УДК 517.925
DOI 10.18413/2075-4639-2018-50-4-398-404

ГРУБОСТЬ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ НА ПЛОСКОСТИ, ИНВАРИАНТНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУППЫ ВРАЩЕНИЙ

STRUCTURAL STABILITY OF PLANAR VECTOR FIELDS THAT ARE INVARIANT UNDER THE ROTATION GROUP

В.Ш. Ройтенберг
V.Sh. Roitenberg

Ярославский государственный технический университет
Россия, 150023, г. Ярославль, Московский пр. 88

Yaroslavl State Technical University, Russia, 88 Moskovskij pr.,Yaroslavl, 150023, Russia
E-mail: vroitenberg@mail.ru

Аннотация
Рассматриваются векторные поля в единичном круге, инвариантные относительно группы вращений. Дана топологическая классификация грубых векторных полей, структура фазовых портретов которых не меняется при малых возмущениях в указанном классе векторных полей. Кроме того, описаны все связные компоненты множества грубых векторных полей.

Abstract
We consider vector fields in the unit disk that are invariant under the rotation group. The paper gives the topological classification of structurally stable vector fields, the structure of phase portraits of which does not change under small perturbations in the indicated class of vector fields. We also describe all connected components of the set of structurally stable vector fields.

Ключевые слова: векторное поле на плоскости, группа вращений, инвариантность, симметрия, грубость, топологическая классификация, связные компоненты.
Keywords: planar vector field, rotation group, invariance, symmetry, structural stability, topological classification, connected components.

Введение

Изучению дифференциальных уравнений, инвариантных относительно групп преобразований, посвящено большое число работ (см., например, [1–3]). Хотя изучение грубости и бифуркаций динамических систем с симметрией, задаваемых векторными полями, инвариантными относительно группы преобразований, представляет как теоретический, так и практический интерес, эти вопросы мало исследованы. Отметим работы [4–8], в которых изучались бифуркации, связанные с потерей симметрии. В книге В.И. Арнольда [9, с. 267–282] рассматривались локальные бифуркации векторных полей на плоскости, инвариантных относительно группы поворотов на углы кратные $2\pi/q$, $q = 2,3,\ldots$. В статье [10] показано, что однородные векторные поля на плоскости, грубые относительно пространства таких полей, типичны.

В настоящей работе рассматриваются C^∞-векторные поля в единичном круге, инвариантные относительно группы вращений $SO(2)$. Описано множество Σ_0^r векторных полей, грубых относительно банахова пространства $\mathrm{X}^r(D, SO(2))$ всех таких полей с C^r-нормой, $r \ge 1$. Оно образует в этом пространстве открытое всюду плотное множество. Кроме того, дано описание классов топологической эквивалентности и связных компонент множества Σ_0^r.

1. Векторные поля, инвариантные относительно группы $SO(2)$

Будем обозначать $\mathrm{X}^r(D)$ банахово пространство векторных полей класса C^∞ с C^r-нормой [11], заданных в единичном круге $D := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$. Группа вращений $SO(2)$ действует на $\mathrm{X}^r(D)$ следующим образом. Линейный оператор $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in SO(2)$ переводит векторное поле $X \in \mathrm{X}^r(D)$ в векторное поле $R_\theta^{-1} X R_\theta \in \mathrm{X}^r(D)$. Обозначим $\mathrm{X}^r(D, SO(2))$ подмножество в $\mathrm{X}^r(D)$, состоящее из векторных полей, инвариантных относительно действия $SO(2)$, то есть таких, что $\forall\theta$ $R_\theta^{-1} X R_\theta = X$. Очевидно, что $\mathrm{X}^r(D, SO(2))$ образует линейное подпространство в $\mathrm{X}^r(D)$.

Теорема 1. *Векторное поле* $X \in \mathrm{X}^r(D)$ *принадлежит* $\mathrm{X}^r(D, SO(2))$ *тогда и только тогда, когда оно имеет в полярных координатах* ρ, φ *(*$x_1 = \rho\cos\varphi,\ x_2 = \rho\sin\varphi$*) вид*

$$\mathrm{P}(\rho)\partial/\partial\rho + \Phi(\rho)\partial/\partial\varphi, \tag{1}$$

где $\mathrm{P}(\cdot)$ *и* $\Phi(\cdot)$ *– соответственно нечетная и четная* C^∞*-функции на* $[-1,1]$.

