МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 517.9

СИСТЕМА МОИСИЛА – ТЕОДОРЕСКУ В ОБЛАСТИ, ГОМЕОМОРФНОЙ ТОРУ

THE MOISIL – TEODORESCU SYSTEM IN THE AREA, HOMEOMORPHIC TO A TORUS

В.А. Полунин, А.П. Солдатов
V.A. Polunin, A.P. Soldatov

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85

Belgorod State University, 85 Pobedy St, Belgorod, 308015, Russia

E-mail: polunin@bsu.edu.ru, soldatov@bsu.edu.ru

Аннотация
В статье рассмотрен вопрос фредгольмовой разрешимости задачи Шварца для системы Моисила – Теодореску в области, гомеоморфной тору. Сформулировано и доказано необходимое и достаточное условие разрешимости и вычислен индекс оператора этой задачи.

Abstract
In the article the question of the Fredholm solvability of the Schwarz problem for the Moisil-Teodorescu system in the domain homeomorphic to the torus is received. A necessary and sufficient condition for solvability is formulated and proved, and the index of the operator of this problem.

Ключевые слова: система Моисила – Теодореску, задача Шварца, краевая задача.
Keywords: Moisil – Teodorescu system, Schwartz problem, baundary value problem

Рассмотрим в области $D \subseteq \mathbb{R}^3$, ограниченной гладкой поверхностью Γ, эллиптическую систему Моисила-Теодореску

$$M\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x) = 0, \quad M(\zeta) = \begin{pmatrix} 0 & \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \\ \zeta_1 & 0 & -\zeta_3 & \zeta_2 \\ \zeta_2 & \zeta_3 & 0 & -\zeta_1 \\ \zeta_3 & -\zeta_2 & \zeta_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

для четырехкомпонентной вектор-функции $u(x) = (u_1, u_2, u_3, u_4)$, которая в обозначениях $\widetilde{u} = (u_2, u_3, u_4)$ записывается в виде

$$\operatorname{div}\widetilde{u} = 0, \quad \operatorname{rot}\widetilde{u} + \operatorname{grad} u_1 = 0. \tag{2}$$

Отметим, что все компоненты u_j вектора u решения этой системы являются гармоническими функциями.

Задача Шварца заключается в отыскании решения $(u_1, \widetilde{u}) \in C(\overline{D})$

рассматриваемой системы, удовлетворяющего краевым условиям

$$u_1^+ = f_1, \quad \tilde{u}^+ n = f_2, \tag{3}$$

где знак $+$ указывает на граничное значение, $n = (n_1, n_2, n_3)$ есть единичная внешняя нормаль и $\tilde{u}^+ n$ означает скалярное произведение.

Отметим, что формула Гаусса-Остроградского, примененная к (2), (3), приводит к условию ортогональности

$$\int_\Gamma f_2(y) d_2 y = 0, \tag{4}$$

необходимому для разрешимости неоднородной задачи Шварца.

Эта задача фредгольмова в классе $C^\mu(\overline{D})$ (см. теорему 1 из [1]). Как показано в [2], ядро этой задачи имеет размерность $m-1$, где m - порядок связности области D. Этот порядок определяется следующим образом: в области D можно провести ровно m попарно непересекающихся разрезов $R_1, \ldots, R_m$, таких что дополнение к ним одосвязно. Под разрезом многосвязной области D здесь понимается односвязная гладкая поверхность R с гладким краем ∂R, которая содержится в $\overline{D}$, причем $R \cap \Gamma = \partial R$.

В явном виде это ядро состоит из векторов $u_1 = 0, \tilde{u} = \mathrm{grad} w$, где w -- произвольная многозначная в D гармоничная функция, частные производные которой однозначны и которая удовлетворяет краевому условию

$$\frac{\partial w^+}{\partial n} = 0$$

на Γ.

В частности, если область D гомеоморфна шару (тору), то $m = 1$ ($m = 2$). Известно [3], что в первом случае условие (4) и достаточно для разрешимости неоднородной задачи (3). Утверждается, что этот факт справедлив и в во втором случае, когда область D гомеоморфна тору.

