



УДК 517.926.4

DOI: 10.18413/2075-4639-2018-50-1-14-20

**АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА  
ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО  
ПОРЯДКА, СОДЕРЖАЩЕГО РАЗЛИЧНЫЕ ВЕСОВЫЕ ФУНКЦИИ****A PRIORI ESTIMATE OF THE SOLUTION OF THE DIRICHLET PROBLEM  
FOR ONE CLASS OF HIGH ORDER DEGENERATING ELLIPTIC EQUATION  
CONTAINING VARIOUS WEIGHT FUNCTIONS****А.В. Глушак****A.V. Glushak**Белгородский национальный исследовательский университет,  
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85

Belgorod National Research University, 85 Pobedy St, Belgorod, 308015, Russia

E-mail: Glushak@bsu.edu.ru

**Аннотация**

Устанавливается априорная оценка решения задачи Дирихле для линейного дифференциального уравнения высокого порядка, содержащего сумму двух вырождающихся эллиптических операторов и одного регулярного эллиптического оператора.

**Abstract**

A priori estimate of the solution of the Dirichlet problem for a linear differential equation of high order containing the sum of two degenerate elliptic operators and one regular elliptic operator is established.

**Ключевые слова:** вырождающиеся дифференциальные уравнения высокого порядка, задача Дирихле, априорная оценка решения.

**Key words:** degenerate differential equations of high order, the Dirichlet problem, a priori estimate of the solution.

**Введение**

Дифференциальные уравнения с обращаемым в нуль коэффициентом при старшей производной не вписываются в рамки стандартной теории обыкновенных дифференциальных уравнений и давно привлекали внимание широкого круга исследователей. Обзор литературы по уравнениям с неотрицательной характеристической формой, которые, в частности, включают вырождающиеся дифференциальные уравнения второго порядка в частных производных можно найти в [1, 2]. В этих работах уже рассматривались вырождающиеся эллиптические граничные задачи, содержащие производные с различными весовыми функциями. В отличие от указанных работ [1, 2] в настоящей работе в уравнение введён регулярный эллиптический оператор порядка  $2l$ , что привело к изменению в постановке граничных условий.

Чтобы не усложнять выкладки, в рассматриваемых операторах оставлены только слагаемые, содержащие старшие производные и свободные члены.

**Постановка задачи**

В полосе  $D = [0, d] \times R_n$  рассмотрим задачу Дирихле для дифференциального уравнения высокого порядка с постоянными коэффициентами



$$L_{2m}(D_\alpha, D_y)U(x, y) + L_{2p}(D_\beta, D_y)U(x, y) + L_{2l}(D_x, D_y)U(x, y) = F(x, y), \tag{1}$$

$$U(d, y) = \partial_x U(d, y) = \dots = \partial_x^{m-1} U(d, y) = 0, \tag{2}$$

$$U(0, y) = \partial_x U(0, y) = \dots = \partial_x^{l-1} U(0, y) = 0, \tag{3}$$

где  $l < p < m$  – натуральные числа,  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$  – мультииндекс,

$$L_{2m}(\tau, \xi) = a_1 \tau^{2m} + a_2 \xi^{2m} + a_3, \quad L_{2p}(\tau, \xi) = b_1 \tau^{2p} + b_2 \xi^{2p} + b_3, \quad L_{2l}(\tau, \xi) = d_1 \tau^{2l} + d_2 \xi^{2l} + d_3,$$

$$D_y^\mu U(x, y) = \partial_{y_1}^{\mu_1} \dots \partial_{y_n}^{\mu_n} U(x, y), \quad D_\alpha U(x, y) = i\sqrt{\alpha(x)} \partial_x (\sqrt{\alpha(x)} U(x, y)), \quad \alpha(x) \in C^{2m}[0, d], \quad \alpha(0) = 0, \quad \alpha(x) > 0$$

при  $x > 0$ . Аналогично  $D_\alpha$  определяется оператор  $D_\beta$ . Коэффициенты  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, d_1, d_2, d_3$  – действительные постоянные числа.

