УДК 511.3
DOI 10.18413/2075-4639-2018-50-4-419-423

ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОЦЕНКИ ДЛЯ СУММ ДРОБНЫХ ДОЛЕЙ

ELEMENTARY PROOF OF THE ESTIMATION OF THE SUM OF FRACTIONAL PARTS

А.В. Шутов
A.V. Shutov

Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича
и Николая Григорьевича Столетовых
600000, г. Владимир, ул. Горького, 87

Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs
87, Gorkiy street, Vladimir, 600000, Russian Federation

Email: a1981@mail.ru

Аннотация

Пусть α – иррациональное число, $\{q_n\}$ – последовательность неполных частных, возникающих при разложении α в цепную дробь, $\{\frac{P_n}{Q_n}\}$ – последовательность подходящих дробей к α. Рассмотрим величину $C_n(\alpha,\gamma)=\sum_{i=0}^{n-1}(\{i\alpha\}-\frac{1}{2})$. Оценки для $C_n(\alpha,\gamma)$ важны как сами по себе, так и в связи с их приложениями в целом ряде теоретико-числовых задач, в первую очередь при изучении остаточного члена проблемы распределения дробных долей линейной функции и в теоретико-числовых методах приближенного интегрирования. Наилучшая из существующих оценок для $C_n(\alpha,\gamma)$ имеет вид $|C_n(\alpha,\gamma)|\le C\sum_{i=1}^{k}q_i$ для $1\le i\le Q_k$. В настоящей работе мы представляем новое короткое доказательство данной оценки.

Abstract

Let α be an irrational number. Denote by $\{q_n\}$ a sequence of partial quotients of the continued fraction expansion of α and by $\{\frac{P_n}{Q_n}\}$ a sequence of partial convergents to α. Assume that $C_n(\alpha,\gamma)=\sum_{i=0}^{n-1}(\{i\alpha\}-\frac{1}{2})$. Estimates for $C_n(\alpha,\gamma)$ are important both by themselves and in connection with their applications in a some number-theoretic problems, such that studying the remainder term of the distribution of the fractional parts of a linear function and in number-theoretic methods of approximate integration. The best known estimate of $C_n(\alpha,\gamma)$ is $|C_n(\alpha,\gamma)|\le C\sum_{i=1}^{k}q_i$ for $1\le i\le Q_k$. In this paper, we give a new short proof of this result.

Ключевые слова: суммы дробных долей, равномерное распределение, цепные дроби.
Keywords: sums of fractional parts, uniform distribution, continued fractions.

Введение

Пусть α – иррациональное число, $\{q_n\}$ – последовательность неполных частных, возникающих при разложении α в цепную дробь, $\{\frac{P_n}{Q_n}\}$ – последовательность подходящих дробей к α. Из теоремы Вейля о равномерном распределении [1] вытекает, что для суммы дробных долей $\sum_{i=1}^{n}\{i\alpha\}$ имеет место асимптотическая формула

$$\sum_{i=0}^{n-1}\{i\alpha\} = \frac{n}{2} + o(n). \quad (1)$$

Для изучения остаточного члена асимптотической формулы (1) рассмотрим величину $C_n(\alpha,\gamma) = \sum_{i=0}^{n-1}(\{i\alpha\} - \frac{1}{2})$. Данная величина изучалась в частности в работах [2]–[11]. Интерес к ней обусловлен в первую очередь ее теоретико-числовыми приложениями: распределение дробных долей линейной функции [3, 6, 10], теоретико-числовыми методами приближенного анализа [9], диофантовыми приближениями [2], подсчетом целых точек в областях [11] и т. д.

Наилучшая на данный момент оценка величины $C_n(\alpha,\gamma)$ была получена в работе [6].

ТЕОРЕМА 1. При $1 \le n \le Q_k$ имеет место неравенство

$$|C_n(\alpha,\gamma)| \le C\sum_{i=1}^{k} q_i$$

с некоторой постоянной C, не зависящей от n, α, γ.

Доказательство теоремы 1 в работе [6] очень сложно и основано на получении крайне громоздкой явной формулы для $C_n(\alpha,\gamma)$. Нами предлагается новое, существенно более простое и короткое доказательство данной теоремы. В его основе лежит следующее утверждение, представляющее, на наш взгляд, и самостоятельный интерес.

