УДК 530.1:303.732.4

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ОПИСАНИЯ ОПЫТНЫХ ДАННЫХ В ПРОСТРАНСТВАХ СОСТОЯНИЙ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

ON BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF DATABASE DESCRIPTION IN SPACES OF DIFFICULT SYSTEMS CONDITIONS

Г.В. Аверин[1], А.В. Звягинцева[1], М.В. Шевцова[1], А.С. Хоруженко[2]
G.V. Averin[1], A.V. Zviagintseva[1], M.V. Shevtsova[1], A.S. Khoruzhenko[2]

[1]Белгородский национальный исследовательский университет, Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85
[1]Belgorod National Research University, 85 Pobedy St, Belgorod, 308015, Russia

[2]Донецкий национальный технический университет, 83001, г. Донецк, ул. Артема, 58
[2]Donetsk National Technical University, 58 Artema St, Donetsk, 83001

E-mail: averin@bsu.edu.ru; zviagintseva@bsu.edu.ru; shevtsova@bsu.edu.ru; and_riy@ukr.net

Аннотация
Изучена проблема описания многомерных данных, характеризующих процессы изменения состояний систем различной природы, информация о которых может быть представлена в виде темпоральных массивов опытных данных. Каждая таблица такого массива имеет структуру «объекты-показатели», а множество таблиц упорядочено во времени с определенным шагом. Предложен метод создания моделей для описания данных, основанный на применении балансовых принципов по отношению к многомерным пространствам состояний сложных систем. Особенностью подхода является идея представления пространства состояний в виде гипотетической сплошной среды, а также применение гипотезы существования эмпирической меры для данной среды в виде функции многих переменных. В качестве переменных выступают параметры свойств объектов. Показано, что, используя предложенные гипотезы и особенности изменения во времени данных опыта или наблюдения, можно свести исходные модельные задачи к решению краевых задач для некоторых уравнений математической физики. Для примера сформулирована прикладная задача описания опытных данных предложенным методом. Полученные результаты позволяют развить способы обработки и описания данных наблюдений о процессах и состояниях сложных систем.

Abstract
The problem of database description is studied where database characterize processes of changing of systems conditions. Information on data can be presented in the form of temporal arrays of experimental data. Each table of such array has structure "objects - indicators", and the set of tables is ordered in time with a certain step. The method for the creation of models for the database description is offered. This method is based on using the balance sheet principles to multidimensional spaces of difficult systems conditions. Feature of approach is the idea of data representation in the form of the hypothetical continuous information environment, and also application of a hypothesis of empirical measure existence for this environment in the form of multivariable function. Parameters of object properties are variables. It is shown that using the offered hypotheses and features of experimental data which change in time, it is possible to reduce initial model problems to the solution of boundary value problems for some equations of mathematical physics. For an example the applied problem of experimental data description is formulated by the offered method. The received results allow to develop ways of processing and the description of these observations of processes and difficult systems conditions.

Ключевые слова: сложные системы, модели описания опытных данных, краевые задачи для пространств состояний систем, прикладные задачи.
Keywords: Difficult systems, models of the experimental data description, boundary value problems for spaces of systems conditions, applied problems.

Введение

В настоящее время в целом ряде областей знаний много внимания уделяется созданию новых методов моделирования. На повестке дня стоит разработка универсальной методологии описания систем различной природы. Решение данной проблемы возможно путем поиска перспективных направлений развития теории по отношению к различным классам объектов и явлений и целенаправленное применение общесистемных принципов по аналогии с логическими принципами, которые используются в естествознании и, в частности, в физике.

Применение естественнонаучных методов в различных предметных областях является актуальной задачей, т. к. область человеческого знания, связанная с естественными науками, наиболее развита. В этом плане особо хотелось бы выделить логические принципы построения моделей в физике сплошных сред и термодинамике. Исходные положения в данных науках основаны на постулировании фундаментальных закономерностей, свойственных физическим системам и установленных опытным путем [1]. В целом, это формирует универсальный логический метод построения теорий с использованием объективного подхода при описании систем, т. е. именно того подхода, на который особо обращал внимание академик П.Л. Капица [2].