Доказательство. Пусть $X \in \mathrm{X}^r(D, SO(2))$,

$$X(x_1, x_2) = X_1(x_1, x_2)\partial/\partial x_1 + X_2(x_1, x_2)\partial/\partial x_2. \tag{2}$$

Так как $\forall\theta$ $R_\theta^{-1} X(0) = X(0)$, то $X(0) = 0$. Для матрицы $A = (\partial X_i(0,0)/\partial x_j)$ при любом θ имеем $R_\theta^{-1} A R_\theta = A$ и $A R_\theta = R_\theta A$. Поэтому $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$. В полярных координатах $X = \mathrm{P}_*(\rho,\varphi)\partial/\partial\rho + \Phi_*(\rho,\varphi)\partial/\partial\varphi$, где

$$\mathrm{P}_*(\rho,\varphi) = X_1(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\cos\varphi + X_2(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\sin\varphi,$$

$\Phi_*(\rho,\varphi) = [X_1(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\sin\varphi - X_2(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\cos\varphi]/\rho$ при $\rho \ne 0$, $\Phi_*(0,\varphi) = \beta$. Ясно, что $\mathrm{P}_*, \Phi_* \in C^\infty$. Инвариантность X относительно действия $SO(2)$ влечет инвариантность P_* и Φ_* при сдвигах $\varphi \mapsto \varphi + \theta$, то есть независимость $\mathrm{P}_*(\rho,\varphi)$ и $\Phi_*(\rho,\varphi)$ от φ: $\mathrm{P}_*(\rho,\varphi) = \mathrm{P}(\rho)$ и $\Phi_*(\rho,\varphi) = \Phi(\rho)$. Из равенства $R_\pi^{-1} X R_\pi = X$ следует, что $X_i(-x_1, -x_2) \equiv -X_i(x_1, x_2)$, $i = 1,2$. Поэтому $\mathrm{P}(\cdot)$ и $\Phi(\cdot)$ – соответственно нечетная и четная функции. При этом $\mathrm{P}'(0) = \alpha$, $\Phi(0) = \beta$.

Пусть теперь $\mathrm{P}(\cdot)$ ($\Phi(\cdot)$) любая нечетная (четная) C^∞-функции на $[-1,1]$. Мы их можем представить в виде

$$\mathrm{P}(\rho) = \rho f(\rho^2),\ \Phi(\rho) = g(\rho^2), \tag{3}$$

где f и g некоторые C^∞-функции на $[-1,1]$ [12, с. 153]. Векторное поле (2), где

$$X_1(x_1, x_2) := x_1 f(x_1^2 + x_2^2) - x_2 g(x_1^2 + x_2^2),\ X_1(x_1, x_2) := x_1 g(x_1^2 + x_2^2) + x_2 f(x_1^2 + x_2^2),$$

принадлежит $\mathrm{X}^r(D, SO(2))$ и имеет в полярных координатах вид (1).

2. Грубые векторные поля в $\mathrm{X}^r(D, SO(2))$

Определение 1. *Векторные поля* X *и* Y *из* $\mathrm{X}^r(D, SO(2))$ *топологически эквивалентны, если существует гомеоморфизм* $h: D \to D$, *переводящий ориентированные траектории поля* X *в ориентированные траектории поля* Y.

Определение 2. *Векторное поле* $X \in \mathrm{X}^r(D,SO(2))$ *называется грубым (относительно* $\mathrm{X}^r(D,SO(2))$*), если существует такая его окрестность* V *в* $\mathrm{X}^r(D,SO(2))$*, что любое векторное поле* $\tilde{X} \in V$ *топологически эквивалентно векторному полю* X.

