МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 517.926.4
DOI 10.18413/2075-4639-2018-50-4-373-383

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА, СОДЕРЖАЩЕГО РАЗЛИЧНЫЕ ВЕСОВЫЕ ФУНКЦИИ

SOLVABILITY OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR ONE CLASS OF HIGH ORDER DEGENERATING ELLIPTIC EQUATION CONTAINING VARIOUS WEIGHT FUNCTIONS

А.В. Глушак
A.V. Glushak

Белгородский национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85

Belgorod National Research University, 85 Pobedy St, Belgorod, 308015, Russia

E-mail: Glushak@.bsu.edu.ru

Аннотация
Устанавливается разрешимость задачи Дирихле для линейного дифференциального уравнения высокого порядка с двумя вырождающимися эллиптическими операторами.

Abstract
Solvability of the Dirichlet problem for a linear differential equation of high order with two degenerate elliptic operators is established, which makes it possible to investigate the unique solvability of this problem.

Ключевые слова: вырождающиеся дифференциальные уравнения высокого порядка, задача Дирихле, однозначная разрешимость.
Keywords: degenerate differential equations of high order, the Dirichlet problem, unique solvability.

Введение

Дифференциальные уравнения с обращающимся в нуль коэффициентом при старшей производной не вписываются в рамки стандартной теории обыкновенных дифференциальных уравнений и давно привлекали внимание широкого круга исследователей. Обзор литературы по уравнениям с неотрицательной характеристической формой, которые, в частности, включают вырождающиеся дифференциальные уравнения второго порядка в частных производных можно найти в [1, 2]. В этих работах уже рассматривались вырождающиеся эллиптические граничные задачи, содержащие производные с различными весовыми функциями. В отличие от указанных работ [1, 2] в настоящей работе в уравнение введён регулярный эллиптический оператор порядка $2l$, что приводит к изменению в постановке граничных условий. Предложен метод доказательства однозначной разрешимости задачи Дирихле. Отметим, что априорная оценка решения указанной задачи Дирихле доказана ранее в статье [3], а представление суммы регулярного эллиптического оператора и вырождающихся эллиптических операторов высокого порядка в виде композиции похожих по структуре операторов установлено в [4]. Укажем также источники [5–14], в которых исследовались близкие задачи или были использованы похожие методы.

Постановка задачи

В полосе $D=[0,d]\times R_n$ рассмотрим задачу Дирихле для дифференциального уравнения высокого порядка с постоянными коэффициентами

$$L_{2m}(D_\alpha,D_y)U(x,y)+L_{2p}(D_\beta,D_y)U(x,y)+L_{2l}(D_x,D_y)U(x,y)=F(x,y), \tag{1}$$

$$U(d,y)=\partial_x U(d,y)=\cdots=\partial_x^{m-1}U(d,y)=0, \tag{2}$$

$$U(0,y)=\partial_x U(0,y)=\cdots=\partial_x^{l-1}U(0,y)=0, \tag{3}$$

где $l<p<m$ – натуральные числа, $\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_n)$ – мультииндекс,

$$L_{2m}(\tau,\xi)=a_1\tau^{2m}+a_2\xi^{2m}+a_3,\qquad L_{2p}(\tau,\xi)=b_1\tau^{2p}+b_2\xi^{2p}+b_3,\qquad L_{2l}(\tau,\xi)=d_1\tau^{2l}+d_2\xi^{2l}+d_3,$$

$$D_y^\mu U(x,y)=D_{y_1}^{\mu_1}\cdots D_{y_n}^{\mu_n}U(x,y),\quad D_yU(x,y)=-i\partial_yU(x,y),$$

$D_\alpha U(x,y)=i\sqrt{\alpha(x)}\partial_x\left(\sqrt{\alpha(x)}U(x,y)\right)$, $\alpha(x)\in C^{2m}[0,d]$, $\alpha(0)=0$, $\alpha(x)>0$ при $x>0$. Аналогично D_α определяется оператор D_β . Коэффициенты $a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3,d_1,d_2,d_3$ – действительные постоянные числа.

Условие 1. Многочлены $L_{2m}(\tau,\xi), L_{2p}(\tau,\xi)$ и $L_{2l}(\tau,\xi)$ положительны при любых $(\tau,\xi)\in R_{n+1}$.

Условие 2. Пусть $\alpha(x),\beta(x)\in C^{2m}[0,d]$ и $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$. Пусть также $\partial_x\alpha(0)=\partial_x\beta(0)=0$.

Условие 3. Функции $\gamma(x)=\beta^{p/(m-p)}(x)$ и $\delta(x)=\left(\dfrac{\alpha^m(x)}{\beta^p(x)}\right)^{1/(m-p)}$ принадлежат $C^{2m}[0,d]$ и при этом $\partial_x\gamma(0)=\partial_x\delta(0)=0$.

Условие 4. а) Пусть $r=p-l\ge q=m-p$ и $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\delta(x)}{\gamma(x)}<\infty$, что равносильно условиям $2p\ge m+l$ и $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\alpha^{m/(m-p)}(x)}{\beta^{p(m-l)/((m-p)(p-l))}(x)}<\infty$.

б) Если хотя бы одно из условий п. а) не выполнено, то потребуем, чтобы $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\alpha^{2(p-l)+m_0}(x)}{\beta^{2p}(x)}=0$, где $m_0=\left[\dfrac{2l(p-l)}{m-l}\right]$ ($[\cdot]$ – целая часть числа).

Обозначим через $H_{\alpha,\beta}^{2m,2p,2l}(D)$ пространство функций $U(x,y)\in L_2(D)$, для которых конечен квадрат нормы

$$\||U(x,y)\||^2=\sum_{j=0}^{2m}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^d\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-j}\left|D_\alpha^ju(x,\xi)\right|^2dxd\xi+\sum_{j=0}^{2p}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^d\left(1+|\xi|^2\right)^{2p-j}\left|D_\beta^ju(x,\xi)\right|^2dxd\xi+$$
$$+\sum_{j=0}^{2l}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^d\left(1+|\xi|^2\right)^{2l-j}\left|D_x^ju(x,\xi)\right|^2dxd\xi,$$

где $u(x,\xi)=F_{y\to\xi}[U(x,y)]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}U(x,y)\exp(-i\xi y)dy$ – преобразование Фурье функции $U(x,y)\in L_2(D)$

по переменной $y \in R_n$. Через $FH^{2m,2p,2l}_{\alpha,\beta}(D)$ мы будем обозначать пространство образов Фурье по переменной $y \in R_n$ функций из пространства $H^{2m,2p,2l}_{\alpha,\beta}(D)$.