**Условие 1.** Многочлены  $L_{2m}(\tau, \xi), L_{2p}(\tau, \xi)$  и  $L_{2l}(\tau, \xi)$  положительны при любых  $(\tau, \xi) \in R_{n+1}$

**Условие 2.** Пусть  $\alpha(x), \beta(x) \in C^{2m}[0, d]$  и  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ . Пусть также  $\partial_x \alpha(0) = \partial_x \beta(0) = 0$ .

Введём в рассмотрение функциональные пространства, в которых будет доказываться априорная оценка, а затем и разрешимость граничной задачи (1) – (3).

Обозначим через  $H_{\alpha, \beta}^{2m, 2p, 2l}(D)$  пространство функций  $U(x, y) \in L_2(D)$ , для которых конечен квадрат нормы

$$\begin{aligned} \|U(x, y)\|^2 = & \sum_{j=0}^{2m} \int \int_{-\infty}^d (1 + |\xi|^2)^{2m-j} |D_\alpha^j u(x, \xi)|^2 dx d\xi + \sum_{j=0}^{2p} \int \int_{-\infty}^d (1 + |\xi|^2)^{2p-j} |D_\beta^j u(x, \xi)|^2 dx d\xi + \\ & + \sum_{j=0}^{2l} \int \int_{-\infty}^d (1 + |\xi|^2)^{2l-j} |D_x^j u(x, \xi)|^2 dx d\xi, \end{aligned}$$

где  $u(x, \xi) = F_{y \rightarrow \xi}[U(x, y)] = \int_{-\infty}^{\infty} U(x, y) \exp(-i\xi y) dy$  – преобразование Фурье функции  $U(x, y) \in L_2(D)$

по переменной  $y \in R_n$ .

Наряду с задачей (1) – (3) рассмотрим задачу

$$L_{2m}(D_\alpha, \xi)u(x, \xi) + L_{2p}(D_\beta, \xi)u(x, \xi) + L_{2l}(D_x, \xi)u(x, \xi) = f(x, \xi), \tag{4}$$

$$u(d, \xi) = \partial_x u(d, \xi) = \dots = \partial_x^{m-1} u(d, \xi) = 0, \tag{5}$$

$$u(0, \xi) = \partial_x u(0, \xi) = \dots = \partial_x^{l-1} u(0, \xi) = 0, \tag{6}$$

полученную из задачи (1) – (3) после применения преобразования Фурье  $F_{y \rightarrow \xi}[\cdot]$  по переменной  $y \in R_n$ .

Через  $FH_{\alpha, \beta}^{2m, 2p, 2l}(D)$  мы будем обозначать пространство образов Фурье по переменной  $y \in R_n$  функций из пространства  $H_{\alpha, \beta}^{2m, 2p, 2l}(D)$ .

### Априорная оценка

**Лемма 1.** Пусть выполнены условия 1 и 2. Тогда для функции  $u(x, \xi) \in FH_{\alpha, \beta}^{2m, 2p, 2l}(D)$ , являющейся решением задачи (4) – (6), выполнена оценка

$$\sum_{i=0}^{2m} (1 + |\xi|^2)^{2m-i} \int_0^d |D_\alpha^i u(x, \xi)|^2 dx + \sum_{j=0}^{2p} (1 + |\xi|^2)^{2p-j} \int_0^d |D_\beta^j u(x, \xi)|^2 dx + \sum_{k=0}^{2l} (1 + |\xi|^2)^{2l-k} \int_0^d |D_x^k u(x, \xi)|^2 dx \leq c_1 \int_0^d |f(x, \xi)|^2 dx, \tag{7}$$

с постоянной  $c_1 > 0$  не зависящей от  $u(x, \xi)$  и  $f(x, \xi) \in FL_2(D)$ .

**Доказательство.** Также как и в работах [1, 2], на функциях  $v(x) \in L_2(0, d)$  определим интегральное преобразование  $F_v$  по формуле



$$[F_\alpha v](\tau) = \int_0^d v(x) \exp\left(-i\tau \int_x^d \frac{ds}{\alpha(s)}\right) \frac{dx}{\sqrt{\alpha(x)}}. \quad (8)$$

Преобразование  $F_\alpha$  обладает следующими свойствами:

а)  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_\alpha v|^2 d\tau = \int_0^d |v|^2 dx$  (равенство Парсеваля),

б) для функций  $v(x) \in C^p[0, d]$ , удовлетворяющих условиям  $v(d) = \partial_x v(d) = \dots = \partial_x^{p-1} v(d) = 0$ , справедливо равенство  $[F_\alpha(D_\alpha^p v)](\tau) = \tau^p [F_\alpha v](\tau)$ .

