УДК 519.21 + 537.86
DOI: 10.18413/2075-4639-2018-50-2-215-220

СТАТИСТИЧЕСКИЙ ПОДХОД ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПРЕДЕЛА ТЕКУЧЕСТИ ТВЕРДОТЕЛЬНЫХ ПОРИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ

STATISTICAL APPROACH AT DETERMINING OFTHE YIELD STRESSOF SOLID POROUS MATERIALS

Али Абдуламир Тавфик Аль Ани
Ali Abdulameer Tawfeeq Al-Ani

Аль мустансерия университет,
ул.Фельстин, г. Богдад, Ирак

Al mustanseriya university,
Felstin St., city of Baghdad, Iraq.

E-mail: Ali_Abdulameer@mail.ru

Аннотация
Предлагается вероятностно-феноменологическая модель для вероятностного прогнозирования зарождения трещины в образце хрупкого твердотельного материала, которая приводит бифуркационным образом к разрушению (разрыву) образца.

Abstract
A probabilistic phenomenological model for the prediction of the crack generation in the brittle solid sample is proposed. It describes the sample destruction by thebifurcation way.

Ключевые слова: предел прочности, хрупкое разрушение, случайные размещения пор, концентрация, независимые случайные величины.
Keywords: strength limit, brittle fracture, random porous distribution, concentration, independent random variables.

Введение

Настоящая работа посвящена конструированию вероятностно-феноменологической модели для описания равновесного состояния образца хрупкого твердотельного материала, находящегося под внешней растягивающей его нагрузкой. По нашему замыслу эта модель предназначена для установления связи между характеристиками состояния самой среды и той величиной нагрузки, которая может привести к разрушению образца, под которым понимается его разрыв. Построение модели основано на предположении о том, что к разрыву образца, который может произойти катастрофическим образом в течение очень короткого промежутка времени, приводит лавинное разростание под воздействием нагрузки какой-либо из микротрещин, длина которой превосходит некоторую критическую величину.

В свою очередь, возникновение такой достаточно большой трещины мы связываем с наличием в образце хрупкого материала точечных дефектов в виде пор очень малого размера. Эти поры всегда присутствуют в образце с той или иной средней концентрацией c, которая зависит как от физической природы материала, так и от технологии приготовления образца. В нашей модели величина c является свободным феноменологическим параметром. Так как поры распределены в образце случайным образом, и, с точки зрения технологии приготовления, можно управлять только лишь их концентрацией, усредненной по пространственным областям Δ с макроскопическими линейными размерами в образце, то неизбежно в каждой такой области имеются флуктуации концентрации. Тогда ясно, что при наличии достаточно большой концентрации пор в какой-либо из пространственных областей Δ, может произойти слияние всех пор, находящихся в ней, под действием растягивающих напряжений, присутствующих в области Δ вследствие растягивающей нагрузки, прикладываемой к границе образца. При таком слиянии пор образуется микротрещина, и, при достаточно большой величине линейного размера области Δ, длина самой микротрещины может превзойти ту критическую величину, о которой речь шла выше. В результате возникает процесс быстрого роста рассматриваемой трещины в хрупком материале, находящемся под внешней нагрузкой, то есть образуется макротрещина, и, наконец, когда линейный размер макротрещины достигает величины, сравнимой с линейным размером самого образца, происходит его разрыв. Критическому размеру микротрещины соответствует критическая величина флуктуации концентрации. Ясно, однако, что критический размер микротрещины и, как следствие, критическая величина флуктуации концентрации пор зависят от величины внешней одноосной нагрузки. Если такая зависимость известна, то можно установить предел прочности материала – ту критическую величину внешней нагрузки, которая приводит к разрушению образца.

Таким образом, в принимаемом нами походе, предел прочности материала связывается с критической величиной флуктуации пор в материале. Конструируемая ниже модель позволяет установить эту связь.