Теорема 1 [3]. Пусть выполнены условия 1, 2 и $F(x,y) \in L_2(D)$. Тогда для функций $u(x,\xi) \in FH^{2m,2p,2l}_{\alpha,\beta}$ и $U(x,y) \in H^{2m,2p,2l}_{\alpha,\beta}$, являющихся соответственно решениями задач (4) – (6) и (1) – (3), выполнены априорные оценки

$$\sum_{j=0}^{2m}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-j}\left\|D^j_\alpha u(x,\xi)\right\|^2+\sum_{j=0}^{2p}\left(1+|\xi|^2\right)^{2p-j}\left\|D^j_\beta u(x,\xi)\right\|_0^2+\sum_{j=0}^{2l}\left(1+|\xi|^2\right)^{2l-j}\left\|D^j_\beta u(x,\xi)\right\|_0^2 \le c\left\|f(x,\xi)\right\|_0^2,$$

$$\left\|U(x,y)\right\|^2 \le c\iint_D |F(x,y)|^2\,dxdy$$

с постоянной $c>0$ не зависящей от $u(x,\xi),\ f(x,\xi), U(x,y), F(x,y)$.

Определение. Будем говорить, что оператор $L_{2m}(D_\alpha,\xi)+L_{2p}(D_\beta,\xi)+L_{2l}(D_x,\xi)$ при $|\xi|\le\lambda_0$ принадлежит классу эквивалентности $\{M_{2r}(D_\gamma,\xi)\circ M_{2q}(D_\delta,\xi)\circ M_{2l}(D_x,\xi)\}$, порождённому композицией операторов $M_{2r}(D_\gamma,\xi), M_{2q}(D_\delta,\xi), M_{2l}(D_x,\xi)$, если для любого $\varepsilon_0>0$ существует такое $d=d(\varepsilon_0)$, что при $0<x<d(\varepsilon_0)$ имеет место представление

$$M_{2r}(D_\gamma,\xi)\circ M_{2q}(D_\delta,\xi)\circ M_{2l}(D_x,\xi)-L_{2m}(D_\alpha,\xi)u(x,\xi)-L_{2p}(D_\beta,\xi)u(x,\xi)-L_{2l}(D_\beta,\xi)u(x,\xi)=T(x,\xi)u(x,\xi),$$

при этом для любых $u(x,\xi)\in FH^{2m,2p,2l}_{\alpha,\beta}(D)$ и $|\xi|\le\lambda_0$ справедлива оценка

$$\left\|T(x,\xi)u(x,\xi)\right\|\le\varepsilon_0\langle u(x,\xi)\rangle,$$

где $||\cdot||$ – L_2-норма, $\langle u(x,\xi)\rangle^2=\int_0^d\left(\sum_{j=0}^{2m}\left|D^j_\alpha u(x,\xi)\right|^2+\sum_{j=0}^{2p}\left|D^j_\beta u(x,\xi)\right|^2+\sum_{j=0}^{2l}\left|D^j_x u(x,\xi)\right|^2\right)dx$.

Теорема 2 [4]. Пусть выполнены условия 1–4. Тогда существуют такие операторы $M_{2r}(D_\gamma,\xi)$, $M_{2q}(D_\delta,\xi)$, $M_{2l}(D_x,\xi)$ и число $\lambda_0>0$, что сумма $L_{2m}(D_\alpha,\xi)+L_{2p}(D_\beta,\xi)+L_{2l}(D_x,\xi)$ при $|\xi|\le\lambda_0$ принадлежит классу эквивалентности $\{M_{2r}(D_\gamma,\xi)\circ M_{2q}(D_\delta,\xi)\circ M_{2l}(D_x,\xi)\}$, порождённому композицией этих операторов.

Наряду с задачей (1) – (3) рассмотрим задачу

$$L_{2m}(D_\alpha,\xi)u(x,\xi)+L_{2p}(D_\beta,\xi)u(x,\xi)+L_{2l}(D_x,\xi)u(x,\xi)=f(x,\xi), \tag{4}$$

$$u(d,\xi)=\partial_x u(d,\xi)=\cdots=\partial_x^{m-1}u(d,\xi)=0, \tag{5}$$

$$u(0,\xi)=\partial_x u(0,\xi)=\cdots=\partial_x^{l-1}u(0,\xi)=0, \tag{6}$$

полученную из задачи (1) – (3) после применения преобразования Фурье $F_{y\to\xi}[\cdot]$ по переменной $y\in R_n$.

Как будет показано далее, для разрешимости задачи (4) – (6) достаточно установить разрешимость при $|\xi|\le\lambda_0$ следующей граничной задачи:

$$M_{2r}(D_\gamma)\circ M_{2q}(D_\delta)\circ M_{2l}(D_x,\xi)u(x,\xi)=f(x,\xi),\qquad f(x,\xi)\in L_2(0,d), \tag{7}$$

$$u(d,\xi)=\partial_x u(d,\xi)=\cdots=\partial_x^{m-1}u(d,\xi)=0, \tag{8}$$

$$u(0,\xi)=\partial_x u(0,\xi)=\cdots=\partial_x^{l-1}u(0,\xi)=0. \tag{9}$$

Для дальнейшего удобно ввести обозначение

$$M_{2l}(D_x,\xi)u(x,\xi)=v(x,\xi),\quad M_{2q}(D_\delta)v(x,\xi)=w(x,\xi),$$

и тогда уравнение (7) можно записать в виде системы

$$M_{2r}(D_\gamma)w(x,\xi)=f(x,\xi), \tag{10}$$

$$M_{2q}(D_\delta)v(x,\xi)=w(x,\xi). \tag{11}$$

$$M_{2l}(D_x)u(x,\xi)=v(x,\xi). \tag{12}$$

Для общего решения $w(x,\xi)$ уравнения (10) справедливо представление (см. [2])

$$w(x,\xi)=\frac{1}{2\pi\sqrt{\gamma(x)}}\int\limits_{\gamma_1}\frac{\Theta_1(\lambda)}{M_{2r}^{+}(\lambda)}\exp\left(i\lambda\int\limits_x^d\frac{ds}{\gamma(s)}\right)d\lambda+\frac{1}{\sqrt{\gamma(x)}}R_1\left[\sqrt{\gamma(x)}\,f\right](x,\xi),$$