Поскольку функции класса  $C^{2m+p}[0, d]$  плотны в  $H_\alpha^{2m}(0, d)$ , то в дальнейшем, не ограничивая общности, будем считать, что  $u(x, \xi) \in C^{2m+p}[0, d]$  при почти всех  $\xi \in R_n$ .

Умножим уравнение (4) на функцию  $\bar{u}(x, \xi)$  и проинтегрируем полученное равенство по  $x \in (0, d)$ . В результате получим

$$(L_{2m}(D_\alpha, \xi)u(x, \xi), u(x, \xi)) + (L_{2p}(D_\beta, \xi)u(x, \xi), u(x, \xi)) + (L_{2l}(D_x, \xi)u(x, \xi), u(x, \xi)) = (f(x, \xi), u(x, \xi)),$$

где скалярное произведение определено равенством  $(f(x, \xi), u(x, \xi)) = \int_0^d f(x, \xi) \bar{u}(x, \xi) dx$ .

Из перечисленных ранее свойств интегрального преобразования (8) для  $s \leq m$  вытекает равенство

$$(D_\alpha^{2s} u(x, \xi), u(x, \xi)) = \int_0^d D_\alpha^{2s} u(x, \xi) \bar{u}(x, \xi) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^{2s} [F_\alpha u](\tau, \xi) \overline{[F_\alpha u](\tau, \xi)} d\tau$$

и, следовательно,

$$(L_{2m}(D_\alpha, \xi)u(x, \xi), u(x, \xi)) + (L_{2p}(D_\beta, \xi)u(x, \xi), u(x, \xi)) + (L_{2l}(D_x, \xi)u(x, \xi), u(x, \xi)) = \int_{-\infty}^{\infty} L_{2m}(\tau, \xi) |F_\alpha u(x, \xi)|^2 d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} L_{2p}(\tau, \xi) |F_\beta u(x, \xi)|^2 d\tau + d_1 \int_0^d |D_x^l u(x, \xi)|^2 dx + (d_2 \xi^{2l} + d_3) \int_0^d |u(x, \xi)|^2 dx = (f(x, \xi), u(x, \xi)). \quad (9)$$

Заметим, что из условия 1 вытекает (см. [1]) справедливость неравенств

$$|L_{2m}(\tau, \xi)| \geq M(1 + |\xi|^2 + |\tau|^2)^m, \quad |L_{2p}(\tau, \xi)| \geq M(1 + |\xi|^2 + |\tau|^2)^p,$$

поэтому из (9) получим оценку

$$\sum_{i=0}^{2m} (1 + |\xi|^2)^{2m-i} \int_0^d |D_\alpha^i u(x, \xi)|^2 dx + \sum_{j=0}^{2p} (1 + |\xi|^2)^{2p-j} \int_0^d |D_\beta^j u(x, \xi)|^2 dx + (1 + |\xi|^2)^{2l} \int_0^d |D_x^{2l} u(x, \xi)|^2 dx \leq c_2 |(f(x, \xi), u(x, \xi))|.$$

Для оценки выражения, стоящего в правой части полученного неравенства, воспользуемся очевидным неравенством

$$|(f(x, \xi), u(x, \xi))| \leq \varepsilon (1 + |\xi|^2)^m \int_0^d |u(x, \xi)|^2 dx + \frac{c(\varepsilon)}{(1 + |\xi|^2)^m} \int_0^d |f(x, \xi)|^2 dx, \quad \varepsilon > 0$$

и выбрать  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2c_2}$ . После простых преобразований получим

$$\sum_{i=0}^{2m} (1 + |\xi|^2)^{2m-i} \int_0^d |D_\alpha^i u(x, \xi)|^2 dx + \sum_{j=0}^{2p} (1 + |\xi|^2)^{2p-j} \int_0^d |D_\beta^j u(x, \xi)|^2 dx + (1 + |\xi|^2)^{2l} \int_0^d |D_x^{2l} u(x, \xi)|^2 dx \leq c_3 \int_0^d |f(x, \xi)|^2 dx. \quad (10)$$