Обозначим $\Sigma_0^r = \Sigma_0^r(D,SO(2))$ множество векторных полей из $\mathrm{X}^r(D,SO(2))$, для которых в их записи в полярных координатах $\mathrm{P}(\cdot)$ имеет только простые нули, $\mathrm{P}(1)\neq 0$, а $\Phi(\cdot)$ не имеет на $(0,1)$ нулей, общих с $\mathrm{P}(\cdot)$. Это множество совпадает с пересечением множества векторных полей Морса–Смейла в D [11] с $\mathrm{X}^r(D,SO(2))$ Пусть $\mathbf{N}_0 := \varnothing$, $\mathbf{N}_n := \{1,...,n\}$ при $n\in\mathbf{N}$, $\sigma_n : \mathbf{N}_n \to \{-1,1\}$ при $n \in \{0\}\cup\mathbf{N}$. Обозначим Σ_{0,s,σ_n}^r (соответственно Σ_{0,u,σ_n}^r) множество векторных полей из Σ_0^r, для которых $\mathrm{P}(\cdot)$ имеет $n+1$ нуль: $0=\rho_0<\rho_1<...<\rho_n<1$, $\mathrm{P}'(0)<0$ (соответственно $\mathrm{P}'(0)>0$), а $\operatorname{sgn}\Phi(\rho_i)=\sigma_n(i)$ при $i\in\mathbf{N}_n$, $n\in\mathbf{N}$. Векторное поле из Σ_{0,s,σ_n}^r (Σ_{0,u,σ_n}^r) имеет единственную особую точку – начало координат, соответственно, устойчивую (неустойчивую), а также ровно n гиперболических периодических траекторий – окружностей $\rho=\rho_i$, $i\in\mathbf{N}_n$, положительно (отрицательно) ориентированных векторным полем при $\sigma_n(i)>0$ ($\sigma_n(i)<0$).

Теорема 2. 1. *Множество* $\Sigma_0^r(D,SO(2))$ *открыто и всюду плотно в* $\mathrm{X}^r(D,SO(2))$.

2. *Векторное поле* $X\in\mathrm{X}^r(D,SO(2))$ *является грубым тогда и только тогда, когда оно принадлежит* $\Sigma_0^r(D,SO(2))$.

3. *Связные компоненты множества* $\Sigma_0^r(D,SO(2))$ *совпадают с множествами* Σ_{0,s,σ_n}^r, Σ_{0,u,σ_n}^r, $n\in\{0\}\cup\mathbf{N}$.

4. *Классы топологической эквивалентности векторных полей из* $\Sigma_0^r(D,SO(2))$ *совпадают с множествами* Σ_{0,s,σ_0}^r, Σ_{0,u,σ_0}^r, $\Sigma_{0,s,\sigma_n}^r\cup\Sigma_{0,s,-\sigma_n}^r$, $\Sigma_{0,u,\sigma_n}^r\cup\Sigma_{0,u,-\sigma_n}^r$, $n\in\mathbf{N}$.

Доказательство. Векторное поле $X\in\Sigma_0^r$ является векторным полем Морса–Смейла в D. Поэтому существует такая его окрестность U в $\mathrm{X}^r(D)$, что любое векторное поле $\tilde{X}\in U$ является векторным полем Морса–Смейла в D и топологически эквивалентно X [11, 13]. Векторное поле $\tilde{X}$ из окрестности $V=U\cap\mathrm{X}^r(D,SO(2))$ поля X в $\mathrm{X}^r(D,SO(2))$ принадлежит Σ_0^r и топологически эквивалентно X. Поэтому Σ_0^r открыто в $\mathrm{X}^r(D,SO(2))$, а векторные поля из Σ_0^r являются грубыми.

Докажем плотность Σ_0^r в $\mathrm{X}^r(D,SO(2))$. Пусть $X\in\mathrm{X}^r(D,SO(2))$ и (3) – компоненты X в полярных координатах. Выберем произвольную окрестность V поля X в $\mathrm{X}^r(D,SO(2))$. По теореме Вейерштрасса о приближении [14, с. 37] найдутся многочлены $\tilde{f}(\rho)$ и $\tilde{g}(\rho)$, сколь угодно близкие соответственно к $f(\rho)$ и $g(\rho)$ на $[-1,1]$ в C^r-норме. Поэтому их можно выбрать так, чтобы векторное поле $\tilde{X}\in\mathrm{X}^r(D,SO(2))$, имеющее в полярных координатах вид $\rho\tilde{f}(\rho^2)\partial/\partial\rho+\tilde{g}(\rho^2)\partial/\partial\varphi$, принадлежало окрестности V. Выберем окрестность W поля $\tilde{X}$, содержащуюся в V. Рассмотрим векторное поле $\tilde{X}^{\mu,\nu}\in\mathrm{X}^r(D,SO(2))$, имеющее в полярных координатах вид $\rho(\tilde{f}(\rho^2)+\mu)\partial/\partial\rho+(\tilde{g}(\rho^2)+\nu)\partial/\partial\varphi$. Для некоторого $\delta>0$ $\tilde{X}^{\mu,\nu}\in W$, если $|\mu|<\delta$, $|\nu|<\delta$. При достаточно малом $\mu\in(0,\delta)$ многочлен $F(\rho):=\tilde{f}(\rho^2)+\mu$ имеет только простые нули, а $F(0)\neq 0$, $F(1)\neq 0$. Фиксируем такое μ. При достаточно малом $\nu_0 \in (0,\delta)$ многочлен $\tilde{g}(\rho^2)+\nu_0$ также имеет только простые нули. При достаточно малом $\nu \in (\nu_0,\delta)$ многочлен $\tilde{g}(\rho^2)+\nu$ не имеет общих нулей с $F(\rho)$. При выбранных μ и ν векторное поле $\tilde{X}^{\mu,\nu} \in \Sigma_0^r \cap V$. Тем самым, Σ_0^r всюду плотно в $\mathrm{X}^r(D,SO(2))$.