где $M_{2p}(\lambda,\xi)=M_{2p}^{+}(\lambda,\xi)M_{2p}^{-}(\lambda,\xi)$ – факторизация по λ эллиптического многочлена $M_{2p}(\lambda,\xi)$, γ_1 – контур на комплексной плоскости, охватывающий корни многочлена $M_{2p}^{+}(\lambda,\xi)$, $\Theta_1(\lambda)=\sum\limits_{k=1}^{r}\theta_k\lambda^{k-1}$ – некоторый многочлен степени $r-1$, S – оператор сужения на $(0,\infty)$, $x_\gamma(z)$ – функция обратная функции $z=\int\limits_x^d\frac{ds}{\gamma(s)}$,

$$R_1\left[\sqrt{\gamma(x)}\,f\right](x,\xi)=\frac{1}{2\pi}S\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(i\tau t)}{M_{2r}(\tau)}\int\limits_0^{\infty}\sqrt{\gamma(x)}\,f(x,\xi)\Big|_{x=x_\gamma(z)}\exp(-i\tau y)\,dy\,d\tau.$$

Аналогично для решения $v(x,\xi)$ уравнения (11) справедливо представление

$$v(x,\xi)=\frac{1}{2\pi\sqrt{\delta(x)}}\int\limits_{\gamma_1}\frac{\Theta_2(\lambda)}{M_{2q}^{+}(\lambda)}\exp\left(i\lambda\int\limits_x^d\frac{ds}{\delta(s)}\right)d\lambda+\frac{1}{\sqrt{\delta(x)}}R_2\left[\sqrt{\delta(x)}\,w\right](x,\xi),$$

где $M_{2q}(\lambda)=M_{2q}^{+}(\lambda)M_{2q}^{-}(\lambda)$ – факторизация по λ эллиптического многочлена $M_{2q}(\lambda)$, γ_2 – контур на комплексной плоскости, охватывающий корни многочлена $M_{2q}^{+}(\lambda)$, $\Theta_2(\lambda)=\sum\limits_{k=1}^{q}\theta_{k+r}\lambda^{k-1}$ – некоторый многочлен степени $q-1$, $x_\delta(t)$ – функция обратная функции $t=\int\limits_x^d\frac{ds}{\delta(s)}$,

$$R_2\left[\sqrt{\delta(x)}\,w\right](x,\xi)=\frac{1}{2\pi}S\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(i\tau t)}{M_{2q}(\tau)}\int\limits_0^{\infty}\sqrt{\delta(x)}\,w(x,\xi)\Big|_{x=x_\delta(y)}\exp(-i\tau y)\,dy\,d\tau.$$

Уравнение (12) является обыкновенным дифференциальным уравнением порядка $2l$ с постоянными коэффициентами, поэтому общее решение $u(x,\xi)$ этого уравнения имеет вид

$$u(x,\xi)=\sum_{k=1}^{2l}\theta_{q+k+r}u_k(x,\xi)+R_3[v(x,\xi)],\tag{15}$$

где $u_k(x,\xi)$ – линейно независимые решения уравнения $M_{2l}(D_x,\xi)u(x,\xi)=0$, S_0 – оператор сужения на $(0,d)$,

$$R_3[v](x,\xi)=\frac{1}{2\pi}S_0\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(ix\eta)}{M_{2l}(\eta,\xi)}\int\limits_0^d v(s,\xi)\exp(-is\eta)\,ds\,d\eta.$$

Чтобы определяемое формулой (15) решение уравнения (7) удовлетворяло граничным условиям (8), (9), следует выбрать постоянные $\theta_k,\ k=1,2,\ldots,m+l$ таким образом, чтобы выполнялись следующие соотношения

$$\sum_{k=1}^{2l}\theta_{q+k+r}\partial_x^j u_k(d,\xi)+\partial_x^j R_3[v(x,\xi)]\Big|_{x=d}=0,\quad j=0,1,\ldots,m-1,\tag{16}$$

$$\sum_{k=1}^{2l}\theta_{q+k+r}\partial_x^j u_k(0,\xi)+\partial_x^j R_3[v(x,\xi)]\Big|_{x=0}=0,\quad j=0,1,\ldots,l-1.\tag{17}$$

Уравнения (17) с учетом представлений (14), (13) можно переписать в виде

$$\sum_{k=1}^{m+l}\theta_k\varphi_{ik}(\xi)=A_i(\xi),\quad i=0,1,\ldots,l-1,\tag{18}$$

где $$A_j(\xi)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(i\eta)^j}{M_{2l}(\eta,\xi)}\int\limits_0^d\frac{\exp(-is\eta)}{\sqrt{\delta(s)}}\qquad\times$$

$$\times \quad S\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(i\tau t)}{M_{2q}(\tau)}\int_0^{\infty}\left(\sqrt{\frac{\delta(x)}{\gamma(x)}}R_1\left[\sqrt{\gamma(x)}\,f\right](x,\xi)\right)\Bigg|_{x=x_\delta(y)}\exp(-i\tau y)d\tau dy\Bigg|_{t=\int_s^d\frac{dy}{\delta(y)}}, \quad j=0,1,\dots,l-1; \tag{19}$$

при $1\le k\le r,\quad 0\le j\le l-1$ $\qquad \varphi_{jk}(\xi)=\dfrac{1}{4\pi^2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(i\eta)^j}{M_{2l}(\eta,\xi)}\int_0^d\frac{\exp(-is\eta)}{\sqrt{\delta(s)}}\quad\times$

$$\times\quad S\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(i\tau t)}{M_{2q}(\tau)}\int_0^{\infty}\left(\sqrt{\frac{\delta(x)}{\gamma(x)}}\int_{\gamma_1}\frac{\lambda^{k-1}}{M_{2r}^+(\lambda)}\exp\left[i\lambda\int_x^d\frac{ds}{\gamma(s)}\right]d\lambda\right)\Bigg|_{x=x_\delta(y)}\exp(-i\tau y)d\tau dy\Bigg|_{t=\int_s^d\frac{dy}{\delta(y)}}dsd\eta; \tag{20}$$

при $r+1\le k\le r+k,\quad 0\le j\le l-1$

$$\varphi_{jk}(\xi)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(i\eta)^j}{M_{2l}(\eta,\xi)}\int_0^d\frac{\exp(-is\eta)}{\sqrt{\delta(s)}}\left(\int_{\gamma_2}\frac{\lambda^{k-r-1}}{M_{2q}^+(\lambda)}\exp\left[i\lambda\int_x^d\frac{dy}{\delta(y)}\right]d\lambda\right)dsd\eta; \tag{21}$$

при $r+q+1\le k\le m+l,\quad 0\le j\le l-1$ $\qquad \varphi_{jk}(\xi)=\partial_x^j u_{k-r-q}(0,\xi).$

В случае, если $m\le 2l$, то аналогично (17) уравнения (16) записываются в виде

$$\sum_{k=1}^{m+l}\theta_k\varphi_{ik}(\xi)=A_i(\xi),\quad i=l,l+1,\dots,l+m-1, \tag{22}$$

где $A_j(\xi)$, $\varphi_{jk}(\xi)$, $j=l,l+1,\dots,l+m-1$, $k=1,2,\dots,r+q$ определяются по формулам (19) – (21) с заменой $(i\eta)^j$ на $(i\eta)^{j-l}l^{id\eta}$, а для $j=l,l+1,\dots,l+m-1$, $k=r+q+1,\dots,m+l$ $\varphi_{jk}(\xi)=\partial_x^{j-l}u_{k-r-q}(d,\xi)$.