Теперь для доказательства априорной оценки (7) достаточно в (10) воспользоваться известным неравенством

$$(1 + |\xi|^2)^{2l-i} \|D_x^i u(x, \xi)\|^2 \leq \varepsilon^{2(l-i)} \|D_x^{2l} u(x, \xi)\|^2 + c(\varepsilon) (1 + |\xi|^2)^{2l} \|u(x, \xi)\|^2, \quad (11)$$

где  $\|u(x, \xi)\|^2 = \int_0^d |u(x, \xi)|^2 dx$ ,  $0 < i < 2l$ , а постоянная  $c(\varepsilon)$  не зависит от  $u(x, \xi)$  и  $\xi$ . Лемма доказана.



**Лемма 2 [1].** Пусть  $v(x) \in C^s[0, d]$ . Тогда при любых  $\varepsilon > 0, 0 < m < s$  справедливо мультипликативное неравенство

$$\|D_\alpha^m v(x)\| \leq \varepsilon^{s-m} \|D_\alpha^s v(x)\| + c_2 (\varepsilon^{-m} + \varepsilon^{s-m}) \|v(x)\| \tag{12}$$

где  $c_2 > 0$  не зависит от  $v(x)$  и  $\varepsilon$ .

**Следствие 1 [1].** Пусть  $v(x) \in C^{2m}[0, d]$ . Тогда при любых  $\varepsilon > 0, 0 < s < 2m, \xi \in R_n$  справедлива оценка

$$\left(1 + |\xi|^2\right)^{2m-s} \|D_\alpha^s v(x)\|^2 \leq \varepsilon^{2(2m-s)} \|D_\alpha^{2m} v(x)\|^2 + c_2 (\varepsilon^{-s} + \varepsilon^{2m-s}) \left(1 + |\xi|^2\right)^{2m} \|v(x)\|^2, \tag{13}$$

где  $c_2 > 0$  не зависит от  $v(x)$  и  $\varepsilon$ .

**Лемма 3.** Пусть  $0 < k < 2m$  и  $\partial_x \alpha(0) = 0$ . Тогда для любой функции  $w(x) \in C^{2m+1}[0, d]$  справедливо тождество  $D_x D_\alpha^k w(x) = D_\alpha^k D_x w(x) + \sum_{j=0}^{k-1} S_j^k(x) D_\alpha^j D_x w(x) + \sum_{j=0}^k Q_j^k(x) D_\alpha^j w(x)$ , где функции  $S_j^k(x)$  и  $Q_j^k(x)$  ограничены и зависят лишь от функции  $\alpha(x)$  и её производных.

**Доказательство** леммы не представляет больших трудностей и проводится по индукции.

**Лемма 4 [1].** Пусть  $0 < k < 2m$  и  $\partial_x \alpha(0) = \partial_x \beta(0) = 0$ . Тогда для любой функции  $w(x) \in C^{2m+1}[0, d]$  справедливо тождество  $D_\beta D_\alpha^k w(x) = D_\alpha^k D_\beta w(x) + \sum_{j=0}^{k-1} R_j^k(x) D_\alpha^j D_\beta w(x) + \sum_{j=0}^k T_j^k(x) D_\alpha^j w(x)$ , где функции  $R_j^k(x)$  и  $T_j^k(x)$  ограничены и зависят лишь от функций  $\alpha(x), \beta(x)$  и их производных, причём  $R_j^k(0) = T_j^k(0) = 0$ .

Для дальнейших оценок введём в рассмотрение функцию  $\varphi(x) \in C^\infty[0, d]$  равную числу 1 при  $0 \leq x \leq \frac{d}{4}$  и равную нулю при  $\frac{3d}{4} \leq x \leq d$ . Обозначим через  $u_1(x, \xi) = \varphi(x)u(x, \xi)$ , через  $u_2(x, \xi) = (1 - \varphi(x))u(x, \xi)$  и рассмотрим скалярное произведение  $(D_\alpha^{2m} u(x, \xi), D_\beta^{2p} u(x, \xi))$ .