В основе построения моделей в естествознании чаще всего лежат балансовые принципы, связанные с законами сохранения массы, импульса, энергии, численности и т. д. Данные законы изначально в своей природе несут определенное феноменологическое содержание. Очень часто грань между используемыми феноменологическими моделями и теоретическими зависимостями очень сложно провести. Если исходить из термина «феноменологический» как научного результата, который основан на опыте, то, например, уравнение состояния для определенного вещества можно отнести к феноменологической модели, а закон сохранения энергии – уже нет. Любое уравнение состояния находится на основе опытных данных путем выбора некоторой эмпирической зависимости, которая порой может иметь достаточно сложный вид. В свою очередь, уравнение сохранения энергии хотя и построено на основе данных опыта, но логически обобщает особенности множества физических процессов и поэтому в своей термодинамической форме несет элементы уже сформировавшейся теории. Поэтому при анализе положений в естествознании, первое, на что следует обратить внимание – это существование двух логических подходов в построении теорий, тесно связанных между собой и включающих в себя математическое и физическое содержание той или иной предметной области.

Вторая особенность многих теорий – это объединение в одну логическую форму положений статики и динамики явлений. При этом состояния сложных систем и связанные с этим понятия и закономерности формируют статические представления, а понятия, определения и законы, относящиеся к процессам, формируют динамические представления в соответствующей предметной области. Исходя из этого, в теории обычно имеются как модели, характеризующие пространство состояний систем, так и модели, позволяющие описывать процессы в этом пространстве. Для привнесения в теорию реального предметного содержания исходные математические модели основываются на использовании величин, которые позволяют верифицировать полученные зависимости по отношению к данным опыта. Эти величины в основном носят феноменологический характер, и их использование наблюдается на всех этапах формирования аналитической теории в любой предметной области.

В целом содержание предлагаемого общесистемного подхода можно представить следующим образом. Формируется непрерывное пространство состояний сложной системы относительно ее атрибутивных показателей. Данное пространство является универсальным, так как охватывает максимально возможную область наблюдения этих показателей в опыте для многих однотипных систем при различных внешних условиях. Пространство состояний предполагается непрерывным по отношению к представленным в нем процессам и состояниям, при этом существующие опытные данные рассматриваются как ограниченная дискретная выборка из непрерывного пространства. При таком подходе состояние объекта отображается точкой многомерного пространства, а процесс изменения состояния – некоторой кривой. Применительно ко всему пространству состояний строятся математические модели, например, с использованием балансовых принципов, и определяются феноменологические величины, позволяющие адаптировать полученные модели к опытным данным.

Таким образом, массивы данных наблюдений рассматривают в целом как объект моделирования. При этом создание моделей описания данных требует разработки количественных моделей, которые представляют данные с необходимой степенью точности. В каждой научной области сегодня применяется своя теория описания данных, при этом предполагается использование свойственных только данной области предметных гипотез, теоретических положений и адаптированного математического аппарата. В целом пока отсутствуют универсальные методы, которые формально были бы применимы в самых разных областях знаний для описания данных, представленных в общем структурированном виде. Поэтому, вполне естественно возникает вопрос о возможности применения общих подходов при описании количественной информации в случае, если опытные данные рассматривать как ограниченную выборку из сплошной континуальной среды [3, 4].

Целью статьи является развитие методов моделирования сложных систем на основе представления данных наблюдений в виде гипотетической континуальной среды и использования гипотезы существования эмпирической меры для данной среды в виде функции многих переменных. Предполагается, что это позволит формулировать краевые задачи для описания опытных данных с требуемой точностью. Актуальность данной задачи не вызывает сомнений, т.к. создание универсальных методов анализа и описания данных наблюдений или опыта для объектов и систем многомерной размерности является основной целью прикладного математического моделирования.

Опытные данные и принципы их описания

Для многих сложных систем информация, характеризующая процессы изменения их состояний, может быть представлена в виде таблично-временных (темпоральных) массивов данных. Подобные данные имеют структуру таблиц в виде матриц «объекты – показатели», причем множество таблиц упорядочено во времени (t). Такая логическая структура данных может быть применена к множеству простых случаев и имеет непосредственное отношение к многомерным пространствам состояний, в которых атрибуты объектов в виде показателей соответствуют атрибутивным переменным в принятых системах координат. В свою очередь, при совершении объектами процессов время выступает общим параметром по отношению к данным переменным. Структура темпоральных опытных данных, характеризующих многие сложные системы, в виде «объекты-показатели-время» показана на рисунке.