Покажем, что грубое векторное поле $X \in \mathrm{X}^r(D,SO(2))$ принадлежит Σ_0^r. Компоненты поля X в полярных координатах представим в виде (3). Пусть V – окрестность поля X, фигурирующая в определении грубости. Поскольку Σ_0^r всюду плотно в $\mathrm{X}^r(D,SO(2))$, то в V имеется векторное поле из Σ_0^r, которому X топологически эквивалентно. Поэтому X имеет единственную особую точку $(0,0)$, и либо не имеет замкнутых траекторий, либо имеет конечное число замкнутых траекторий, задаваемых в полярных координатах уравнениями $\rho=\rho_i$, $i=1,...,n$, где $0<\rho_j<\rho_{j+1}<1$ при $j=1,...,n-1$. При этом $\mathrm{P}(1)=f(1)\neq 0$, $f(\rho^2)\neq 0$ для $0<\rho<\rho_1$, $f(\rho^2)$ меняет знак в точках $\rho=\rho_i$, а $g(\rho_i^2)\neq 0$, $i=1,...,n$. Пусть $X \notin \Sigma_0^r$. Тогда или а) $\alpha=\mathrm{P}'(0)=f(0)=0$ или б) $f(\rho_k^2)=f'(\rho_k^2)=0$ при некотором $k=1,...,n$.

В случае а) рассмотрим векторное поле $\tilde{X} \in \mathrm{X}^r(D,SO(2))$, имеющее в полярных координатах компоненты $\tilde{\mathrm{P}}(\rho)=\rho(f(\rho^2)+\mu\chi(\rho^2))$, $\tilde{\Phi}(\rho)=g(\rho^2)$, где $\chi:[0,1]\to[0,1]$ такая C^∞-функция, что $\chi(u)=1$ при $u\in[0,a/2]$, $\chi(u)=0$ при $u\in[a,1]$, $0<a<\rho_1^2$. При достаточно малых $|\mu|$ $\tilde{X}\in V$. Если $\mu f(a)<0$, то $\tilde{\mathrm{P}}(\rho)$ имеет больше нулей, чем $\mathrm{P}(\rho)$, а $\tilde{X}$ имеет больше замкнутых траекторий, чем X. С другой стороны, так как поле $\tilde{X}\in V$, то оно топологически эквивалентно X и потому имеет столько же замкнутых траекторий. Полученное противоречие доказывает, что $X\in\Sigma_0^r$.

Рассмотрим случай б). Выберем число $0<b<\min\{\rho_k^2-\rho_{k-1}^2, \rho_{k+1}^2-\rho_k^2\}$, где следует считать $\rho_0=0$ при $k=1$ и $\rho_{k+1}=1$ при $k=n$. Рассмотрим поле $\tilde{X}\in \mathrm{X}^r(D,SO(2))$, имеющее в полярных координатах компоненты

$$\tilde{\mathrm{P}}(\rho)=\rho(f(\rho^2)+\mu(\rho^2-\rho_k^2)\chi(\rho^2)),\ \tilde{\Phi}(\rho)=g(\rho^2),$$

где $\chi:[0,1]\to[0,1]$ такая C^∞-функция, что $\chi(u)=1$ при $u\in[\rho_k^2-b/2,\ \rho_k^2+b/2]$, $\chi(u)=0$ при $u\in[0,\rho_k^2-b]\cup[\rho_k^2+b,1]$. При достаточно малых $|\mu|$ $\tilde{X}\in V$. Если $\mu f(\rho_k^2+b/2)<0$, то $\tilde{\mathrm{P}}(\rho)$ имеет больше нулей, чем $\mathrm{P}(\rho)$. Как и в случае а), получаем противоречие. Так что $X\in\Sigma_0^r$ и в случае б).

