrak{H})\cap\omega$;

2) для любой подходящей для $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{M}$ ω-последовательности простых чисел $p_1, \ldots, p_n$ спутники L, H, Lp_1, Hp_1, …, $Lp_1\ldots p_n$, $Hp_1\ldots p_n$ являются каноническими ω-локальными спутниками формаций $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{H}$, $L(p_1)$, $H(p_1)$, …, $Lp_1\ldots p_{n-1}(p_n)$, $Hp_1\ldots p_{n-1}(p_n)$ соответственно.

Доказательство. 1. Поскольку включение $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{H}$ очевидно, то $\pi(\mathfrak{L})\cap\omega \subseteq \pi(\mathfrak{H})\cap\omega$. Пусть $p\in(\pi(\mathfrak{H})\cap\omega)\setminus\pi(\mathfrak{L})$. По лемме 20 имеем

$$\mathfrak{L}_{\omega_\infty}(p) = \vee_{\omega_\infty}(\mathfrak{M}_{i\omega_\infty}(p) \mid i \in I), \ \mathfrak{H}^\tau_{\omega_\infty}(p) = \vee^\tau_{\omega_\infty}(\mathfrak{M}^\tau_{i\omega_\infty}(p) \mid i \in I).$$

Поскольку $p \in \pi(\mathfrak{H}) \cap \omega$, то $\mathfrak{H}^\tau_{\omega_\infty}(p) \neq \varnothing$. Поэтому найдется такое $j \in I$, что $\mathfrak{M}^\tau_{j\omega_\infty}(p) \neq \varnothing$. Но тогда, ввиду леммы 18, имеем $p \in \pi(\mathfrak{M}_j)$. Следовательно, $p \in \pi(\mathfrak{L}) \cap \omega$. Получили противоречие. Значит, $\pi(\mathfrak{H}) \cap \omega \subseteq \pi(\mathfrak{L}) \cap \omega$. Таким образом, $\pi(\mathfrak{L}) \cap \omega = \pi(\mathfrak{H}) \cap \omega$.

2. Поскольку M_i – канонический ω-локальный спутник формации $\mathfrak{M}_i$, $i \in I$, то из леммы 22 следует, что спутники $L = \vee_{\omega_\infty}(M_i \mid i \in I)$ и $H = \vee^\tau_{\omega_\infty}(M_i \mid i \in I)$ являются внутренними ω-локальными спутниками формаций $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{H}$ соответственно. Ввиду леммы 16 для любого $i \in I$ спутник M_i является $l^\tau_{\omega_\infty}$-значным. Применяя лемму 24, получаем, что для любого $p \in \omega$

$$L(p) = \vee_{\omega_\infty}(M_i(p) \mid i \in I) = \vee_{\omega_\infty}(\mathfrak{N}_p M_i(p) \mid i \in I) =$$
$$= \mathfrak{N}_p(\vee_{\omega_\infty}(M_i(p) \mid i \in I)) = \mathfrak{N}_p L(p),$$
$$H(p) = \vee^\tau_{\omega_\infty}(M_i(p) \mid i \in I) = \vee^\tau_{\omega_\infty}(\mathfrak{N}_p M_i(p) \mid i \in I) =$$
$$= \mathfrak{N}_p(\vee^\tau_{\omega_\infty}(M_i(p) \mid i \in I)) = \mathfrak{N}_p H(p),$$

а также

$$L(\omega') = \vee_{\omega_\infty}(M_i(\omega') \mid i \in I) = \vee_{\omega_\infty}(\mathfrak{M}_i \mid i \in I) = \mathfrak{L},$$
$$H(\omega') = \vee^\tau_{\omega_\infty}(M_i(\omega') \mid i \in I) = \vee^\tau_{\omega_\infty}(\mathfrak{M}_i \mid i \in I) = \mathfrak{H}.$$

Таким образом, L и H – канонические ω-локальные спутники соответственно формаций $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{H}$.