Статистическая модель хрупкого разрушения

Будем предполагать, что поры случайным образом распределены по объему исследуемого образца. Размеры пор будем предполагать настолько малыми, что ими можно пренебречь по сравнениюсо средним расстоянием между ними. Таким образом, мы будем моделировать случайное расположение пор по образцу Ω посредством наборов случайно расположенных геометрических точек в области пространства, занимаемой образцом. При этом число n˜ точек в этих наборах будет случайными, точно также, расположение в Ω каждой точке из набора также является случайным, статистически независимым от расположений других точек из этого набора. Кроме того, естественно считать, что попадание каждой точки в любую малую область $\Delta\subset\Omega$ не имеет никакого предпочтения перед любой другой областью $\Delta' \subset\Omega$ с точно такой же формой и размерами. Иными словами, мы предполагаем, что распределение каждой фиксированной случайной точки из набора, описывающего расположение пор по образцу, является *равновозможным*, то есть она имеет плотность распределения $|\Omega|^{-1}$.

Из сделанных предположений следует, что условная плотность распределения набора из $\tilde{n}$ точек при условии, что $\tilde{n}$=n, равна $|\Omega|^{-\mathrm{n}}$ или, с учетом физической неразличимости точек набора: $(n!)^{-1}\,|\Omega|^{-\mathrm{n}}$. Будем теперь считать, что суммарный объем пор по образцу намного меньше объема |Ω| самого образца, и так как объем каждой поры очень мал, мало отношение полного числа N пор к объему Ω, то есть мала объемная концентрация c=N/|Ω |пор. Тогда можно считать, что типичное случайное число $\tilde{n}$ пор намного меньше, чем число c |Δ|. В этом случае мы можем использовать в качестве распределения вероятностей для случайного числа $\tilde{n}$ пор, попавших в Δ распределение Пуассона

$$\Pr\{\tilde{n}=n\}=\frac{(c|\Delta|)^n}{n!}\exp(-c|\Delta|)\ . \tag{1}$$

Зафиксируем малую кубическую область Δ с критическим размером, начиная с которого возможно разростание трещины. Для установления связи между критическим напряжением p∗ и концентрацией пор c, приводящей к росту трещины, воспользуемся следующим законом Гриффитса [4,5].

Пусть d– критическая (флуктуационная) длина трещины, начиная с которой начиняется ее развитие. Из теории Гиффитса роста трещины следует, что

$$d=d_0(\frac{k}{p})^{\alpha/2} \quad (2)$$

Где α>0 и k – т.н. постоянная Гриффитса. Такая форма зависимости d от p согласуется с представлением о том, что при p→ ∞ возможно развитие трещины со сколь угодно малых размеров d, а при p=0 трещиной формально можно считать разломы в образце, имеющие макроскопические размеры. Что касается практического использования формулы (2), то в теории хрупкого разрушения часто используется модель с α=4.

Для установления связи между p и c введем понятие критической концентрации $c\,*$. Пусть h равно характерному расстоянию между ионами металла, при превышении которого возникает явление текучести. Оно по порядку величины равно среднему расстоянию между молекулами в жидком состоянии.

Пусть, теперь, область Δ является кубической ячейкой с величиной ребер d, имеющей объем $v{*}{=}d^3$. Будем считать, что трещина под напряжением p, приложенным в направлении одного из ребер, зарождается в какой-то из ячеек, если в ней количество пор превышает определенную величину m∗. Эта величина рассчитывается из требования,чтобы в кубической области Δ все ионы находились на расстоянии, не меньшем чем h. Таким образом,

$$m* = v*/h^3 = (d/h)^3 \quad (3)$$

Следовательно, рост трещины начинается в том случае, если в образце хрупкого материала существует кубик Δ с длиной ребра dвозникаеттакая флуктуациячисла пор m, которая превосходит критическое значение m∗.

Таким образом, возникает задача об определении вероятности W случайного события, которое формулируется следующим образом:

Существует в образце Ω некоторая кубическая область Δ с размерами d такая, что случайное число точек m, попавших в эту область, превзойдет m∗.

Заметим, что вероятность W должна обладать свойством, что W→ 1 при N→ ∞ и c=const. Это свойство связано с тем, что вероятность разрушения образца должна возрастать при ближаясь к единичной вероятности при неограниченном возрастании его размеров, то есть образец должен наверняка быть разрушенным.