ТЕОРЕМА 2. Имеет место неравенство

$$|C_{Q_k}(\alpha,\gamma)| \le \frac{3}{2} + \frac{1}{2q_{k+1}}.$$

Доказательство теоремы 2

В начале временно откажемся от требования иррациональности α и рассмотрим случай $\alpha = \frac{p}{q}$ с целыми взаимно простыми p, q. В этом случае $C_q(\alpha,\gamma)$ периодична по γ с периодом $\frac{1}{q}$.

Действительно,

$$C_q(\frac{p}{q},\gamma+\frac{1}{q})=\sum_{i=0}^{q-1}(\{\frac{ip}{q}+\gamma+\frac{1}{q}\}-\frac{1}{2})=\sum_{i=0}^{q-1}(\{\frac{(i+1)p}{q}+\gamma\}-\frac{1}{2})=$$

$$=\sum_{i=1}^{q}(\{\frac{ip}{q}+\gamma\}-\frac{1}{2})=\sum_{i=0}^{q-1}(\{\frac{ip}{q}+\gamma\}-\frac{1}{2})=C_q(\frac{p}{q},\gamma).$$

Для любого γ существует единственное $\gamma_q\in[0;\frac{1}{q})$ такое, что $\gamma_q-\gamma=\frac{m}{q}$ для некоторого целого m. При этом из периодичности $C_q(\frac{p}{q},\gamma)$ вытекает, что $C_q(\frac{p}{q},\gamma)=C_q(\frac{p}{q},\gamma_q)$. Далее заметим, что когда i пробегает диапазон от 0 до $q-1$, $ip\bmod q$ пробегает тот же самой диапазон. Отсюда имеем $C_q(\frac{p}{q},\gamma)=C_q(\frac{1}{q},\gamma_q)$.

Заметим, что при $0\le i<q$ $\{\frac{i}{q}+\gamma_q\}=\frac{i}{q}+\gamma_q$. В итоге имеем

$$C_q(\frac{p}{q},\gamma)=C_q(\frac{1}{q},\gamma_q)=\sum_{i=0}^{q-1}(\{\frac{i}{q}+\gamma_q\}-\frac{1}{2})=$$

$$=\frac{1}{q}\sum_{i=0}^{q-1}i+q\gamma_q-\frac{q}{2}=q\gamma_q-\frac{1}{2}.$$

Учитывая, что $\gamma_q\in[0;\frac{1}{q})$ имеем

$$|C_q(\frac{p}{q},\gamma)|\le\frac{1}{2}. \qquad (2)$$

Пусть теперь α – иррациональное число Сравним $C_{Q_k}(\alpha,\gamma)$ и $C_{Q_k}(\frac{P_k}{Q_k},\gamma)$.

Из хорошо известного неравенства $|\alpha-\frac{P_k}{Q_k}|<\frac{1}{Q_kQ_{k+1}}$ вытекает что при $0\le i<Q_k$ $|i\alpha-\frac{iP_k}{Q_k}|<\frac{1}{Q_{k+1}}<\frac{1}{Q_k}$. При этом из геометрических соображений можно заметить, что $\{i\alpha+\gamma\}-\{\frac{iP_k}{Q_k}+\gamma\}=(i\alpha+\gamma)-(\frac{iP_k}{Q_k}+\gamma)=i(\alpha-\frac{P_k}{Q_k})$ для всех i таких что $0\le i<Q_k$, кроме, возможно, одного исключительного значения i, для которого $\{i\alpha+\gamma\}-\{\frac{iP_k}{Q_k}+\gamma\}=i(\alpha-\frac{P_k}{Q_k})+1$ либо $\{i\alpha+\gamma\}-\{\frac{iP_k}{Q_k}+\gamma\}=i(\alpha-\frac{P_k}{Q_k})-1$. В итоге имеем,

$$|C_{Q_k}(\alpha,\gamma)-C_{Q_k}(\frac{P_k}{Q_k},\gamma)|=|\sum_{i=0}^{Q_k-1}(\{i\alpha+\gamma\}-\{\frac{iP_k}{Q_k}+\gamma\})|\le$$

$$\le 1+\sum_{i=0}^{Q_k-1}|i(\alpha-\frac{P_k}{Q_k})|<1+\frac{1}{Q_kQ_{k+1}}\sum_{i=0}^{Q_k-1}i=1+\frac{Q_k-1}{2Q_{k+1}}<1+\frac{2}{q_{k+1}}.$$

Объединяя данное неравенство с (2), получаем требуемый результат.