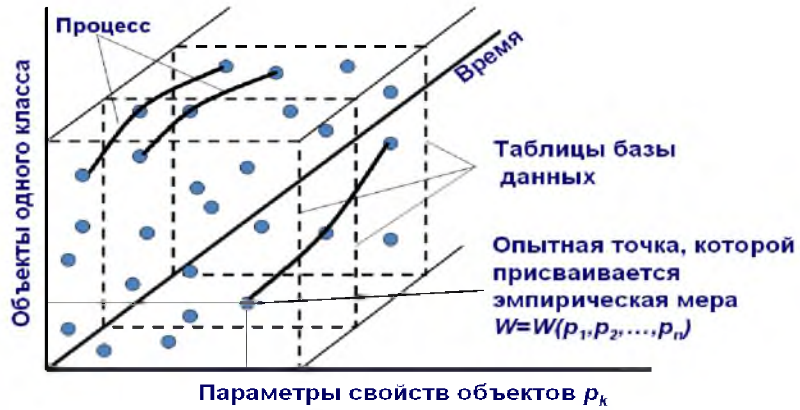

Рис. Структура темпоральных массивов опытных данных
Fig. Structure of temporal arrays of experimental data

В физике в качестве объектов могут выступать вещества, физические тела и т. д., а атрибутами – свойства этих объектов. В биологии аналогичными объектами могут быть виды животных и растений, биологические организмы, популяции и т. д., а атрибутивными переменными – характеристики и показатели биологических объектов.

При проведении формализации задачи предположим, что определенное множество однородных объектов в количестве m характеризуется n показателями $p_1, p_2,\dots,p_n$. Тогда в n-мерном пространстве координат $H^n\{p_1, p_2,\dots,p_n\}$ каждому изучаемому объекту будет соответствовать n значений координат p_k. Определим H^n как пространство наблюдаемых состояний для изучаемого множества объектов. Таким образом, каждый объект в определенный момент наблюдения находится в некотором состоянии и характеризуется совокупностью показателей $p_1, p_2,\dots,p_n$, которые изменяются с течением времени. Поэтому состояние любого объекта в n-мерном пространстве в каждый момент времени будет отображаться точкой $M = M(p_1, p_2,\dots,p_n)$, процесс изменения состояния объекта во времени – многомерной кривой, которая описывается точкой M в пространстве H^n.

Введем понятие эмпирической меры W пространства состояний H^n. Будем рассматривать эту меру как скалярную функцию пространства H^n, которая комплексно отражает состояние каждой точки M по отношению ко всей группе изучаемых объектов или в сравнении с некоторыми эталонными (опорными) объектами. Считаем, что величина W однозначно характеризует состояния объектов, зависит от их показателей $p_1, p_2,\dots,p_n$ и не может быть одним из этих показателей.

Для построения моделей описания данных, информация о которых может быть представлена в описанном выше виде, используем следующие принципы моделирования [3, 4]. Континуальный принцип представления опытных данных в пространстве H^n, который позволяет учитывать закономерности, свойственные изучаемой предметной области, и рассматривать имеющиеся данные как некоторую дискретную выборку из сплошной непрерывной среды. Принцип феноменологического описания массивов опытных данных позволит создавать модели континуального пространства в целом, исходя из учета связей эмпирической меры $W = W(M)$ с атрибутивными показателями объектов. Как следствие, предполагаем непрерывность пространства H^n, а также возможность существования в этом пространстве непрерывного скалярного поля эмпирической меры W, которое может быть математически описано.

Для построения общей модели описания данных предположим, что в области H^n можно задать некоторую функцию многих переменных $\theta(M)=\theta(p_1,p_2,...,p_n)$, которая будет выступать в виде аналитической среды моделирования. Данная функция позволяет сформировать скалярное поле величины $\theta(p_1,p_2,...,p_n)$ и может быть получена на основе использования различных методов. В работе [5] вид аналитических функций для описания среды моделирования задавался априори, при этом феноменологические модели определялись с учетом закономерностей формирования эмпирической меры в пространстве состояний. Для этого в любом процессе l вблизи произвольной точки M постулировалась связь вида $dW=c_l\cdot d\theta$, где c_l – феноменологические величины, которые определяются по опытным данным [5]. Другой метод описания данных может быть основан на использовании дифференциальных уравнений в частных производных, характеризующих особенности пространства состояний H^n, и применении балансовых закономерностей, которые свойственны всему пространству в целом.