Пусть теперь $p_1, \ldots, p_n$ – некоторая подходящая для $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{H}$ ω-последовательность простых чисел. По доказанному $L(p_1) = \vee_{\omega_\infty}(M_i(p_1) \mid i \in I)$, $H(p_1) = \vee^\tau_{\omega_\infty}(M_i(p_1) \mid i \in I)$, причем формации $M_i(p_1) \in l^\tau_{\omega_\infty}$ для любого $i \in I$. Так как по определению $M_i p_1$ – канонический ω-локальный спутник формации $M_i(p_1)$, $i \in I$, то из леммы 22 следует, что спутники $Lp_1 = \vee_{\omega_\infty}(M_i p_1 \mid i \in I)$ и $Hp_1 = \vee^\tau_{\omega_\infty}(M_i p_1 \mid i \in I)$ являются внутренними ω-локальными спутниками формаций $L(p_1)$ и $H(p_1)$ соответственно. Ввиду леммы 16 для любого $i \in I$ спутник $M_i p_1$ является $l^\tau_{\omega_\infty}$-значным. Вновь применяя лемму 24, получаем, что для любого $q \in \omega$

$$Lp_1(q) = \vee_{\omega_\infty}(M_i p_1(q) \mid i \in I) = \vee_{\omega_\infty}(\mathfrak{N}_q M_i p_1(q) \mid i \in I) =$$
$$= \mathfrak{N}_q(\vee_{\omega_\infty}(M_i p_1(q) \mid i \in I)) = \mathfrak{N}_q L p_1(q),$$
$$Hp_1(q) = \vee^\tau_{\omega_\infty}(M_i p_1(q) \mid i \in I) = \vee^\tau_{\omega_\infty}(\mathfrak{N}_q M_i p_1(q) \mid i \in I) =$$
$$= \mathfrak{N}_p(\vee^\tau_{\omega_\infty}(M_i p_1(q) \mid i \in I)) = \mathfrak{N}_q H p_1(q),$$

а также

$$Lp_1(\omega') = \vee_{\omega_\infty}(M_i p_1(\omega') \mid i \in I) = \vee_{\omega_\infty}(M_i(p_1) \mid i \in I) = L(p_1),$$
$$Hp_1(\omega') = \vee^\tau_{\omega_\infty}(M_i p_1(\omega') \mid i \in I) = \vee^\tau_{\omega_\infty}(M_i(p_1) \mid i \in I) = H(p_1).$$

Таким образом, Lp_1 и Hp_1 – канонические ω-локальные спутники соответственно формаций $L(p_1)$ и $H(p_1)$.

Далее, предположим, что имеют место тождества

$$Lp_1 \dots p_{k-1}(p_k) = \vee_{\omega_\infty}(M_i p_1 \dots p_{k-1}(p_k) \mid i \in I),$$

$$Hp_1 \dots p_{k-1}(p_k) = \vee^{\tau}_{\omega_\infty}(M_i p_1 \dots p_{k-1}(p_k) \mid i \in I),$$

и, кроме того, формации $M_i p_1 \dots p_{k-1}(p_k) \in l^{\tau}_{\omega_\infty}$ для любого $i \in I$, $2 \le k \le n$. Поскольку по определению $M_i p_1 \dots p_k$ – канонический ω-локальный спутник формации $M_i p_1 \dots p_{k-1}(p_k)$, $i \in I$, то, применяя лемму 22, убеждаемся, что

$$Lp_1 \dots p_k = \vee_{\omega_\infty}(M_i p_1 \dots p_k \mid i \in I),$$

$$Hp_1 \dots p_k = \vee^{\tau}_{\omega_\infty}(M_i p_1 \dots p_k \mid i \in I)$$

являются внутренними ω-локальными спутниками формаций $Lp_1 \dots p_{k-1}(p_k)$ и $Hp_1 \dots p_{k-1}(p_k)$ соответственно. Поэтому, в силу лемм 16 и 24, заключаем, что эти спутники канонические. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Пусть $\mathfrak{M}_i$ – $l^{\tau}_{\omega_\infty}$-формация, $i \in I$,

$$\mathfrak{L} = \vee_{\omega_\infty}(\mathfrak{M}_i \mid i \in I) = l_{\omega_\infty}\operatorname{form}(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{M}_i), \ \mathfrak{H} = \vee^{\tau}_{\omega_\infty}(\mathfrak{M}_i \mid i \in I) = l^{\tau}_{\omega_\infty}\operatorname{form}(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{M}_i).$$

Включение $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{H}$ очевидно. Предположим, что $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{L} \ne \varnothing$, и пусть A – группа минимального порядка в $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{L}$. Тогда A – монолитическая группа, и $P = \operatorname{Soc}(A) = A^{\mathfrak{L}}$. Предположим, что $P = \operatorname{Soc}(A)$ – неабелева группа или абелева ω'-группа. Тогда, поскольку $A \in \mathfrak{H}$, то в силу леммы 23 имеем $A \in \mathfrak{L}$. Противоречие.