Теорема 1. *Пусть поверхность* Γ *принадлежит классу* $C^{2,\nu}, 0 < \nu < 1$, *и область* D *гомеоморфна тору. Тогда условие (4) необходимо и достаточно для разрешимости задачи (3).*

Доказательство. Существуют такие неколлинеарные вектор- функции $p, q \in C^{1,\nu}(\Gamma)$, которые касаются Γ в каждой точке. В самом деле, по условию существует диффеоморфизм α класса $C^{2,\nu}$ поверхности Γ_0 тора на Γ. Очевидно, для тора выбор векторов p_0 и q_0 с указанными свойствами очевиден. Поэтому достаточно положить $p = (\mathsf{D}\alpha)(p_0)$ и $q = (\mathsf{D}\alpha)(q_0)$, где D означает матрицу Якоби.

Рассмотрим для системы (2) однородную задачу

$$\tilde{u}^+ p = \tilde{u}^+ q = 0 \tag{5}$$

и установим сначала следующий вспомогательный результат.

Лемма 1. *Для любого решения* $u = (u_1, \tilde{u}) \in C^{1,\nu}(\overline{D})$ *однородной задачи (5) функция* $\tilde{u} = 0$, *а* u_1 *постоянна.*

Доказательство. Легко видеть, что неоднородная задача

$$\tilde{u}^+ p = f_1, \quad \tilde{u}^+ q = f_2 \tag{6}$$

удовлетворяет условию дополнительности, описанному в [1]. А именно, пусть g^{kr} означает минор второго порядка, составленной из $k-$го и $r-$го столбцов матрицы

$$G=\begin{pmatrix}0 & p_1 & p_2 & p_3\\ 0 & q_1 & q_2 & q_3\end{pmatrix}.$$

Тогда условие дополнительности заключается в том, что вектор $s=(s_1,s_2,s_3)$ с компонентами

$$s_1=g^{12}+g^{34},\quad s_2=g^{13}-g^{24},\quad s_3=g^{14}+g^{23}$$

не выходит в касательную плоскость всюду на Γ. Легко видеть, что в рассматриваемом случае $s=[p,q]$ и поэтому указанное условие очевидным образом выполнено.

Таким образом, на основании известных результатов [2, 4] задача (6) фредгольмова в классе $C^{\mu}(\overline{D})$, причем любое ее решение однородной задачи в действительности принадлежит классу $C^{1,\mu}$.

Рассмотрим односвязную поверхность $\Gamma_0\subseteq\Gamma$ с гладким краем и применим к вектор- функции $\widetilde{u}^+$ на этой поверхности теорему Стокса. Тогда

$$\int_{\Gamma_0}(\mathrm{rot}\widetilde{u})^+(x)n(x)d_2x=\int_{\partial\Gamma_0}\widetilde{u}^+(y)e(y)d_1y,$$

где $e(y)$ есть единичный касательный вектор к контуру $\partial\Gamma_0$, ориентированный положительно по отношению к n (т.е. обход этого контура, если смотреть из конца вектора n, осуществляется против часовой стрелки). В соответствии с (5) вектор $\widetilde{u}^+$ пропорционален n на Γ и, следовательно, подинтегральное выражение в правой части последнего равенства обращается в нуль. Поэтому с учетом (2) оно примет вид

$$\int_{\Gamma_0}\frac{\partial u_1^+}{\partial n}d_2x=0.$$

Так как оно верно для любой односвязной области Γ_0 поверхности Γ, отсюда заключаем, что нормальная производная

$$\frac{\partial u_1^+}{\partial n}=0.$$

Следовательно, гармоническая функция u_1 постоянна в области D и система (3) переходит в $\mathrm{div}\,\widetilde{u}=0, \mathrm{rot}\,\widetilde{u}=0$. Поэтому функцию $\widetilde{u}$ можно представить в виде $\widetilde{u}=\mathrm{grad}w$ с некоторой многозначной гармонической функцией w, частные производные которой однозначны. При этом в силу (5) ее частные производные по касательным направлениям p и q равны нулю на границе, так что функция w^+ постоянна на Γ. Следовательно, она однозначна и постоянна во всей области D, что и завершает доказательство леммы.