Ввиду этого свойства вероятности W, имеет место также W→ 1 при V=| Ω |→ ∞, ввиду того, что c= N/|Ω|. Учитывая последний факт и то обстоятельство, что объем V очень большой вместе с числом пор N, интерес представляет не точное значение вероятности W, а только лишь главный член асимптотики величины 1-W при V→ ∞.

Данная ситуация аналогична той, которая возникает при изучении термодинамических флуктуаций в статистической физике, когда переход к термодинамическому пределу приводит к полному исчезновению флуктуаций и, соответственно, их распределения вероятностей. Поэтому интерес представляет изучение именно асимптотических отклонений величин от термодинамически предельных значений.

Анализ статистической модели

Так как интересующая нас вероятность всегда не равна нулю, то необходимо установить критерий возникновения зародыша роста трещины, который бы формулировался в терминах какой-либо неслучайной величины, связанной с $\widetilde{m}$. В качестве такого критерия мы выберем среднее значение $\langle \max\{\tilde{m}(\mathbf{x});\ \mathbf{x} \in \Omega\}\rangle$, где $\tilde{m}(\mathbf{x})$ зависит от пространственной точки **x** области **Ω**, связанной с кубом Δ.

Например, будем считать, что такой характеристической пространственной точкой является центр куба. Тогда критерий образования зародыша трещины примем в виде

$$\langle \max\{\tilde{m}(\mathbf{x});\ \mathbf{x} \in \Omega\}\rangle = m* \quad (4)$$

Заметим, что здесь нельзя поменять местами операцию усреднения и вычисления максимума по точкам **x**-области **Ω**. В самом деле, для каждой точки $x \in \Omega$ определено среднее значение $\langle m*(\boldsymbol{x})\rangle$, случайного числа пор (случайных точек пуассановского случайного поля), попавших в куб Δ с центром в точке **x**. Это среднее значение равно $c|\Delta|=cd^3$, то есть оно не зависит от **x**. Следовательно, подставляя в эту формулу вместо d его выражение через напряжение p, получим $cd_0^3(k/p)^{3\alpha/2}$=m∗. Отсюда следует, что $p=k(cd_0^3/\,m*)^{2/3\alpha}$.

Таким образом получаем, что напряжение, вызывающее разрушение образца материала не зависит от его размеров, что противоречит так называемому *объемному эффекту,* который известен в материаловедении и состоит в том, что вероятность разрушения образца падает с ростом его размеров. Следовательно, наша задача заключается в аккуратном вычислении среднего значения (4).

Объемныйэффект

Определенная выше вероятность W равна $W=1-\overline{W}$, где $\overline{W}$– вероятность, что во всех ячейках образца случайное число $\tilde{m}$ пор не превосходит m∗. Так как, по предположению, при распределении пор по ячейкам случайное число $\tilde{m}$ попавших в конкретную ячейку пор не зависит от всех остальных ячеек, то обозначив $\overline{w}$ вероятность попадания в конкретную ячейку числа пор, меньшего m∗, получим $\overline{W}=\overline{w}^{N}$. Тогда $W=1-\overline{w}^{N}$. Используя (1), находим

$$\overline{w} = \exp(-\,c|\Delta|)\sum_{m=0}^{m*-1}\frac{c|\Delta|^m}{m!} = 1 - exp(-\,c|\Delta|)\sum_{m=m*}^{\infty}\frac{c|\Delta|^m}{m!} \quad (5)$$

Заметим, что число $m* = (d/h)^3 \gg 1$ очень велико. Для размеров ячейки Δ порядка 10^{-6} см, в ней может находиться порядка $10^2 \div 10^3$ пор. Тогда $m* \approx 10^2$. В этом случае для числа m∗! можно воспользоваться приближением на основе асимптотической формулы Стирлинга, которое дает очень хорошее приближение для этого числа. Таким образом,

$$m*! \approx (2\pi m*)(m*/e)^{m*}.$$

Оценим остаток суммы:

$$\sum_{m=m*}^{\infty}\frac{(c|\Delta|)^m}{m!} \approx \frac{(c|\Delta|)^m}{m*!} \approx (2\pi m*)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{ce|\Delta|}{m*}\right)^{m*}. \quad (6)$$