Поэтому P – абелева p-группа для некоторого простого числа $p \in \omega$. Так как $\mathfrak{L}$ – ω-насыщенная формация, то $P \not\subseteq \Phi(A)$. Следовательно,

$$P = C_A(P) = F_p(A) = F(A) = O_p(A) \text{ и } A = [P]A_1,$$

где A_1 – некоторая максимальная подгруппа из A.

Согласно лемме 25, $\pi(\mathfrak{L}) \cap \omega = \pi(\mathfrak{H}) \cap \omega$ и, кроме того, формации $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{H}$ имеют такие канонические ω-локальные спутники соответственно L и H, что

$$L(p) = \vee_{\omega_\infty}(M_i(p) \mid i \in I), \ H(p) = \vee^{\tau}_{\omega_\infty}(M_i(p) \mid i \in I).$$

Поэтому A не является p-группой и $L(p) \ne \varnothing$. Отметим, что ввиду условия $\mathfrak{M}_i \in l^{\tau}_{\omega_\infty}$ и леммы 16 $M_i(p) \in l^{\tau}_{\omega_\infty}$ для любого $i \in I$.

Поскольку $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{H}$, то $L(p) \subseteq H(p)$. Так как $A \notin \mathfrak{L}$, то $L(p) \subset H(p)$. Действительно, если $L(p) = H(p)$, то $A/O_p(A) = A/F_p(A) \in H(p) = L(p)$ и по лемме 3 имеем $A \in \mathfrak{L}$, что невозможно. Таким образом, $A_1 \cong A/F_p(A) \in H(p) \setminus L(p)$.

По лемме 25 $\pi(L(p)) \cap \omega = \pi(H(p)) \cap \omega$ и формации $L(p)$ и $H(p)$ имеют такие канонические ω-локальные спутники соответственно Lp и Hp, что

$$Lp(a) = \vee_{\omega_\infty}(M_i p(a) \mid i \in I), \ Hp(a) = \vee^{\tau}_{\omega_\infty}(M_i p(a) \mid i \in I)$$

для любого $a \in (\pi(L(p)) \cap \omega) \cup \{\omega'\}$.

Отметим, что из условия $M_i(p) \in l^{\tau}_{\omega_\infty}$ и леммы 16 следует, что спутник $M_i p$ является $l^{\tau}_{\omega_\infty}$-значным для любого $i \in I$.

Поскольку $A_1 \notin L(p) \neq \varnothing$, то $L(p)$-корадикал L группы A_1 отличен от единичной подгруппы, и в силу леммы 8 выполняется по крайней мере одно из следующих условий:

а) $L \not\subset (A_1)_{\omega d}$; б) найдется такое простое число $p_1 \in \pi(L) \cap \omega$, что $A_1/F_{p_1}(A_1) \notin Lp(p_1)$.

Пусть имеет место а). Обозначим через S – S_{ω}-радикал группы A_1, и пусть $B = A_1/S$. Тогда любая минимальная нормальная подгруппа группы B является неабелевой группой или абелевой ω'-группой. Поскольку $B \in H(p) = \vee^{\tau}_{\omega_\infty}(M_i(p) \mid i \in I)$, то ввиду леммы 23 $B \in \vee_{\omega_\infty}(M_i(p) \mid i \in I) = L(p)$. Поэтому $A_1/S \in L(p)$. Следовательно, $L(p)$-корадикал L группы A_1 является ω-группой. Полученное противоречие показывает, что случай а) невозможен.

Пусть имеет место условие б). Поскольку $p_1 \in \pi(L) \cap \omega \subseteq \pi(H(p)) \cap \omega$, то $p_1 \in \pi(L(p)) \cap \omega$ и $Lp(p_1) \neq \varnothing$.

Допустим, что $F_{p_1}(A_1) = 1$. Тогда любая минимальная нормальная подгруппа из A_1 является неабелевой $p_1 d$-группой. Из условия $A_1 \in H(p) = \vee^{\tau}_{\omega_\infty}(M_i(p) \mid i \in I)$ и леммы 23 следует, что $A_1 \in \vee_{\omega_\infty}(M_i(p) \mid i \in I) = L(p)$. Противоречие. Значит, $F_{p_1}(A_1) \neq 1$.