Доказательство теоремы 1.

Вначале заметим, что утверждение теоремы 2 может быть ослаблено до

$$|C_{Q_k}(\alpha,\gamma)|\le 2. \tag{3}$$

Хорошо известно, что любое натуральное n единственным образом может быть представлено в виде

$$n=\sum_{k,Q_k\le n} z_kQ_k \tag{4}$$

где $z_1\le q_1-1$, $z_k\le q_k$ и из $z_k=q_k$ следует, что $z_{k-1}=0$ [5].

Далее заметим, что

$$C_{m+n}(\alpha,\gamma)=\sum_{i=0}^{m+n-1}(\{i\alpha+\gamma\}-\frac{1}{2})=\sum_{i=0}^{m-1}(\{i\alpha+\gamma\}-\frac{1}{2})+\sum_{i=0}^{n-1}(\{i\alpha+\gamma+m\alpha\}-\frac{1}{2})=$$

$$=C_m(\alpha,\gamma)+C_n(\alpha,\gamma+m\alpha).$$

Обозначая $C_n^*(\alpha)=\sup_\gamma|C_n(\alpha,\gamma)|$ имеем

$$C_{m+n}^*(\alpha)\le C_m^*(\alpha)+C_n^*(\alpha).$$

С учетом (4) получаем, что

$$C_n(\alpha,\gamma)\le\sum_{k,Q_k\le n}z_kC_{Q_k}^*\le\sum_{k,Q_k\le n}q_kC_{Q_k}^*.$$

Применяя (3), получаем результат теоремы 1 с $C=2$.

Список литературы
References

1. Weyl H. 1910. Uber die Gibbs'sche Erscheinung und verwandte Konvergenzphanomen. , Rendiconti del Circolo Mathematico di Palermo. 30 377–407.

2. Хинчин А.Я. 2006. Избранные труды по теории чисел. М.:МЦНМО.
Khintchin A.Ya. Collected works in number theory. MCCME, Moscow. (In Russian).

3. Bonanno C., Isola S. 2009. A renormalization approach to irrational rotations. Annali di Matematica Pura ed Applicata. 188:247.

4. Brown T.C., Shue P.J. 1995. Sums of fractional parts of integer multiplies of an irrational. J. Number Theory. 50: 181–192.

5. Ostrowski A. 1922. Bermerkungen zur theorie der diophantischen approximationen . Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1: 77–98.

6. Pinner C.G. 1997. On Sums of Fractional Parts $n\alpha+\gamma$. J. Number Theory. 65: 48–73.

7. Шутов А.В. 2006. О суммах дробных долей. Чебышевский сборник. 7(1):278–285.
Shutov A.V. On the sums of the fractional parts. Cheb. Sbornik. 7(1): 278–285 (In Russian).

8. Колпакова О.В., Чубариков В.Н. 2016. Линейные суммы и гауссова теорема умножения. Чебышевский сборник. 17(1): 130–139.

Kolpakova O.V., Chubarikov V.N. 2016. Linear sums and the Gaussian multiplication theorem. Cheb. Sbornik. 17(1): 130–139. (in Russian).

9. Добровольская В.Н. 2004. Неполные суммы дробных долей. Чебышевский сборник. 5: 42–48.

Dobrovolskaya V.N. 2004. Incomplete sums of the fractional parts. Cheb. Sbornik. 5: 42–48. (In Russian).

10. Rocadas L., Schoißengeier J. 2011. On the local discrepancy of(nα)-sequences. J. Number Theory . 131(8): 1492–1497.

11. Hardy G.H., Littlewood J.E. 1922. Some problems of diophantine approximation; the lattice points of a right-angled triangle. Proc. London Math. Soc. 20: 15–36.