Эта оценка вместе с формулой (5) дают нам следующее приближенное выражение для вероятности $\overline{W}$:

$$\overline{W} = \left(1 - {\exp[-c|\Delta|]}\big/{\sqrt{2\pi m*}}\left(\frac{ce|\Delta|}{m*}\right)^{m*}\right)^N$$

Подставим в эту формулу выражение для общего числа ячеек N=V/d^3 в образце и, кроме того, заменим величину d, согласно(2), а число m∗ его приближенным значением, m∗=$cd_0^3(k/p)^{3\alpha/2}$ выразим, тем самым, искомую вероятность через физически контролируемые характеристики:

$$\bar{W} = (1 - {}^{\exp[-c|\Delta|]}\Big/\sqrt{2\pi c d_0^3\left(\frac{k}{p}\right)^{\frac{3\alpha}{2}}}\,[e\left(\frac{|\Delta|}{d_0^3}\right)(p/k)^{3\alpha/2}]^{cd_0^3(k/p)^{\alpha/2}})^{\left(\frac{p}{k}\right)^{\frac{3\alpha}{2}}(\frac{V}{d_0^3})}$$

Наконец, подставив в эту формулу приближенное выражение для |Δ|≈ d^3, найдем окончательно ответ на поставленный во введении вопрос, а именно, формулу длявероятности W:

$$\mathrm{W} = 1 - (1 - {}^{\exp\left[-cd_0^3(k/p)^{3\alpha/2}\right]}\Big/\sqrt{2\pi c d_0^3(k/p)^{3\alpha/2}}\left(\frac{ek}{\mathrm{p}}\right)^{cd_0^3(k/p)^{\alpha/2}})^{\left(\frac{p}{k}\right)^{\frac{3\alpha}{2}}(\frac{V}{d_0^3})} \qquad (7)$$

Так как $\mathrm{V}/d_0^3 \gg 1$, то $(1-\eta)^{\gamma V/d_0^3} \approx \exp(-\gamma\eta(\frac{\mathrm{V}}{d_0^3}))$, то последнюю формулу запишем в более компактном виде

$$W = 1 - exp(-\frac{V}{d_0^3}\frac{\exp\left[-cd_0^3(k/p)^{3\alpha/2}\right]}{\sqrt{2\pi c d_0^3(p/k)^{3\alpha/2}}}\left(\frac{ek}{\mathrm{p}}\right)^{cd_0^3(k/p)^{\alpha/2}}) \qquad (7)$$

Заключение

В результате проведенного теоретического исследования нами построена простая теоретическая статистическая модель, описывающая явление хрупкого разрушения материала [6-9, 22, 29] под воздействием на него внешней нагрузки. В этой модели величина флуктуации концентрации пор внутри образца материала связана с величиной самой концентрации. При этом образование микротрещины критического размера есть следствие достаточно большой концентрации пор во всем образце [21-27]. В результате появляется связь между концентрацией пор и критическим механическим напряжением (пределом разрывной прочности) материала p∗.

Построенная нами модель претендует на предсказание количественных характеристик хрупкого разрушения материала, так как она устанавливает вид такой зависимости. На основе найденной зависимости между концентрацией пор и пределом прочности материала, в частности, устанавливается зависимость между пределом прочности и размером образца. Наличие такой зависимости называется в материаловедении *объемным эффектом* [10-17].

Наличие данного эффекта связано с тем, что увеличение размеров образца приводит к увеличению вероятности появления в какой-то из малых областей внутри образца материала достаточно большой флуктуации с величиной, превосходящей критическую, начиная с которой происходит разростание трещины при воздействии на образец материала нагрузки, –т.е. к увеличению вероятности преодоления предела прочности локально в этой пической трещины с последующим ее разрастанием и разрывом образца.