Дифференциальные уравнения для формирования сред моделирования

Получим дифференциальные уравнения для определения функций, характеризующих среду моделирования и позволяющих описывать опытные данные, исходя из связи скалярных полей величин $W=W(M)$ и $\theta=\theta(M)$, а также особенностей формирования процессов в пространстве состояний H^n. Эмпирическая мера, также как и параметры свойств, изменяется с течением времени, т. е. справедливо соотношение $W(t)=W(p_1(t),p_2(t),...,p_n(t))$. Исходя из гипотезы полевого представления эмпирической меры в окрестности произвольной точки M, дифференциал величины W зависит от вектора направления процесса l в пространстве H^n. Примем гипотезу, что в точке M для любого процесса l и момента времени t существует связь между скалярными полями величин W и θ вида:

$$\frac{\partial W}{\partial l}=grad_l\ W(M)=\lambda(M)\cdot grad_l\ \theta(M), \tag{1}$$

где $\lambda(M)=\lambda(p_1,p_2,...,p_n)$ – коэффициент пропорциональности как функция точки пространства H^n, который определяет феноменологическую связь между величинами. Таким образом рассматривается потенциальное векторное поле градиента, для которого скалярная функция эмпирической меры является потенциалом поля. Справедливость закономерности (1) должна оцениваться в каждом конкретном случае исходя из имеющихся опытных данных. Отметим, что в той или иной форме закономерность (1) широко используется в физике сплошных сред.

Если представить замкнутую поверхность σ многомерного объема υ, выделенного в области H^n, то за время dt через элемент поверхности $d\sigma$ поток вектора $grad\,W(M)$ по направлению единичного вектора $\vec{n}$ будет равен:

$$dP=dt\cdot\iint\limits_{(\sigma)}\lambda\cdot grad_n\ \theta\ d\sigma\ . \tag{2}$$

Для величины P можно выдвинуть разные гипотезы об ее изменении во времени, которые будут связаны с сущностью этой величины. Например, для процессов, когда параметры свойств объектов не изменяются во времени, можно рассматривать стационарные краевые задачи. В свою очередь, для медленно протекающих процессов возможна формулировка краевых задач для параболических дифференциальных уравнений, а для быстропротекающих процессов – краевых задач для гиперболических или смешенных уравнений и т. д.

Предположим, что имеется опытная информация о поведении объектов, параметры свойств которых медленно меняются во времени. Пусть поток вектора P в пространстве состояний H^n подчиняется закону сохранения, тогда, используя балансовый метод, будем иметь:

$$dP=dt\cdot\iiint\limits_{(\upsilon)}\beta\cdot\frac{\partial\theta}{\partial t}d\upsilon=dt\cdot\iint\limits_{(\sigma)}\lambda\cdot grad_n\,\theta\ d\sigma\ , \tag{3}$$

где β – некоторая эмпирически определяемая функция пропорциональности, зависящая от значений параметров $p_1, p_2,..., p_n$.

Применяя к уравнению (3) формулу Остроградского-Гаусса, получим уравнение параболического типа для нахождения функции $\theta(p_1, p_2,..., p_n)$, характеризующей среду моделирования:

$$\beta \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} = div(\lambda \cdot grad\ \theta) \quad \text{или} \quad \beta \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p_1}\left(\lambda \cdot \frac{\partial \theta}{\partial p_1}\right) + ... + \frac{\partial}{\partial p_n}\left(\lambda \cdot \frac{\partial \theta}{\partial p_n}\right). \tag{4}$$

Данное дифференциальное уравнение аналогично нестационарному уравнению конвективной диффузии при его обобщении на n-мерный случай.

Решения дифференциального уравнения (4) и данные опыта или наблюдения в виде темпоральных массивов информации позволят проверить исходные гипотезы и изучить возможность определения феноменологических величин $\lambda(M)$ и $\beta(M)$. Поэтому в данном случае задача описания данных опыта или наблюдения сводится к решению обратных краевых задач для уравнения параболического типа и определению искомых величин по данным, которые собраны при наблюдении за процессами изменения параметров свойств объектов во времени.