**Лемма 5 [1].** Пусть  $u(x, \xi) \in FH_{\alpha, \beta}^{2m, 2p, 2l}$ . Тогда справедливо представление

$$\begin{aligned} (D_\alpha^{2m} u(x, \xi), D_\beta^{2p} u(x, \xi)) &= \|D_\alpha^m D_\beta^p u_1(x, \xi)\|^2 + I(u_1(x, \xi), u_1(x, \xi)) + \int_0^d D_\alpha^m D_\beta^p u_1(x, \xi) \overline{D_\alpha^{2m} D_\beta^{2p} u_2(x, \xi)} dx + \\ &+ I(u_1(x, \xi), u_2(x, \xi)) + \int_0^d D_\alpha^m D_\beta^p u_2(x, \xi) \overline{D_\alpha^m D_\beta^p u_1(x, \xi)} dx + J(u_2(x, \xi), u_1(x, \xi)) + \\ &+ \int_{d/4}^d \alpha^{2m}(x) \beta^{2p}(x) \left| \partial_x^{m+p} u_2(x, \xi) \right|^2 dx + I_1(u_2(x, \xi)) + R(u_2(x, \xi)), \end{aligned} \tag{14}$$

где для  $2 \leq i + j < 4$

$$\begin{aligned} I(u_i(x, \xi), u_j(x, \xi)) &= \int_0^d D_\beta^p D_\alpha^{2m} u_i(x, \xi) \overline{D_\beta^p u_j(x, \xi)} dx - \int_0^d D_\alpha^{2m} D_\beta^p u_i(x, \xi) \overline{D_\beta^p u_j(x, \xi)} dx, \\ R(u_2(x, \xi)) &= \sum_{m+p \leq \mu \leq 2m-1} (-1)^\mu D_\alpha^\mu u_2(x, \xi) D_\alpha^{2m-\mu} \overline{D_\beta^{2p} u_j(x, \xi)} \Big|_{x=d/4}^{x=d}, \\ I_1(u_2(x, \xi)) &= \int_{d/4}^d \sum_{\substack{\mu+v \leq 2(m+p)-1 \\ \mu \leq m+p, v \leq m+p}} \Phi_{\mu\nu}(x) \partial_x^\mu u_2(x, \xi) \overline{\partial_x^\nu u_2(x, \xi)} dx, \end{aligned}$$

$\Phi_{\mu\nu}(x)$  – некоторые ограниченные функции. При этом для любого  $\varepsilon > 0$  имеют место оценки

$$\left| I(u_i(x, \xi), u_j(x, \xi)) \right| \leq \varepsilon \int_0^d \left| D_\alpha^{2m} u_i(x, \xi) \right|^2 dx + \varepsilon \int_0^d \left| D_\beta^{2p} u_j(x, \xi) \right|^2 dx + c(\varepsilon) \int_0^d \left( \left| u_i(x, \xi) \right|^2 + \left| u_j(x, \xi) \right|^2 \right) dx, \quad i \neq j, \tag{15}$$



$$|R(u_2(x, \xi))| \leq \varepsilon \int_0^d |\partial_x^{2m} u_2(x, \xi)|^2 dx + c(\varepsilon) \int_0^d |u_2(x, \xi)|^2 dx, \quad (16)$$

$$|I_1(u_2(x, \xi))| \leq \varepsilon \int_0^d |D_\alpha^{2m} u_2(x, \xi)|^2 dx + \varepsilon \int_0^d |D_\beta^{2p} u_2(x, \xi)|^2 dx + c(\varepsilon) \int_0^d |u_2(x, \xi)|^2 dx. \quad (17)$$

Аналогично лемме 5 устанавливается и следующая лемма 6.