Список лит ературы
References

1. Gumbel E. 1962. Statisticsof Extremes / NewYork : Columbia University Press.

2. Virchenko Yu.P., Sheremet O.I. 1999. The formation of destruction time distribution of material ageing by statistically independent perturbations. Functional Materials, 6;1: 5-12.

3. Gnedenko B.V. 1969. Kurs teorii veroyatnostei. Moscow: Nauka.

4. Griffith A.A. 1921. The Phenomenon of Rupture and Flow in Solids // Phil. Trans. Roy. Soc. of London. A221: 163-198.

5. Griffith A.A. 1924. The Theory of Rupture, Proc / First Inter. Cong. Appl. Mech., Delft.: 55.

6. Frenkel Ya.I., Kontorova T.A. 1943. A statistical theory of the brittle strength of real crystals. J. Phys. (Moscow),7: 1087.

7. Weibull W. 1949. A statistical representation of fatigue failure in solids. Trans. Roy. Inst. Tech. (Stocholm), No. 27

8. Weibull W. 1951. A statistical distribution function of wide applicability. J.Appl.Mech, 18: 293

9. Virchenko Yu.P. 1998. Percolation Mechanism of Material Ageing and Distribution of the Destruction Time. Functional Materials, 5;1: 7-13

10. Hellan K. 1984. Introduction to Fracture Mechanics. New York: McGrow-Hill Book Company.

11. Gilvarry J.J. 1961. Fracture of Brittle Solids. II. Distribution Function for Fragment Size in Single Fracture (Experimental). J.Appl.Phys. 32; 3: 400-410

12. Gilvarry J.J. 1961. Fracture of Brittle Solids. I. Distribution Function for Fragment Size in Single Fracture (Theoretical). J.Appl.Phys. 32; 3: 391-399

13. Mechanics of fracture. vol.1 /Ed. G.C. Nordoff/ Int. Publ. Leugen, 1973.

14. Sneddon I. The distribution of stress in the neighbourhood of a crack in an elastic solid.- Proc.Roy.Soc., ser.A, v.187, 1946.

15. Rice J., Drucker D. Energy changes in stressed bodies due to void crack growth.- IJFM, 1967, v.3, No.1.

16. Irwin G. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate.- J.Appl.Mech., 1957, v.24, No.3.

17. Irwin G., Fracture dynamics.//Fracture of Metals, ASM, Cleveland, 1948.

18. Orowan E. Fundamentals of brittle behavior of metals //Fatigue and Fracture of Metals.- N.Y.: Willey, 1950.

19. Dugdale D.S. Yielding of steel sheets containing slits // J.Mech. Phys. Solids. - 1960.- 8; 2.

20. Grandall S.H., Marc W.D. Random vibration in mechanical systems / New York: Acad. Press, 1963.

21. Maier M. Die Sicherheit der Bauwerke und ihre Berechnung nach Grenzkraften anstatt nach zulassigen Spannungen / Berlin: Springer-Verlag, 1926.

22. Weibull W.A. A statistical theory of the strength of materials //Proc. Roy. Swed. Inst. Eng. Res.-- 1939.- No.151, P.5-45.

23. Epstein B. Application of the theory of extreme values in fracture problems// Amer. Stat. Assoc. J.- 1948.- 13; No.9.- P.403-412.

24. Batdorf S.B. A statistical theory for failure of brittle materials under combined stresses // AIAA Paper.- 1973.- No.381.- P.1-5.

25. Batdorf S.B. Fracture statistics of brittle materials with intergranular cracks // Nucl. Eng. and Des.- 1975.- 35; No.3.- P.349-360.

26. Batdorf S.B., Crose J.G. A statistical theory for the fracture of brittle structures subjected to nonuniform polyaxial stresses // Trans. ASME, E.- 1974.- 41; No.2. - P.459-464.

27. Fisher J.C., Hollomon J.M. A statistical theory of fracture // Metals Technol.- 1947.- 14; No.5.- P.1-16.

28. Virchenko Yu.P., Sheremet O.I. Geometric models of the statistical theory of fragmentation// Theoretical and Mathematical Physics.- 2001.- 128;2.- P.969-982.