Отметим, что при $m\le 2l$, интеграл в выражении

$$\partial_x^j R_3[v](d,\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(i\eta)^j\exp(i\eta d)}{M_{2l}(\eta,\xi)}\int_0^d v(s,\xi)\exp(-is\eta)dsd\eta,\quad 0\le j\le m-1$$

очевидно сходится.

Если $m\ge 2l+1, m\ge 2p-2l$, то для $0\le j\le 2l-1$ уравнения (16) записываются в виде (22), при этом $i=l,l+1,\dots,3l-1$. Чтобы граничные условия (16) выполнялись и при $j=2l,\dots,m-1$, потребуем выполнения соотношений

$$v(d,\xi)=\partial_x v(d,\xi)=\dots=\partial_x^{m-2l-1}v(d,\xi)=0, \tag{23}$$

и тогда из (23), (12) будет следовать (16) для $j=2l,\dots,m-1$.

Используя (14), (13), уравнения (23) запишем в виде

$$\sum_{k=1}^{m+l}\theta_k\varphi_{ik}(\xi)=A_i(\xi),\quad i=3l,\dots,l+m-1, \tag{24}$$

где $\displaystyle A_j(\xi)=-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(i\tau)^{j-3l}}{M_{2q}(\tau)}\int_0^{\infty}e^{-i\tau y}\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma(x)}}R_1\left[\sqrt{\gamma(x)}\,f\right](x,\xi)\right)\Bigg|_{x=x_\delta(y)}dyd\tau,\quad j=3l,\dots,l+m-1;$

при $1\le k\le r,\quad 3l\le j\le l+m-1$ $\qquad \displaystyle\varphi_{jk}(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(i\tau)^{j-3l}}{M_{2q}(\tau)}\int_0^{\infty}e^{-i\tau y}\left(\sqrt{\frac{\delta(x)}{\gamma(x)}}\int_{\gamma_1}\frac{\lambda^{k-1}}{M_{2r}^+(\lambda)}\exp\left[i\lambda\int_x^d\frac{ds}{\gamma(s)}\right]d\lambda\right)\Bigg|_{x=x_\delta(y)}dyd\tau;$

при $r+1\le k\le r+q,\quad 3l\le j\le l+m-1$ $\qquad \displaystyle\varphi_{jk}(\xi)=\int_{\gamma_2}\frac{\lambda^{k-r-1}(i\lambda)^{j-3l}}{M_{2q}^+(\lambda)}d\lambda;$

при $r+q+1\le k\le m+l,\quad 3l\le j\le l+m-1$ $\qquad \varphi_{jk}(\xi)=0.$

Отметим, что при $m\ge 2(p-l)$, интеграл в выражении

$$\partial_x^j R_2\left[\sqrt{\delta(x)}w\right](d,\xi)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{-1}{\delta(d)}\right)^j\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(i\tau)^j}{M_{2q}(\tau)}\int_0^{\infty}e^{-i\tau y}\left(\sqrt{\delta(x)}w(x,\xi)\right)\Big|_{x=x_\delta(y)}dyd\tau,\quad 1\le j\le m-2l-1$$

очевидно сходится.

Наконец, если $m \ge 2l+1, m \le 2p-2l-1$, то для $0 \le j \le 2l-1$ уравнения (16) записываются в виде (22), при этом $i = l, l+1, \ldots, 3l-1$, а для $2l \le j \le 2(m-p+l)-1$ уравнения (16) записываются в виде (24), при этом $i = 3l, 3l+1, \ldots, 3l+2(m-p)-1$.

Чтобы граничные условия (16) выполнялись и при $j = 2(m-p+l), \ldots, m-1$, потребуем выполнения соотношений

$$w(d,\xi) = \partial_x w(d,\xi) = \cdots = \partial_x^{2p-2l-m-1} w(d,\xi) = 0, \tag{25}$$

и тогда из (25), (11) будет вытекать справедливость равенств

$$v(d,\xi) = \partial_x v(d,\xi) = \cdots = \partial_x^{m-2l-1} v(d,\xi) = 0,$$

а, следовательно, в силу (12), и справедливость (16) для $j = 2(m-p+l), \ldots, m-1$.

Уравнения (25), используя (13), запишем в виде

$$\sum_{k=1}^{r} \theta_k \varphi_{ik}(\xi) = A_i(\xi), \quad i = 3l+2(m-p), \ldots, l+m-1, \tag{26}$$

где $\displaystyle A_j(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(i\tau)^{j-2(m-p)-3l}}{M_{2r}(\tau)} \int_0^{\infty} e^{-i\tau y} \left(\sqrt{\gamma(x)} f(x,\xi)\right)\Big|_{x=x_\gamma(y)} dy d\tau, \quad j = 3l+2(m-p), \ldots, l+m-1;$

при $r \le k \le r, \quad 3l+2(m-p) \le j \le l+m-1 \qquad \displaystyle \varphi_{jk}(\xi) = \int_{\gamma_1} \frac{\lambda^{k-1}(i\lambda)^{j-3l-2(m-p)}}{M_{2r}^{+}(\lambda)} d\lambda;$

при $r+1 \le k \le m+l, \quad 3l+2(m-p) \le j \le l+m-1 \qquad \varphi_{jk}(\xi) = 0.$

Отметим, что интеграл в выражении для $A_j(\xi)$ сходится, так как

$$m+l-1-2(m-p)-3l = 2p-2l-m-1 < 2r = 2p-2l.$$

Неизвестные θ_k, $1 \le k \le m+l-1$ будут однозначно определены из системы уравнений

$$\sum_{k=1}^{m+l} \theta_k \varphi_{ik}(\xi) = A_i(\xi), \quad i = 0, \ldots, l+m-1, \tag{27}$$

если для $|\xi| \le \lambda_0$ определитель $\det\limits_{\substack{0 \le i \le m+l-1 \\ 1 \le k \le m+l}} (\varphi_{ik}(\xi)) \ne 0$. Заметим, что при достаточно малых $\lambda_0 > 0$ и $|\xi| \le \lambda_0$ это требование будет выполнено, если дополнительно наложить следующее условие 5.