Продолжение доказательства теоремы 1. По отношению к $u=(u_1,u_2,u_3,u_4)$ краевое условие (3) можем записать в форме

$$Cu^+=f,\quad C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & n_1 & n_2 & n_3\end{pmatrix}. \tag{7}$$

Не ограничивая общности можно считать, что вектора p, q имеют единичную длину и ортогональны друг другу. Поэтому матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & n_1 & n_2 & n_3 \\ 1 & p_1 & p_2 & p_3 \\ 0 & q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix}$$

ортогональна и согласно [5] равенство

$$GM^{\mathrm{T}}(n)v^{+} = 0 \qquad (7^*)$$

представляет собой однородное сопряженное краевое условие к (3) для сопряженной системы

$$M^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)v(x) = 0\,. \qquad (1^*)$$

Прямая проверка показывает, что

$$GM^{\mathrm{T}}(n) = \begin{pmatrix} 1 & [n,p]_1 & [n,p]_2 & [n,p]_3 \\ 0 & [n,q]_1 & [n,q]_2 & [n,q]_3 \end{pmatrix}, \qquad (8)$$

где квадратные скобки означают векторное произведение. Поскольку векторы $[n,p]$ и $[n,q]$ также лежат в касательной плоскости и ортогональны друг другу, отвечающая (7^*) неоднородная задача также удовлетворяет условию дополнительности.

На основании теоремы 4 из [5] отсюда заключаем, что условие ортогональности

$$\int_\Gamma f(y)(CM^{\mathrm{T}}(n)v)(y)d_2y = 0 \qquad (9)$$

всем решениям v однородной задачи $(1^*),(7^*)$ необходимо и достаточно для разрешимости задачи (1), (3). В обозначениях $v = (v_1, \widetilde{v})$ система (1^*) примет вид

$$\operatorname{div}\widetilde{v} = 0, \quad \operatorname{rot}\widetilde{v} - \operatorname{grad} v_1 = 0, \qquad (2^*)$$

аналогичный (2). Поэтому лемма 1 сохраняет свою силу и для этой системы (с тем же доказательством). В частности, с учетом (8) эта лемма применима и к задаче $(2^*),(7^*)$, так что на основании этой леммы в условии ортогональности (9) можем положить $v_1 = 1, \widetilde{v} = 0$. Принимая во внимание очевидное соотношение

$$CM^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & n_1 & n_2 & n_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

убеждаемся, что условие (9) в точности переходит в (4). Тем самым теорема 1 полностью установлена.

Список литературы
References

1. Полунин В.А., Солдатов А.П. 2016. Система Моисила – Теодореску в многосвязных областях. Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика., 27(248): 10–15.

Polunin V.A., Soldatov A.P. 2016. The Moisila – Teodoresku system in multicoherent areas. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics, 27(248): 10–15.

2. Полунин В.А., Солдатов А.П. 2017. Об интегральном представлении решений системы Моисила – Тедореску в многосвязных областях. Докл. РАН, 475 (4).

Polunin V.A., Soldatov A.P. 2017. About integrated submission of solutions of the Moisila – Tedoresku system in multicoherent areas. Reports of RAS, 475(4).

3. Шевченко В.И. 1970. О некоторых краевых задачах для голоморфного вектора, Сб. "Матем. физика". Киев. Вып.8: 172–187.

Shevchenko V.I. 1970. About some regional tasks for a holomorphic vector, Sb. "Matem. physics". Kiev. Issue 8: 172–187.

4. Agmon S., Douglis A., Nirenberg L. 1964. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. II. Comm. Pure Appl. Math., 17: 35–92.

5. Полунин В.А., Солдатов А.П. 2011. О сопряженной задаче Римана - Гильберта для системы Моисила – Теодореску, Научные ведомости БелГУ, 5 (22): 106–111

Polunin V.A., Soldatov A.P. 2011. About the interfaced Riemann's task - Gilbert for the Moisila – Teodoresku system. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics, 5(22): 106–111.