Аналогичным образом, используя разные гипотезы по отношению к процессам изменения величин во времени, можно приходить к различным краевым задачам математической физики и осуществлять проверку адекватности теоретических моделей по отношению к данным наблюдений для систем различной природы.

Пример формулировки краевой задачи для пространства состояний сложной системы

Существует множество темпоральных баз данных, которые несут информацию о различных классах природных и биологических объектов. Есть примеры создания подобных баз данных в физике и химии [5, 6], климатологии и метеорологии [7], астрономии [8], глобалистике [9, 10], токсикологии [11], в области изучения биоразнообразия [12] и т. д.

При формулировке краевых задач описания данных в пространствах состояний сложных систем основная проблема связана с выбором величин в качестве эмпирических мер. В общем случае удобно для этой цели использовать вероятностные методы, которые позволяют любые наблюдения рассматривать в виде событий. Состояния каждого объекта могут характеризоваться не только показателями $p_1, p_2,..., p_n$, но и некоторыми наблюдаемыми событиями, которые отражают характерные изменения в изучаемой системе и объектах этой системы. Рассмотрим сложное совместное событие одновременного наблюдения нескольких показателей. Определим, что состояние каждого объекта может также оцениваться данным наблюдаемым событием. Обозначим данное событие как «событие j», и будем считать, что оно позволяет характеризовать в целом состояние объекта в определенный момент времени. Найдем статистическую вероятность этого события на основе опытных данных, которые имеются в базе данных, с использованием алгоритмов сортировки, группировки и подсчета частот благоприятных событий. Примем данную вероятность в качестве эмпирической меры пространства состояний системы. Данная величина является универсальной характеристикой для комплексной оценки состояния объектов, так как статистическая вероятность события j может быть оценена по отношению ко всей группе изучаемых объектов по опытным данным. Для оценки вероятности совместного события используются методы алгоритмического определения вероятностей [3, 4]. С этой целью статистическая вероятность w находится через относительные частоты событий j путем разбиения всего пространства H^n на многомерные параллелепипеды, исходя из заданного количества интервалов группирования для каждой переменной p_k (обычно одинакового для всех p_k). После этого подсчитываются относительные частоты событий, которые равны отношению количества опытных точек, попадающих в заданные области группирования, к общему числу всех наблюдаемых точек. Статистическая вероятность принимается в виде кумулятивных относительных частот изучаемых событий. Таким образом, статистические вероятности события j оцениваются вычислительным методом путем непосредственного подсчета вероятностей. Это позволяет каждому элементу пространства H^n присвоить эмпирическое значение статистической вероятности наблюдения объекта с определенными значениями показателей в данной области пространства. С другой стороны, для скалярного поля вероятности событий может быть принята модель в виде краевой задачи описания опытных данных (4). Поэтому использование данных о состоянии и динамике систем, а также непосредственный алгоритмический расчет вероятностей событий, связанных с наблюдением показателей, позволит установить феноменологические закономерности для изучаемого класса систем. Таким образом, определить эмпирическую меру можно путем оценок статистических вероятностей событий, характеризующих местоположение опытной точки относительно всей группы изучаемых объектов (всего облака опытных точек).

Для реализации предлагаемых методов в качестве примера рассмотрим базу данных биологических характеристик и показателей позвоночных животных [12], которая представляет собой результат большой работы многих ученых. Последняя версия базы включает структурированные и достоверные сведения о 4083 видах позвоночных и охватывает количественные характеристики рыб, амфибий, рептилий, птиц и млекопитающих. В базу внесены данные о максимальной продолжительности жизни, массе тела при рождении и во взрослом состоянии, скорости роста и размножения, времени полового созревания, продолжительности беременности, интенсивности метаболизма, а также некоторые другие характеристики (всего более 25 показателей). Имеется также полная информация о систематике биологических видов позвоночных животных. Такая база данных позволяет сформировать многомерное информационное пространство для исследований характеристик биологических видов и получения новых закономерностей и зависимостей [13].