Условие 5. Определитель $\det\limits_{\substack{0 \le i \le m+l-1 \\ 1 \le k \le m+l}} (\varphi_{ik}(0))$ отличен от нуля.

Таким образом, мы приходим к следующей теореме.

Теорема 3. Пусть выполнены условия 1 – 3, 5. Тогда при любых $f(x,\xi) \in L_2(0,d)$, $|\xi| \le \lambda_0$, $d < \lambda_0$ и достаточно малом $\lambda_0 > 0$ существует единственное решение $u(x,\xi)$ задачи (7) – (9) и справедлива оценка

$$\langle u(x,\xi) \rangle \le c \| f(x,\xi) \| \tag{28}$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от $u(x,\xi)$ и $f(x,\xi)$.

Доказательство. Формула (15) даёт решение рассматриваемой задачи (9), (10), причём постоянные $\theta_k, k = 1,2,\ldots,m+l$ находятся из уравнений (27), и нам только остаётся установить справедливость оценки (28).

Используя неравенство (см. (12) из [3])

$$\left\| D_\alpha^m v(x) \right\| \le \varepsilon^{s-m} \left\| D_\alpha^s v(x) \right\| + c_2 \left(\varepsilon^{-m} + \varepsilon^{s-m} \right) \| v(x) \|, \quad \varepsilon > 0,$$

а также неравенство (см. (15) из [4])

$$\left\| \sum_{k=0}^{2p-1} \omega_k(x) D_\beta^k u(x,\xi) + \sum_{j=0}^{2r-1} \tilde{\rho}_j(x) D_\gamma^j D_x^{2l} u(x,\xi) \right\| \le \varepsilon_0 \langle u(x,\xi) \rangle, \quad \varepsilon_0 > 0,$$

получим:

$$\langle u(x,\xi) \rangle \le c \left(\left\| D_\gamma^{2r} D_\delta^{2q} D_x^{2p} u(x,\xi) \right\| + \left\| D_\gamma^{2r} D_x^{2l} u(x,\xi) \right\| + \left\| D_x^{2l} u(x,\xi) \right\| + \| u(x,\xi) \| \right) + \varepsilon_0 \langle u(x,\xi) \rangle. \tag{29}$$

Поскольку функция $u(x,\xi)$ удовлетворяет уравнению (12) и условиям (8), (9), то для нее выполнена известная оценка

$$\|D_x^{2l}u(x,\xi)\|+\|u(x,\xi)\|\le c\|v(x,\xi)\|,\quad v(x,\xi)\in L_2(0,d). \tag{30}$$

Применим к уравнению (12) оператор $D_\gamma^{2r}D_\delta^{2q}$ и получим

$$g_1 D_\gamma^{2r}D_\delta^{2q}D_x^{2p}u(x,\xi)+g_2 D_\gamma^{2r}D_\delta^{2q}u(x,\xi)=D_\gamma^{2r}D_\delta^{2q}v(x,\xi)\,. \tag{31}$$

Из равенства (31) и оценки $\|D_\gamma^{2r}D_\delta^{2q}u(x,\xi)\|\le\varepsilon_0\langle u(x,\xi)\rangle$ (см. (11) в работе [4]) выводим

$$\|D_\gamma^{2r}D_\delta^{2q}D_x^{2p}u(x,\xi)\|\le c\left(\|D_\gamma^{2r}D_\delta^{2q}v(x,\xi)\|+\|D_\gamma^{2r}D_\delta^{2q}u(x,\xi)\|\right)\le c\|D_\gamma^{2r}D_\delta^{2q}v(x,\xi)\|+\varepsilon\langle u(x,\xi)\rangle\,. \tag{32}$$

Функция $v(x,\xi)$ является решением уравнения (11), поэтому

$$h_1 D_\gamma^{2r}D_\delta^{2q}v(x,\xi)+h_2 D_\gamma^{2r}v(x,\xi)=D_\gamma^{2r}w(x,\xi)\,. \tag{33}$$

Далее на основании леммы 4 работы [3] в (33) переставим операторы $D_\gamma^{2r}, D_\delta^{2q}$ и рассмотрим уравнение с зафиксированными в нуле коэффициентами

$$h_1 D_\delta^{2q}D_\gamma^{2r}v(x,\xi)+h_2 D_\gamma^{2r}v(x,\xi)=D_\gamma^{2r}w(x,\xi)\,. \tag{34}$$

Умножая (34) скалярно на $D_\gamma^{2r}v(x,\xi)$, также как и при доказательстве леммы 1 работы [3] получим

$$\|D_\gamma^{2r}v(x,\xi)\|\le c\|D_\gamma^{2r}w(x,\xi)\|,\quad D_\delta^{2r}w(x,\xi)\in L_2(0,d). \tag{35}$$

Поскольку уравнение (34) является уравнением с мало изменяющимися коэффициентами по отношению к уравнению (33), то для решения уравнения (33) также справедлива оценка (35), которая вместе с (33) приводит к неравенству

$$\|D_\gamma^{2r}D_\delta^{2r}v(x,\xi)\|\le c\left(\|w(x,\xi)\|+\|D_\gamma^{2r}w(x,\xi)\|\right)<\infty. \tag{36}$$

Оценим, наконец, $\|D_\gamma^{2r}D_x^{2l}u(x,\xi)\|$. Применяя к (12) оператор D_γ^{2r}, получим

$$g_1 D_\gamma^{2r}D_\delta^{2q}D_x^{l}u(x,\xi)+g_2 D_\gamma^{2r}D_\delta^{2q}u(x,\xi)=D_\gamma^{2r}v(x,\xi)\,, \tag{37}$$

и используя представление (см. формулу (13) в [4])

$$D_\gamma^{2r}D_x^{2l}u(x,\xi)=D_\beta^{2p}u(x,\xi)+\sum_{k=0}^{2p-1}\omega_k(x)D_\beta^k u(x,\xi)+\sum_{j=0}^{2r-1}\tilde\rho_j(x)D_\gamma^j D_x^{2l}u(x,\xi)\,,$$