**Лемма 6.** Пусть  $u(x, \xi) \in FH_{\alpha, \beta}^{2m, 2p, 2l}$ . Тогда справедливо представление

$$\begin{aligned} (D_\alpha^{2m} u(x, \xi), D_x^{2p} u(x, \xi)) &= \|D_\alpha^m D_x^l u_1(x, \xi)\|^2 + J(u_1(x, \xi), u_1(x, \xi)) + \int_0^d D_\alpha^m D_x^l u_1(x, \xi) \overline{D_\alpha^m D_x^l u_2(x, \xi)} dx + \\ &+ J(u_1(x, \xi), u_2(x, \xi)) + \int_0^d D_\alpha^m D_\beta^l u_2(x, \xi) \overline{D_\alpha^m D_x^l u_1(x, \xi)} dx + J(u_2(x, \xi), u_1(x, \xi)) + \\ &+ \int_0^d \alpha^{2m}(x) |\partial_x^{m+l} u_2(x, \xi)|^2 dx + J_1(u_2(x, \xi)) + T(u_2(x, \xi)), \end{aligned} \quad (18)$$

где для  $2 \leq i + j < 4$

$$J(u_i(x, \xi), u_j(x, \xi)) = \int_0^d D_x^l D_\alpha^{2m} u_i(x, \xi) \overline{D_x^l u_j(x, \xi)} dx - \int_0^d D_\alpha^{2m} D_x^l u_i(x, \xi) \overline{D_x^l u_j(x, \xi)} dx,$$

$$T(u_2(x, \xi)) = \sum_{m+l \leq \mu \leq 2m-1} (-1)^\mu D_\alpha^\mu u_2(x, \xi) D_\alpha^{2m-\mu} \overline{D_x^{2l} u_2(x, \xi)} \Big|_{x=d/4}^{x=d},$$

$$J_1(u_2(x, \xi)) = \int_0^d \sum_{\substack{\mu+v \leq 2(m+l)-1 \\ \mu \leq m+l, v \leq m+l}} \Psi_{\mu\nu}(x) \partial_x^\mu u_2(x, \xi) \overline{\partial_x^\nu u_2(x, \xi)} dx,$$

$\Psi_{\mu\nu}(x)$  – некоторые ограниченные функции. При этом для любого  $\varepsilon > 0$  имеют место оценки

$$|J(u_i(x, \xi), u_j(x, \xi))| \leq \varepsilon \int_0^d |D_\alpha^{2m} u_i(x, \xi)|^2 dx + \varepsilon \int_0^d |D_x^{2l} u_j(x, \xi)|^2 dx + c(\varepsilon) \int_0^d (|u_i(x, \xi)|^2 + |u_j(x, \xi)|^2) dx, \quad i \neq j, \quad (19)$$

$$|T(u_2(x, \xi))| \leq \varepsilon \int_0^d |\partial_x^{2m} u_2(x, \xi)|^2 dx + c(\varepsilon) \int_0^d |u_2(x, \xi)|^2 dx, \quad (20)$$

$$|J_1(u_2(x, \xi))| \leq \varepsilon \int_0^d |D_\alpha^{2m} u_2(x, \xi)|^2 dx + \varepsilon \int_0^d |D_x^{2l} u_2(x, \xi)|^2 dx + c(\varepsilon) \int_0^d |u_2(x, \xi)|^2 dx. \quad (21)$$

**Лемма 7.** Пусть выполнены условия 1 и 2. Тогда при любом  $\varepsilon > 0$  для функции  $u(x, \xi) \in FH_{\alpha, \beta}^{2m, 2p, 2l}$ , являющейся решением задачи (4) – (6), выполнена оценка

$$\|D_x^{2l} u(x, \xi)\|^2 \leq \varepsilon (\|D_\alpha^{2m} u(x, \xi)\|^2 + \|D_\beta^{2p} u(x, \xi)\|^2) + c(\varepsilon) \|f(x, \xi)\|^2, \quad (22)$$

с постоянной  $c(\varepsilon) > 0$ , не зависящей от  $u(x, \xi)$ ,  $f(x, \xi)$ .