Утверждения 1) и 2) теорема доказаны.

Покажем, что множества Σ_{0,s,σ_n}^r связны. Достаточно соединить путем произвольное векторное поле $X\in\Sigma_{0,s,\sigma_n}^r$ с векторным полем $X_0\in\Sigma_{0,s,\sigma_n}^r$, имеющим в полярных координатах вид $\rho f_0(\rho^2)\partial/\partial\rho+g_0(\rho^2)\partial/\partial\varphi$, где

$$f_0(u)=(-1)^{n-1}(u-u_1)(u-u_2)\cdots(u-u_n),\ u_k=k/(n+1),\ k=1,...,n,$$
$$g_0(u)=\sigma_n(n)(u-\bar{u}_1)^{m_1}(u-\bar{u}_2)^{m_2}\cdots(u-\bar{u}_{n-1})^{m_{n-1}},\ \bar{u}_s=(u_s+u_{s+1})/2,$$
$$m_s=0,\ \text{если}\ \sigma_n(s+1)=\sigma_n(s)\ \text{и}\ m_s=1,\ \text{если}\ \sigma_n(s+1)=-\sigma_n(s),\ s=1,...,n-1.$$

Множество Σ^r_{0,s,σ_n} открыто, поэтому содержит шар

$$B := \{\widetilde{X} \in \mathrm{X}^r(D, SO(2)) : \left\|\widetilde{X} - X\right\|_{C^r} < \varepsilon$$

достаточно малого радиуса ε. В этом шаре существует векторное поле $\widetilde{X} \in \Sigma^r_{0,s,\sigma_n}$ $\widetilde{X} \in \Sigma^r_{0,s,\sigma_n}$, имеющее в полярных координатах вид $\rho\widetilde{f}(\rho^2)\partial/\partial\rho + \widetilde{g}(\rho^2)\partial/\partial\varphi$, где $\widetilde{f}(u)$ и $\widetilde{g}(u)$ – многочлены. Представим их в виде

$$\widetilde{f}(u) = (-1)^{n-1} p(u)(u - \widetilde{u}_1)(u - \widetilde{u}_2)\cdots(u - \widetilde{u}_n),$$

где $0 = \widetilde{u}_0 < \widetilde{u}_1 < \widetilde{u}_2 < \cdots < \widetilde{u}_n < \widetilde{u}_{n+1} = 1$, $p(u) > 0$ для всех $u \geq 0$,

$$\widetilde{g}(u) = \sigma_n(n) q(u)(u - \widetilde{v}_1)(u - \widetilde{v}_2)\cdots(u - \widetilde{v}_N),$$

где $0 \leq \widetilde{v}_1 \leq \widetilde{v}_2 \cdots \leq \widetilde{v}_N < 1$, $q(u) > 0$ для всех $u \geq 0$.

Поскольку $\widetilde{X}$ и X можно соединить путем в B, то достаточно найти путь в Σ^r_{0,s,σ_n}, соединяющий $\widetilde{X}$ с X_0.

Рассмотрим векторные поля $\widetilde{X}^\tau \in \mathrm{X}^r(D, SO(2))$, $\tau \in [0, 1]$, имеющие в полярных координатах вид $\rho\widetilde{f}(\rho^2)\partial/\partial\rho + \widetilde{g}_\tau(\rho^2)\partial/\partial\varphi$, где $\widetilde{g}_\tau(u)$ получается из $\widetilde{g}(u)$ следующим образом. Если $\widetilde{v}_{k_s} \leq \widetilde{v}_{k_s+1} \leq \cdots \leq \widetilde{v}_{k_{s+1}-1}$ – нули $\widetilde{g}(u)$, расположенные между $\widetilde{u}_s$ и $\widetilde{u}_{s+1}$, $s = 0,1,\ldots,n$ ($k_0 = 1$, $k_{n+1} - 1 = N$), то каждую группу множителей

$$(u - \widetilde{v}_{k_s})(u - \widetilde{v}_{k_s+1})\cdots(u - \widetilde{v}_{k_{s+1}-1}),\ s = 0,1,\ldots,n,$$