Заметим также, что $F_{p_1}(A_1) \neq A_1$, поскольку в противном случае $A_1/F_{p_1}(A_1) \cong 1 \in Lp(p_1) \neq \varnothing$, что противоречит выбору p_1. Таким образом,

$$A_1/F_{p_1}(A_1) \in Hp(p_1) \setminus Lp(p_1),$$
$$Lp(p_1) \neq \varnothing, \ 1 \neq F_{p_1}(A_1) \subset A_1.$$

Пусть $A_2 = A_1/F_{p_1}(A_1)$. В силу леммы 25 справедливо равенство $\pi(Lp(p_1)) \cap \omega = \pi(Hp(p_1)) \cap \omega$ и, кроме того, формации $Lp(p_1)$ и $Hp(p_1)$ имеют такие канонические ω-локальные спутники Lpp_1 и Hpp_2 соответственно, что

$$Lpp_1(r) = \vee_{\omega_\infty}(M_i pp_1(r) \mid i \in I), \ Hpp_1(r) = \vee^{\tau}_{\omega_\infty}(M_i pp_1(r) \mid i \in I)$$

для любого $r \in (\pi(Lp(p_1)) \cap \omega) \cup \{\omega'\}$. При этом из условия $M_i p(p_1) \in l^{\tau}_{\omega_\infty}$, в силу леммы 16, следует, что спутник $M_i pp_1$ является $l^{\tau}_{\omega_\infty}$-значным для любого $i \in I$.

Поскольку $A_2 \notin Lp(p_1) \neq \varnothing$, то $Lp(p_1)$-корадикал K группы A_2 отличен от единичной подгруппы и в силу леммы 8 выполняется по крайней мере одно из следующих условий: а) $K \not\subset (A_2)_{\omega d}$; б) найдется такое простое число $p_2 \in \pi(K) \cap \omega$, что $A_2/F_{p_2}(A_2) \notin Lpp_1(p_2)$.

Пусть имеет место а) и R – S_{ω}-радикал группы A_2. Обозначим через C группу A_2/R. Тогда любая минимальная нормальная подгруппа группы C является неабелевой группой или абелевой ω'-группой. Применяя теперь лемму 23 и рассуждая для группы C так же, как и для группы B, получим, что $Lp(p_1)$-корадикал K группы A_2 является ω-группой. Последнее противоречит условию а).

Пусть имеет место условие б). Поскольку $p_2 \in \pi(K) \cap \omega \subseteq \pi(Hp(p_1)) \cap \omega$, то $p_2 \in \pi(Lp(p_1)) \cap \omega$ и $Lpp_1(p_2) \neq \varnothing$. Снова используя лемму 23 и проведя для группы A_2 такие же рассуждения, как для группы A_1, получим, что

$$A_2/F_{p_2}(A_2) \in Hpp_1(p_2) \setminus Lpp_1(p_2),$$
$$Lpp_1(p_2) \neq \varnothing,\ 1 \neq F_{p_2}(A_2) \subset A_2.$$

Пусть $A_3 = A_2/F_{p_2}(A_2)$. Тогда, по тем же соображениям, группа A_3 будет удовлетворять аналогичным условиям. Поэтому, продолжая этот процесс, мы получим группы

$$A_4 = A_3/F_{p_3}(A_3),\ \ldots, A_n = A_{n-1}/F_{p_{n-1}}(A_{n-1}),\ \ldots .$$

При этом для любого натурального $j \geq 2$ выполняются условия (полагаем $p_0 = p$):

$$A_j = A_{j-1}/F_{p_{j-1}}(A_{j-1}) \in Hpp_1 \ldots p_{j-2}(p_{j-1}) \setminus Lpp_1 \ldots p_{j-2}(p_{j-1}),$$
$$Lpp_1 \ldots p_{j-2}(p_{j-1}) \neq \varnothing,\ 1 \neq F_{p_{j-1}}(A_{j-1}) \subset A_{j-1}.$$

В силу условия $F_{p_{j-1}}(A_{j-1}) \neq 1$ для построенной последовательности групп A, A_1, A_2, A_3, …, A_n, … имеем $|A_{j-1}| > |A_j|$. Но поскольку группа A конечна, то на некотором шаге m мы получим, что $A_m = 1$. Так как при этом $A_m = A_{m-1}/F_{p_{m-1}}(A_{m-1})$, то $F_{p_{m-1}}(A_{m-1}) = A_{m-1}$. Противоречие.