где $\tilde\rho_j(x)$ и $\omega_k(x)$ некоторые функции, такие что $\tilde\rho_j(0)=0,\ j=0,\ldots,2r-1$ и $\omega_k(0)=0,\ k=0,\ldots,2p-1$, уравнение (37) запишем в виде

$$g_1 D_\beta^{2p}u(x,\xi)+g_2 D_\gamma^{2r}u(x,\xi)=D_\gamma^{2r}v(x,\xi)-g_1\sum_{k=0}^{2p-1}\omega_k(x)D_\beta^k u(x,\xi)-g_1\sum_{j=0}^{2r-1}\tilde\rho_j(x)D_\gamma^j D_x^{2l}u(x,\xi)\,. \tag{38}$$

Поскольку $\gamma(x)=\beta(x)\cdot\beta^{l/(p-l)}(x)$ и $r=p-l<p$, то в силу (38) справедлива оценка

$$\|D_\beta^{2p}u(x,\xi)\|\le\varepsilon\left(\|D_\beta^{2p}u(x,\xi)\|+\|u(x,\xi)\|\right)+\|D_\gamma^{2\kappa}u(x,\xi)\|\,,$$

а, следовательно, и оценка

$$\|D_\gamma^{2r}u(x,\xi)\|\le c\left(\|D_\beta^{2r}v(x,\xi)\|+\|u(x,\xi)\|\right)+\varepsilon\langle u(x,\xi)\rangle\,. \tag{39}$$

Из уравнения (37) следует

$$\|D_\gamma^{2r}D_x^{2l}u(x,\xi)\|\le c_1\left(\|D_\gamma^{2r}v(x,\xi)\|+\|u(x,\xi)\|\right)+\varepsilon\langle u(x,\xi)\rangle\,. \tag{40}$$

Выбирая $\varepsilon>0$ достаточно малым, из (30), (32), (36), (40) окончательно выводим

$$\langle u(x,\xi)\rangle\le c_2\left(\|D_\gamma^{2r}w(x,\xi)\|+\|w(x,\xi)\|+\|u(x,\xi)\|\right)<\infty\,.$$

Таким образом, найденное решение $u(x,\xi)$ при $\xi\le\lambda_0$ принадлежит пространству с конечной нормой $\langle u(x,\xi)\rangle$. Следовательно, в силу установленного в теореме работы [3] неравенства (28), для решения $u(x,\xi)$ задачи (7) – (9), которая в силу теоремы работы [4] является задачей с мало изменяющимися коэффициентами по отношению к задаче (4) – (6), выполнена оценка (28). Теорема 3 доказана.

Сформулируем, наконец, основную теорему настоящей работы.

Теорема 4. Пусть выполнены условия 1 – 5. Тогда найдется такое число $d_0 > 0$, что при любых $F(x,y) \in L_2(D)$ и $d \le d_0$ существует единственное решение $U(x,y) \in H^{2m,2p,2l}_{\alpha,\beta}(D)$ задачи (1) – (3), причём справедлива оценка

$$\|U(x,y)\|^2 \le c \iint_D |F(x,y)|^2 \, dxdy$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от $U(x,y)$ и $F(x,y)$.

Доказательство основной теоремы вытекает из следующих трёх замечаний:

1) задача (4) – (6) является задачей с мало изменяющимися коэффициентами по отношению к задаче (7) – (9), следовательно, для неё справедливо утверждение аналогичное теореме 4;

2) из установленной в теореме 1 работы [3] оценки и только что сделанного замечания 1) следует однозначная разрешимость задачи (4) – (6) при любых $\xi \in R_n$;

3) если $u(x,\xi)$ – единственное решение задачи (4) – (6), то $U(x,y) = F^{-1}_{\xi\to y}[u(x,\xi)]$ – единственное решение задачи (1) – (3).

Пример. Пусть в задаче (1) – (3) выбраны следующие значения параметров:

$d=1$, $m=3$, $p=2$, $l=1$, $\alpha(x)=x^3$, $\beta(x)=x^2$, $a_1=a_2=a_3=b_1=b_2=b_3=d_1=d_2=d_3=1$.

В этом случае справедливость условий 1 – 4 легко проверяется, и мы остановимся подробно на проверке условия 5. При сделанных предположениях будем иметь:

$$\delta(x)=\gamma(x)=x^6,\ M_{2r}(\eta)=M_{2q}(\eta)=\eta^2+1,\ M_{2l}(\eta,0)=\eta^2+3.$$

Вычислим далее числа $\varphi_{jk}(0),\ 0\le j\le 3,\ 1\le k\le 4$. По формуле (20) найдем $\varphi_{01}(0)$. Имеем

$$\varphi_{01}(0)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\eta^2+3}\int_0^1\frac{\exp(-is\eta)}{s^3}S\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(i\tau t)}{\tau^2+1}\int_0^{\infty}e^{-i\tau y}\left(\int_{\gamma_1}\frac{1}{\lambda-i}\exp\left(\frac{i\lambda(1-x^5)}{5x^5}\right)d\lambda\right)\Bigg|_{x=(5y+1)^{-1/5}}d\tau dy\Bigg|_{t=\frac{1-s^5}{5s^5}}dsd\eta=$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\eta^2+3}\int_0^1\frac{\exp(-is\eta)}{s^3}S\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(i\tau t)}{\tau^2+1}\int_0^{\infty}2\pi i e^{-i\tau y-y}d\tau dy\Bigg|_{t=\frac{1-s^5}{5s^5}}dsd\eta=$$

$$=\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\eta^2+3}\int_0^1\frac{\exp(-is\eta)}{s^3}S\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(i\tau t)}{\tau^2+1}\frac{1}{1+i\tau}d\tau\Bigg|_{t=\frac{1-s^5}{5s^5}}dsd\eta=$$

$$=\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\eta^2+3}\int_0^1\frac{\exp(-is\eta)}{s^3}\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{2(1-s^5)}{5s^5}\right)\exp\left(-\frac{1-s^5}{5s^5}\right)dsd\eta=\frac{\pi i}{4\sqrt3}\int_0^1\exp\left(\frac{s^5-1}{5s^5}-s\sqrt3\right)\cdot\left(\frac{2+3s^5}{5s^8}\right)ds=\frac{\pi i}{4\sqrt3}J_{01}.$$

Аналогично по формуле (20) с заменой $(i\eta)^j$ на $(i\eta)^{j-1}e^{i\eta}$, $j=1,2$ находятся $\varphi_{11}(0), \varphi_{21}(0)$:

$$\varphi_{11}(0)=\frac{\pi i}{4\sqrt3}\int_0^1\exp\left(\frac{s^5-1}{5s^5}-(s-1)\sqrt3\right)\cdot\left(\frac{2+3s^5}{5s^8}\right)ds=\frac{\pi i}{4\sqrt3}J_{11},\ \varphi_{21}(0)=-\frac{\pi i}{4}\int_0^1\exp\left(\frac{s^5-1}{5s^5}\right)\cdot\left(\frac{2+3s^5}{5s^8}\right)ds=-\frac{\pi i}{4}J_{11}.$$