в $\widetilde{g}(u)$ заменяем на

$$\tau(u - \widetilde{v}_{k_s})(u - \widetilde{v}_{k_s+1})\cdots(u - \widetilde{v}_{k_{s+1}-1}) + (1-\tau)(u - u_s^*)^{m_s},$$

где $u_s^* := (\widetilde{u}_s + \widetilde{u}_{s+1})/2$, числа m_s при $s = 1,\ldots,n-1$ определены выше, а $m_0 = m_n = 0$. Если $\widetilde{g}(u)$ не имеет нулей между $\widetilde{u}_s$ и $\widetilde{u}_{s+1}$, то $m_s = 0$, и будем считать, что в выражении для $\widetilde{g}_\tau(u)$ есть множитель $(u - u_s^*)^{m_s} = 1$. Отображение $[0,1] \ni \tau \mapsto \widetilde{X}^\tau$ является путем в Σ^r_{0,s,σ_n}, соединяющим поле $\widetilde{X}^0 = \widetilde{X}$ с полем $\widetilde{X}^1$, имеющим в полярных координатах вид $\rho\widetilde{f}(\rho^2)\partial/\partial\rho + \widetilde{g}_1(\rho^2)\partial/\partial\varphi$, где

$$\widetilde{g}_1(u) = \sigma_n(n) q(u)(u - u_1^*)^{m_1}\cdots(u - u_{n-1}^*)^{m_{n-1}}.$$

Пусть $\widetilde{\widetilde{X}}^\tau \in \mathrm{X}^r(D, SO(2))$, $\tau \in [0, 1]$ – векторное поле, имеющее в полярных координатах вид $\rho\widetilde{\widetilde{f}}_\tau(\rho^2)\partial/\partial\rho + \widetilde{\widetilde{g}}_\tau(\rho^2)\partial/\partial\varphi$, где

$$\widetilde{\widetilde{f}}_\tau(u) = (-1)^{n-1}[(1-\tau)p(u) + \tau](u - \widetilde{\widetilde{u}}_1(\tau))(u - \widetilde{\widetilde{u}}_2(\tau))\cdots(u - \widetilde{\widetilde{u}}_n(\tau)),$$

$$\widetilde{\widetilde{g}}_\tau(u) = \sigma_n(n)[(1-\tau)q(u) + \tau](u - \widetilde{\widetilde{v}}_1(\tau))^{m_1}(u - \widetilde{\widetilde{v}}_2(\tau))^{m_2}\cdots(u - \widetilde{\widetilde{v}}_{n-1})^{m_{n-1}},$$

$$\widetilde{\widetilde{u}}_i(\tau) := (1-\tau)\widetilde{u}_i + \tau u_i,\ i = 1,\ldots,n,\ \widetilde{\widetilde{v}}_s(\tau) := (1-\tau)u_s^* + \tau\overline{u}_s,\ s = 1,\ldots,n-1.$$

Отображение $[0,1] \ni \tau \mapsto \widetilde{\widetilde{X}}^\tau$ является путем в Σ^r_{0,s,σ_n}, соединяющим поле $\widetilde{X}^1$ с полем X_0. Таким образом, множества Σ^r_{0,s,σ_n} связны, и утверждение 3) теоремы доказано.

При изменении векторного поля из Σ^r_{0,s,σ_n} вдоль пути в Σ^r_0 не может измениться ни число замкнутых траекторий, ни их ориентация, ни устойчивость замкнутых траекторий и особой точки. Поэтому связная компонента Σ_0^r, содержащая Σ_{0,s,σ_n}^r, совпадает с Σ_{0,s,σ_n}^r.

Аналогично доказывается, что и множества Σ_{0,u,σ_n}^r – связные компоненты Σ_0^r.