**Доказательство.** Умножим скалярно уравнение (4) на  $D_x^{2l} u(x, \xi)$ . После элементарных преобразований будем иметь

$$\begin{aligned} a_1 \operatorname{Re}(D_\alpha^{2m} u(x, \xi), D_x^{2l} u(x, \xi)) + b_1 \operatorname{Re}(D_\beta^{2p} u(x, \xi), D_x^{2l} u(x, \xi)) + d_1 \|D_x^{2l} u(x, \xi)\|^2 = \\ = \operatorname{Re}(f(x, \xi), D_x^{2l} u(x, \xi)) - (a_2 \xi^{2m} + a_3 + b_2 \xi^{2p} + b_3 + d_2 \xi^{2l} + d_3) \operatorname{Re}(u(x, \xi), D_x^{2l} u(x, \xi)). \end{aligned} \quad (23)$$

Для оценки слагаемых, стоящих в правой части равенства (23), применим неравенство

$$\left| \int_0^d \varphi(x) \psi(x) dx \right| \leq \varepsilon \int_0^d |\varphi(x)|^2 dx + c(\varepsilon) \int_0^d |\psi(x)|^2 dx, \quad \varepsilon > 0. \quad (24)$$

Будем иметь

$$\begin{aligned} a_1 \operatorname{Re}(D_\alpha^{2m} u(x, \xi), D_x^{2l} u(x, \xi)) + b_1 \operatorname{Re}(D_\beta^{2p} u(x, \xi), D_x^{2l} u(x, \xi)) + d_1 \|D_x^{2l} u(x, \xi)\|^2 \leq \\ \leq \varepsilon \|D_x^{2l} u(x, \xi)\|^2 + c(\varepsilon) (\|f(x, \xi)\|^2 + (a_2 \xi^{2m} + a_3 + b_2 \xi^{2p} + b_3 + d_2 \xi^{2l} + d_3) \|u(x, \xi)\|^2). \end{aligned} \quad (25)$$



Учитывая представление (18) и оценки (7), (19) – (21), из (25) получим неравенство

$$\begin{aligned} \|D_x^{2l}u(x, \xi)\|^2 \leq \varepsilon_1 \left( \|D_\alpha^{2m}u(x, \xi)\|^2 + \|D_\beta^{2p}u(x, \xi)\|^2 \right) + c(\varepsilon_1) \|f(x, \xi)\|^2 + \\ + c_4 \left| \int_{d/4}^d D_\alpha^m D_x^l u_1(x, \xi) \overline{D_\alpha^m D_x^l u_2(x, \xi)} dx \right| + c_5 \left| \int_{d/4}^d D_\beta^p D_x^l u_1(x, \xi) \overline{D_\beta^p D_x^l u_2(x, \xi)} dx \right|. \end{aligned} \quad (26)$$

Чтобы завершить доказательство леммы 7, достаточно заметить, что подынтегральное выражение в правой части последнего неравенства  $D_\alpha^m D_x^l u_1(x, \xi) \overline{D_\alpha^m D_x^l u_2(x, \xi)}$  и  $D_\beta^p D_x^l u_1(x, \xi) \overline{D_\beta^p D_x^l u_2(x, \xi)}$  содержат соответственно произведения производных от функции  $u(x, \xi)$  только до порядка  $m+l < 2m$  и до порядка  $p+l < 2p$ , поэтому сами интегралы, с учётом оценок (24), (11), (7), могут быть оценены следующим образом

$$\left| \int_{d/4}^d D_\alpha^m D_x^l u_1(x, \xi) \overline{D_\alpha^m D_x^l u_2(x, \xi)} dx \right| + \left| \int_{d/4}^d D_\beta^p D_x^l u_1(x, \xi) \overline{D_\beta^p D_x^l u_2(x, \xi)} dx \right| \leq \varepsilon_2 \|D_\alpha^{2m}u(x, \xi)\|^2 + c(\varepsilon_2) \|f(x, \xi)\|^2,$$

что и доказывает лемму.

**Лемма 8.** Пусть выполнены условия 1 и 2. Тогда при любом  $\varepsilon > 0$  для функции  $u(x, \xi) \in FH_{\alpha, \beta}^{2m, 2p, 2l}$ , являющейся решением задачи (4) – (6), выполнена оценка

$$\|D_\beta^{2p}u(x, \xi)\|^2 \leq \varepsilon \|D_\alpha^{2m}u(x, \xi)\|^2 + c(\varepsilon) \|f(x, \xi)\|^2, \quad (27)$$

с постоянной  $c(\varepsilon) > 0$ , не зависящей от  $u(x, \xi), f(x, \xi)$ .