Таким образом, наше предположение неверно и $\mathrm{H} \subseteq \mathrm{L}$. Следовательно, $\mathrm{H} = \mathrm{L}$. Теорема доказана.

Если $\omega = \mathrm{P}$ – множество всех простых чисел, из теоремы вытекает

Следствие 1 [Сафонов, Шеметков, 2008]. *Решетка l_∞^τ всех τ-замкнутых тотально насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки l_∞ всех тотально насыщенных формаций.*

Если $\omega = \{p\}$, то из теоремы следует

Следствие 2. *Решетка $l_{p_\infty}^\tau$ всех τ-замкнутых тотально p-насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки l_∞^p всех тотально p-насыщенных формаций.*

Если τ – единичный подгрупповой функтор, то из теоремы получаем

Следствие 3. *Решетка всех наследственных тотально ω-насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки всех l_∞^ω тотально ω-насыщенных формаций.*

В случае, когда $\tau(G) = S_n\{G\}$ для любой группы G, из теоремы получаем

Следствие 4. *Решетка всех нормально наследственных тотально ω-насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки всех l_∞^ω тотально ω-насыщенных формаций.*

Заключение

В работе изучены некоторые свойства решетки функторно замкнутых частично тотально насыщенных формаций конечных групп. Для данной решетки установлено свойство, аналогичное свойству индуктивности полной решетки насыщенных формаций. Даны выражения минимального и канонического ω-локальных спутников точной верхней грани любого подмножества функторно замкнутых частично тотально насыщенных формаций через минимальные и, соответственно, канонические ω-локальные спутники данного подмножества формаций. Доказано, что для любого подгруппового функтора τ решетка всех τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки всех тотально ω-насыщенных формаций. В частности, установлена вложимость решетки всех τ-замкнутых тотально насыщенных формаций в решетку всех тотально насыщенных формаций, а также вложимость решетки всех τ-замкнутых тотально p-насыщенных формаций в решетку всех тотально p-насыщенных формаций.

Полученные результаты могут быть использованы для исследования и классификации частично тотально насыщенных формаций конечных групп.

Исследование выполнено при поддержке Министерства образования Республики Беларусь (ГПНИ «Конвергенция» 1.1.03.02).

Список литературы
References

1. Биркгоф Г. 1984. Теория решеток. Пер. с англ. М., Наука, 568. (Birkhoff G. 1973. Lattice Theory. Providence, RI, American Mathematical Society, 418.).

Birkhoff G. 1984. Teoriya reshetok [Lattice Theory]. Moscow, Nauka, 568. (Birkhoff G. 1973. Lattice Theory. Providence, RI, American Mathematical Society, 418.).

2. Воробьев Н.Н. 2000. Об индуктивных решетках формаций и классов Фиттинга. Доклады НАН Беларуси, 44 (3): 21–24.

Vorob'ev N.N. 2000. Ob induktivnykh reshetkakh formatsiy i klassov Fittinga [On inductive lattices of formations and Fitting classes]. Doklady NAN Belarusi, 44 (3): 21–24. (in Russian)

3. Воробьев Н.Н. 2012. Алгебра классов конечных групп. Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова, 322.

Vorob'ev N.N. 2012. Algebra klassov konechnykh grupp [Algebra of Classes of Finite Groups]. Vitebsk, Vitebsk State University named after P.M. Masherov, 322. (in Russian)

4. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. 2009. Основы теории групп. 5-е изд. СПб., Лань, 288.

Kargapolov M.I., Merzliakov Yu.I. 2009. Osnovy teorii grupp. 5-e izd. [Fundamentals of the Theory of Groups. 5 Ed.]. Saint Petersburg, Lan', 288. (in Russian)

5. Сафонов В.Г. 2004. О тотально ω-насыщенных формациях конечных групп. Препринт, № 7. Гомель, Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, 18.

Safonov V.G. 2004. O total'no ω-nasyshchennykh formatsiyakh konechnykh grupp. Preprint, № 7 [On totally ω-saturated formations of finite groups. Preprint, No. 7]. Gomel, Gomel University Press, 18. (in Russian)

6. Сафонов В.Г., Сафонова И.Н. 2014. О минимальных тотально ω-насыщенных ненильпотентных формациях конечных групп. Вестник Витебского государственного университета, 84 (6): 9–15.