Отображение $(x_1, x_2) \mapsto (-x_1, x_2)$ переводит траектории векторного поля из Σ_{0,s,σ_n}^r (Σ_{0,u,σ_n}^r) в траектории векторного поля из $\Sigma_{0,s,-\sigma_n}^r$ ($\Sigma_{0,u,-\sigma_n}^r$). Поэтому векторные поля из $\Sigma_{0,s,\sigma_n}^r \cup \Sigma_{0,s,-\sigma_n}^r$ ($\Sigma_{0,u,\sigma_n}^r \cup \Sigma_{0,u,-\sigma_n}^r$) принадлежат одному классу топологической эквивалентности. Поскольку в определении топологической эквивалентности содержится требование сохранения ориентации траекторий, то векторные поля из Σ_{0,s,σ_n}^r и векторные поля из $\Sigma_{0,u,\sigma_l'}^r$ не могут принадлежать одному классу топологической эквивалентности ни при каких σ_n и σ_l'. Векторные поля из Σ_{0,s,σ_n}^r и $\Sigma_{0,s,\sigma_l'}^r$ (Σ_{0,u,σ_n}^r и $\Sigma_{0,u,\sigma_l'}^r$) при разных σ_n и σ_l' также не являются топологически эквивалентными, так как имеют разные схемы [15]. В итоге получаем утверждение 4) теоремы.

Список литературы
References

1. Овсянников Л.В. 1978. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука. 400 с.

Ovsjannikov L.V. 1978. Group analysis of differential equations. Moscow. Nauka. 400 p.

2. Ibragimov N.H. 2006. A practical course of differential equations and mathematical modeling. Carlscrona (Sweden): ALGA. 370 p.

3. Ibragimov N.H. 1999. Lie group analysis and ordinary differential equations. New York. Wiley.

4. Лерман Л.М., Тураев Д.В. 2012. О бифуркациях потери симметрии в обратимых системах. Нелинейная динамика. Т. 8, № 2. С. 323–343.

Lerman L.M., Turaev D.V. 2012. On symmetry breaking bifurcations in reversible systems. Nonlinear Dynamics. V. 8. No. 2. P. 323–343.

5. Fiedler B., Liebscher S., Alexander J.C. 2000. Generic Hopf bifurcation from lines of equilibria without parameters: 1. Theory. J. Differential Equations. Vol. 167, no. 1, pp. 16–35.

6. Lamb J. S.W., Roberts J.A. G. 1998. Time-reversal symmetry in dynamical systems: A survey. Physica D. Vol. 112, no. 1–2, pp. 1–39.

7. Lamb J. S. W., Capel H. W. 1995. Local bifurcations on the plane with reversing point group symmetry. Chaos. Solitons. Fractals. Vol. 5, no. 2, pp. 271–293.

8. Peroueme M.C. 1993. Bifurcation from a periodic orbit for a strongly resonant reversible autonomous vector field. SIAM J. Math. Anal. Vol. 24, no. 6, pp. 1577–1596.

9. Арнольд В.И. 1978. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука. 304 с.

Arnold V.I. 1978. Additional chapters of the theory of ordinary differential equations. Moscow. Nauka. 304 p.

10. Ройтенберг В.Ш. 2018. О типичных однородных векторных полях на плоскости. Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. № 2 (46). С. 15–26.

Roitenberg V.Sh. 2018. On generic homogeneous vector fields on the plane. University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences. No. 2 (46). P. 15–26.

11. Палис Ж., Мелу В. 1986. Геометрическая теория динамических систем. Введение. Пер. с англ. М.: Мир. 301 с.

Palis J., Melo W. 1982. Geometric theory of dynamical systems. An introduction. Springer-Verlag.

12. Голубицкий М., Гийемин В. 1977. Устойчивые отображения и их особенности. Пер. с англ. М.: Мир. 290 с.

Golubitsky M., Guillemin V. 1973. Stable mappings and their singularities. New York. Springer-Verlag.

13. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. 1967. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М.: Наука. 488 с.

Andronov A.A., Leontovich E.A., Gordon I.I., Maier A.G. 1967. The theory of bifurcations of dynamical systems on the plane. Moscow. Nauka. 488 p.

14. Нарасимхан Р. 1971. Анализ на действительных и комплексных многообразиях. Пер. с англ. М.: Мир. 232 с.

Narasimhan R. 1968. Analysis on real and complex manifolds. Paris. Masson & Cie.

15. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. 1966. Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука. 568 с.

Andronov A.A., Leontovich E.A., Gordon I.I., Maier A.G. 1966. Qualitative theory of dynamical systems of second order. Moscow. Nauka. 568 p.