Для установления справедливости леммы 8 нужно скалярно умножить уравнение (4) на  $D_\beta^{2p}u(x, \xi)$  и дальнейшее доказательство провести аналогично доказательству леммы 7. Заметим лишь, что при этом вместо леммы 6 следует использовать лемму 5.

**Теорема.** Пусть выполнены условия 1, 2 и  $F(x, y) \in L_2(D)$ . Тогда для функций  $u(x, \xi) \in FH_{\alpha, \beta}^{2m, 2p, 2l}$  и  $U(x, y) \in H_{\alpha, \beta}^{2m, 2p, 2l}$ , являющихся соответственно решениями задач (4) – (6) и (1) – (3), выполнены априорные оценки

$$\sum_{j=0}^{2m} \left(1 + |\xi|^2\right)^{2m-j} \|D_\alpha^j u(x, \xi)\|^2 + \sum_{j=0}^{2p} \left(1 + |\xi|^2\right)^{2p-j} \|D_\beta^j u(x, \xi)\|_0^2 + \sum_{j=0}^{2l} \left(1 + |\xi|^2\right)^{2l-j} \|D_x^j u(x, \xi)\|_0^2 \leq c \|f(x, \xi)\|_0^2, \quad (28)$$

$$\|U(x, y)\|^2 \leq c \iint_D |F(x, y)|^2 dx dy \quad (29)$$

с постоянной  $c > 0$  не зависящей от  $u(x, \xi), f(x, \xi), U(x, y), F(x, y)$ .

**Доказательство** теоремы вытекает из лемм 1, 7, 8 и следствия 1. Действительно, из уравнения (4) оценим  $\|D_\alpha^{2m}u(x, \xi)\|_0$ . Имеем

$$\|D_\alpha^{2m}u(x, \xi)\| \leq c_6 \left( \|f(x, \xi)\| + \|D_\beta^{2p}u(x, \xi)\| + \|D_x^{2l}u(x, \xi)\| + \left(1 + |\xi|^{2m}\right) \|u(x, \xi)\| \right).$$

Для оценки слагаемых, стоящих в правой части последнего неравенства, применим следствие 1 и леммы 1, 7, 8. Получим

$$\|D_\alpha^{2m}u(x, \xi)\| \leq \varepsilon \|D_\alpha^{2m}u(x, \xi)\| + c(\varepsilon) \|f(x, \xi)\|. \quad (30)$$

Выбирая в оценке (30)  $\varepsilon > 0$  достаточно малым, выводим неравенство

$$\|D_\alpha^{2m}u(x, \xi)\| \leq c_7 \|f(x, \xi)\|,$$

которое вместе с (7), (13), (22) и (27) приводит к оценке (28).

Оценка (29) вытекает из неравенства (28) после интегрирования его по  $\xi \in R_n$  и теорема тем самым доказана.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 16-01-00197.*



**Список литературы**  
**References**

1. Глушак А.В. 2017. Априорная оценка решения задачи Дирихле для дифференциального уравнения высокого порядка с двумя вырождающимися эллиптическими операторами. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика, №20 (269). Выпуск 48: 50–57.

Glushak A.V. 2017. A priori estimate of the solution of the Dirichlet problem for a differential equation of high order with two degenerate elliptic operators. Belgorod State University Scientific Bulletin Mathem.&Physics, №20 (269), issue 48: 50–57.

2. Глушак А.В. 2017. Разрешимость задачи Дирихле для дифференциального уравнения высокого порядка с двумя вырождающимися эллиптическими операторами. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика, № 27 (276). Вып. 49: 5–14.

Glushak A.V. 2017. A priori estimate of the solution of the Dirichlet problem for a differential equation of high order with two degenerate elliptic operators. Belgorod State University Scientific Bulletin Mathem.&Physics, № 27 (276), issue 48: 5–14.

3. Глушко В.П. Априорные оценки решений краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка. Деп. ВИНТИ № 1049-79 Деп., 47.

Glushko V.P. A priori estimates of solutions of boundary value problems for a class of degenerate elliptic equations of high order. Dep. VINITI № 1049-79 Dep., 47.