Число $\varphi_{31}(0)$ найдем из равенства (24). Получим

$$\varphi_{31}(0)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\tau^2+1}\int_0^{\infty}e^{-i\tau y}\left(\int_{\gamma_1}\frac{1}{\lambda-i}\exp\left(\frac{i\lambda(1-x^5)}{5x^5}\right)d\lambda\right)\Bigg|_{x=(5y+1)^{-1/5}}d\tau dy=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\tau^2+1}\cdot\frac{2\pi i}{1+i\tau}d\tau=\pi^2 i.$$

Далее формула (21) дает нам $\varphi_{02}(0)$:

$$\varphi_{02}(0)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\eta^2+3}\int_0^1 s^{-3}e^{-is\eta}\left(\int_{\gamma_2}\frac{1}{\lambda-i}\exp\left(\frac{i\lambda(1-x^5)}{5x^5}\right)d\lambda\right)dsd\eta=$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\eta^2+3}\int_0^1 s^{-3}e^{-is\eta}2\pi i\exp\left(\frac{s^5-1}{5s^5}\right)dsd\eta=\frac{i}{2\sqrt{3}}\int_0^1 s^{-3}\exp\left(\frac{s^5-1}{5s^5}-s\sqrt{3}\right)ds=\frac{i}{2\sqrt{3}}J_{02}.$$

Аналогично находятся $\varphi_{12}(0),\varphi_{22}(0)$:

$$\varphi_{12}(0)=\frac{i}{2\sqrt{3}}\int_0^1 s^{-3}\exp\left(\frac{s^5-1}{5s^5}+(s-1)\sqrt{3}\right)ds=\frac{i}{2\sqrt{3}}J_{12},\qquad \varphi_{22}(0)=-\frac{i}{2}J_{12}.$$

Число $\varphi_{32}(0)$ найдем из равенства (24). Имеем $\varphi_{32}(0)=\int_{\gamma_2}\frac{d\lambda}{\lambda-i}=2\pi i$.

Прежде чем определять числа $\varphi_{jk}(0),\ 0\le j\le 3,\ k=3,4$, найдем линейно независимые решения уравнения $M_{2l}(D_x,0)u(x,0)=0\Leftrightarrow D_x^2u(x,0)+3u(x,0)=0$. Очевидно, $u_1(x,0)=e^{x\sqrt{3}},\ u_2(x,0)=e^{-x\sqrt{3}}$, поэтому

$$\varphi_{03}(0)=u_1(0,0)=1,\quad \varphi_{13}(0)=u_1(1,0)=e^{\sqrt{3}},\quad \varphi_{23}(0)=\partial_x u_1(1,0)=\sqrt{3}e^{\sqrt{3}},\quad \varphi_{33}(0)=\partial_x^2u_1(1,0)=3e^{\sqrt{3}},$$

$$\varphi_{04}(0)=u_2(0,0)=1,\quad \varphi_{14}(0)=u_2(1,0)=e^{-\sqrt{3}},\quad \varphi_{24}(0)=\partial_x u_2(1,0)=-\sqrt{3}e^{-\sqrt{3}},\quad \varphi_{34}(0)=\partial_x^2u_2(1,0)=3e^{-\sqrt{3}}.$$

Теперь составим определитель из условия 5 и вычислим его. Получим

$$\det_{\substack{0\le j\le 3\\1\le k\le 4}}\left(\varphi_{jk}(0)\right)=\begin{vmatrix}\frac{\pi i}{4\sqrt{3}}J_{01} & \frac{i}{2\sqrt{3}}J_{02} & 1 & 1\\ \frac{\pi i}{4\sqrt{3}}J_{11} & \frac{i}{2\sqrt{3}}J_{12} & e^{\sqrt{3}} & e^{-\sqrt{3}}\\ -\frac{\pi i}{4}J_{11} & -\frac{i}{2}J_{12} & \sqrt{3}e^{\sqrt{3}} & -\sqrt{3}e^{-\sqrt{3}}\\ i\pi^2 & 2\pi i & 3e^{\sqrt{3}} & 3e^{-\sqrt{3}}\end{vmatrix}=-\pi\begin{vmatrix}\frac{1}{4\sqrt{3}}J_{01} & \frac{1}{2\sqrt{3}}J_{02} & e^{-\sqrt{3}} & e^{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{4\sqrt{3}}J_{11} & \frac{1}{2\sqrt{3}}J_{12} & 1 & 1\\ -\frac{1}{4}J_{11} & -\frac{1}{2}J_{12} & \sqrt{3} & -\sqrt{3}\\ \pi & 2\pi & 3 & 3\end{vmatrix}=$$

$$=-\pi\begin{vmatrix}\frac{1}{4\sqrt{3}}J_{01} & \frac{1}{2\sqrt{3}}J_{02} & e^{-\sqrt{3}} & e^{\sqrt{3}}\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ -\frac{1}{4}J_{11} & -\frac{1}{2}J_{12} & \sqrt{3} & -\sqrt{3}\\ \pi & 2\pi & 3 & 3\end{vmatrix}=2\pi\begin{vmatrix}\frac{1}{4\sqrt{3}}J_{01} & \frac{1}{2\sqrt{3}}J_{02} & e^{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{4}J_{11} & -\frac{1}{2}J_{12} & -\sqrt{3}\\ \pi & 2\pi & 3\end{vmatrix}=2\pi\begin{vmatrix}\frac{1}{4\sqrt{3}}J_{01} & \frac{1}{2\sqrt{3}}(J_{02}-J_{01}) & e^{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{4}J_{11} & \frac{1}{2}(J_{11}-J_{12}) & -\sqrt{3}\\ \pi & 0 & 3\end{vmatrix}=$$

$$=2\pi\begin{vmatrix}\frac{1}{4\sqrt{3}}J_{01}-\frac{\pi e^{\sqrt{3}}}{3} & \frac{1}{2\sqrt{3}}(J_{02}-J_{01}) & e^{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{4}J_{11}+\frac{\pi}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2}(J_{11}-J_{12}) & -\sqrt{3}\\ 0 & 0 & 3\end{vmatrix}=6\pi\begin{vmatrix}\frac{1}{4\sqrt{3}}J_{01}-\frac{\pi e^{\sqrt{3}}}{3} & \frac{1}{2\sqrt{3}}(J_{02}-J_{01})\\ -\frac{1}{4}J_{11}+\frac{\pi}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2}(J_{11}-J_{12})\end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{\pi e^{\sqrt{3}}}{4}\begin{vmatrix}J_{02}-J_{01} & 4\pi-\sqrt{3}e^{-\sqrt{3}}J_{01}\\ J_{12}-J_{11} & (4\pi-\sqrt{3}J_{11})e^{-\sqrt{3}}\end{vmatrix}\approx\frac{\pi e^{\sqrt{3}}}{4}\begin{vmatrix}-0{,}009 & 12{,}563\\ -0{,}024 & 2{,}189\end{vmatrix}>1.$$

Отметим при этом, что полученные при нахождении чисел $\varphi_{jk}(0)$ интегралы $J_{01},J_{02},J_{11},J_{12}$ вычислены приближенно с необходимой точностью.