Safonov V.G., Safonova I.N. 2014. O minimal'nykh total'no ω-nasyshchennykh nenil'potentnykh formatsiyakh konechnykh grupp [On minimal totally ω-saturated non-nilpotent formations of finite groups]. Vestnik Vitebskogo gosudarstvennogo universiteta, 84 (6): 9–15. (in Russian)

7. Сафонов В.Г., Шеметков Л.А. 2008. О подрешетках решетки тотально насыщенных формаций конечных групп. Доклады НАН Беларуси, 52 (4): 34–37.

Safonov V.G., Shemetkov L.A. 2008. O podreshetkakh reshetki total'no nasyshchennykh formatsiy konechnykh grupp [Sublattices of the lattice of totally saturated formations of finite groups]. Doklady NAN Belarusi, 52 (4): 34–37. (in Russian)

8. Скиба А.Н. 1986. О локальных формациях длины 5. В кн.: Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп. Минск, Наука и техника: 149–156.

Skiba A.N. 1986. O lokal'nykh formatsiyakh dliny 5. V kn.: Arifmeticheskoe i podgruppovoe stroenie konechnykh grupp [On local formations of length 5. In: Arithmetic and subgroup structure of finite groups]. Minsk, Nauka i tekhnika: 149–156. (in Russian)

9. Скиба А.Н. 1987. Характеризация конечных разрешимых групп заданной нильпотентной длины. Вопросы алгебры, 3: 21–31.

Skiba A.N. 1987. Kharakterizatsiya konechnykh razreshimykh grupp zadannoy nil'potentnoy dliny [Characterization of finite soluble groups with given nilpotent length]. Voprosy algebry, 3: 21–31. (in Russian)

10. Скиба А.Н. 1997. Алгебра формаций. Минск, Беларуская навука, 240.

Skiba A.N. 1997. Algebra formatsiy [Algebra of Formations]. Minsk, Belaruskaya navuka, 240. (in Russian)

11. Шеметков Л.А. 1978. Формации конечных групп. М., Наука, 267.

Shemetkov L.A. 1978. Formatsii konechnykh grupp [Formations of Finite Groups]. Moscow, Nauka, 267. (in Russian)

12. Шеметков Л.А. 1984. О произведении формаций. Доклады АН БССР 28 (2): 101–103.

Shemetkov L.A. 1984. O proizvedenii formatsiy [On product of formations]. Doklady AN BSSR, 28 (2): 101–103. (in Russian)

13. Шеметков Л.А, Скиба А.Н. 1989. Формации алгебраических систем. М., Наука, 253.

Shemetkov L. A, Skiba A.N. 1989. Formatsii algebraicheskikh sistem [Formations of Algebraic Systems]. Moscow, Nauka, 253. (in Russian)

14. Ballester-Bolinches A., Ezquerro L.M. 2006. Classes of Finite Groups. Dordrecht, Springer, 2006, 385.

15. Doerk K., Hawkes T. 1992. Finite Soluble Groups. Berlin, New York, Walter de Gruyter, 889.

16. Guo, W. 2000. The Theory of Classes of Groups. Beijing, New York, Dordrecht, Boston, London, Science Press, Kluwer Academic Publishers, 2000, 261.

17. Neumann B.H., Neumann Hanna, Neumann P.M. 1962. Wreath products and varieties of groups. Mathematische Zeitschrift, 80: 44–62.

18. Neumann P.M. 1964. On the structure of standard wreath products. Mathematische Zeitschrift, 84: 343–373.

19. Safonov V.G. 2006. On the modularity of a lattice of τ-closed totally saturated formations of finite groups. Ukrainian Mathematical Journal, 58 (6): 967-973.

20. Safonov V.G. 2006. The property of being algebraic for the lattice of all τ-closed totally saturated formations. Algebra and Logic, 45 (5): 353–356.

21. Safonov V.G. 2007. Characterization of the soluble one-generated totally saturated formations of finite groups. Siberian Mathematical Journal, 48 (1): 150–155.

22. Safonov V.G. 2010. G-separability of the lattice of τ-closed totally saturated formations. Algebra and Logic, 49 (5): 470–479.

23. Skiba A.N., Shemetkov L.A. 2000. Multiply ω-local formations and Fitting classes of finite groups. Siberian Advances in Mathematics, 10 (2): 112–141.