Таким образом, условие 5 также выполнено, и к рассматриваемой в этом примере граничной задаче применима теорема 4.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 16-01-00197.

Список литературы
References

1. Глушак А.В. Априорная оценка решения задачи Дирихле для дифференциального уравнения высокого порядка с двумя вырождающимися эллиптическими операторами. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика. 2017. № 20 (269). Выпуск 48. С. 50–57.

Glushak A.V. A priori estimate of the solution of the Dirichlet problem for a differential equation of high order with two degenerate elliptic operators. Belgorod State University Scientific Bulletin Mathem.&Physics. 2017. № 20 (269), issue 48. Pp. 50–57.

2. Глушак А.В. Разрешимость задачи Дирихле для дифференциального уравнения высокого порядка с двумя вырождающимися эллиптическими операторами. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика. 2017. № 27 (276). Вып. 49. С. 5–14.

Glushak A.V. Solvability of the solution of the Dirichlet problem for a differential equation of high order with two degenerate elliptic operators. Belgorod State University Scientific Bulletin Mathem.&Physics. 2017. № 27 (276), issue 48. Pp. 5–14.

3. Глушак А.В. Априорная оценка решения задачи Дирихле для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка, содержащего различные весовые функции. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика. 2018. Т. 50. № 1. С. 14–20.

Glushak A.V. Apriori estimate of the solution of the Dirichlet problem for one class of high order degenerating elliptic equation containing various weight functions. Belgorod State University Scientific Bulletin Mathem.&Physics. 2018. V. 50, № 1. Pp. 14–20.

4. Глушак А.В. Представление суммы регулярного эллиптического оператора и вырождающихся эллиптических операторов высокого порядка в виде композиции. Математика. Физика. 2018. № 2. С. 111–120.

Glushak A.V. Presentation of the sum of regular elliptic operator and degenerate elliptic operators of higher order as a composition. Belgorod State University Scientific Bulletin Mathem.&Physics. 2018. № 2. P. 111–120.

5. Агранович М.С., Вишик М.И. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида. УМН. 1964. XIX, вып. 3. С. 53–161.

Agranovich M.S., Vishik M.I. Elliptic problems with a parameter and parabolic problems of general form. UMN. 1964. XIX, issue 3. Pp. 53-161.

6. Олейник О.А., Радкевич Е.В. Уравнения с неотрицательной характеристической формой. МГУ. Москва. 2010.

Oleinic O.A., Radkevich E.V. Equations wits nonnegative characteristic form. Moscow State University. Moscow. 2010.

7. Архипов В.П. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с вырождающимся коэффициентом при старшей производной. Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 10. С. 1383–1393.

Arkhipov V.P. Linear Second-Order Differential Equations with Degenerating Coefficient of the Second Derivative. Differential Equations. 2011. V. 47. № 10. Pp. 1383–1393.

8. Архипов В.П., Глушак А.В. Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений второго порядка около точки вырождения. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика. 2013. № 5 (148). Выпуск 30.

Arhipov V.P., Glushak A.V. Asymptotic Representations of Solutions the Second-Order Differential Equation near the Degenerating Point. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathem. Physics. 2013. № 5(148). Iss. 30.

9. Архипов В.П. Асимптотические представления решений вырождающихся эллиптических уравнений. Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. 2016. № 1. С. 50–65.

Arhipov V.P. Asymptotic representations of solutions of degenerate elliptic equations. Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics. 2014. № 1. Pp. 50–65.

10. Архипов В.П., Глушак А.В. Вырождающиеся дифференциальные уравнения второго порядка. Асимптотические представления решений. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика. 2016. № 20 (241). Выпуск 44. С. 5–22.

Arhipov V.P., Glushak A.V. Degenerating Second-Order Differential Equations. Asymptotic Representations of Solutions. Belgorod State University Scientific Bulletin Mathem.&Physics. 2016. № 20 (241), issue 44. Pp. 5–22.

11. Архипов В.П., Глушак А.В. Вырождающиеся дифференциальные уравнения второго порядка. Асимптотические представления спектра. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика. 2016. № 27 (248). Выпуск 45. С. 45–59.

Arhipov V.P., Glushak A.V. Degenerating Second-Order Differential Equations. Asymptotic Representations of Spectrum. Belgorod State University Scientific Bulletin Mathem.&Physics. 2016. № 27 (248), issue 45. Pp. 45–59.

12. Глушко В.П., Савченко Ю.Б. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка: пространства, операторы, граничные задачи. Итоги науки и техники. Сер. Мат. анал. 1985. Т. 23. С. 125–218.

Glushko V.P., Savchenko Yu.B. Higher-order degenerate elliptic equations: Spaces, operators, boundary-value problems. Mathematical analysis. Itogi Nauki i Tekhniki. Moscow. 1985. V. 23. Pp. 125–218.

13. Глушко В.П., Львин С.Я. О некоторых свойствах одного класса весовых пространств С.Л. Соболева. В сб. «Дифференциальные и интегральные уравнения», вып. 1. Нальчик. 1977. С. 52–57.

Glushko V.P., L’vin S.Ya. On some properties of a class of weighted Sobolev spaces. In the collection "Differential and Integral Equations", issue 1. Nalchik. 1977. Pp. 52–57.

14. Freeman R.S., Schechter M. On the existence, uniqueness and regularity of solutions to general elliptic boundary value problems. J. different. equat. 1974, issue 15. Pp. 213–246.

15. Глушко В.П. Априорные оценки решений краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка. Деп. ВИНИТИ № 1049-79 Деп. – 47.

Glushko V.P. A priori estimates of solutions of boundary value problems for a class of degenerate elliptic equations of high order. Dep. VINITI № 1049-79 Dep. – 47.