Для упрощения и наглядности рассмотрим биологическую систему, состояния объектов которой характеризуются двумя или тремя параметрами и одной эмпирической мерой. С этой целью из базы данных [12] сделаем выборку и создадим массив информации в виде таблицы «объекты-показатели»: объекты – биологические виды; атрибутивные показатели видов – масса тела p_1, продолжительность жизни в неволе p_2 и интенсивность метаболизма p_3, как наиболее изученные характеристики. В случае, если в процессе построения моделей рассматривать два показателя p_1 и p_2, то в массив данных будет входить 2548 опытных точек, при рассмотрении трех показателей p_1, p_2 и p_3 – 546 опытных точек [13].

Дифференциальное уравнение (4) для двух показателей p_1 и p_2 представляется в виде

$$\beta\cdot\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial p_1}\left(\lambda\cdot\frac{\partial\theta}{\partial p_1}\right)+\frac{\partial}{\partial p_2}\left(\lambda\cdot\frac{\partial\theta}{\partial p_2}\right),\tag{5}$$

при этом для его решения необходимо сформулировать граничные условия. Согласно формуле (1) изменение статистической вероятности W непосредственно связано со значениями модельной функции $\theta(M)=\theta(p_1,p_2)$. Для получения граничных условий воспользуемся свойствами двумерной функции распределения вероятностей. Известно, что если один из аргументов стремится к плюс бесконечности, то двумерная функция распределения вероятности W стремится к одномерной функции распределения, соответствующей другому аргументу:

$$\lim_{p_1\to\infty}W(p_1,p_2)=W_2(p_2);\quad \lim_{p_2\to\infty}W(p_1,p_2)=W_1(p_1)\,.\tag{6}$$

В свою очередь, так как значения показателей массы и продолжительности жизни вида всегда больше или равны нулю, то из свойств распределения вероятностей следует, что:

$$\lim_{p_1\to 0}W(p_1,p_2)=\lim_{p_2\to 0}W(p_1,p_2)=0\;.\tag{7}$$

Из соотношений (6) и (7) можно получить граничные условия для функции $\theta(M)=\theta(p_1,p_2)$. Учитывая также, что средние показатели биологических видов постоянны во времени (в базе банных [12] существует только одна таблица данных), приходим к стационарной краевой задаче описания опытных данных вида:

$$\frac{\partial}{\partial p_1}\left(\lambda\cdot\frac{\partial\theta}{\partial p_1}\right)+\frac{\partial}{\partial p_2}\left(\lambda\cdot\frac{\partial\theta}{\partial p_2}\right)=0\,.\tag{8}$$

при следующих граничных условиях:

$$\theta(p_1,p_2)=0 \text{ при } p_1=0 \text{ или } p_2=0;\quad \frac{\partial\theta}{\partial p_1}=0 \text{ при } p_1\to\infty;\quad \frac{\partial\theta}{\partial p_2}=0 \text{ при } p_2\to\infty.\tag{9}$$

Уравнение (8) является одним из видов дифференциальной формы общего уравнения непрерывности. Некоторые решения задачи (8) – (9) при определенных видах функции $\lambda(p_1,p_2)$ приводятся в литературе [14, 15 и др.]. Вид данной функции должен выбираться с учетом особенностей опытных данных. Дальнейшее развитие данной работы будет связано с разработкой алгоритмов описания опытных данных исходя из решения обратных краевых задач для полученных уравнений.

Выводы

Предложенный метод описания темпоральных опытных данных позволяет исследовать феноменологические закономерности, свойственные изучаемым сложным системам. Особенностью данного подхода является переход к идее представления данных опыта в виде гипотетической сплошной среды. Используя гипотезу о непрерывности пространства состояний сложных систем, принцип существования эмпирической меры и возможность ее представления в виде скалярного поля, можно применить существующий аппарат математической физики при изучении систем различной природы. При этом, учитывая особенности изменения эмпирической меры во времени, приходим к формулировке краевых задач для различных дифференциальных уравнений в частных производных.

Список литературы
References

1. Гухман А.А. 1986. Об основаниях термодинамики. М., Энергоатомиздат, 383.

Gukhman A.A. 1986. Ob osnovanijah termodinamiki [About the thermodynamics bases]. Moscow, Jenergoatomizdat, 383. (in Russian).

2. Капица П.Л. 1981. Эксперимент, теория, практика. М., Наука, 495.

Kapitsa P.L. 1981. Jeksperiment, teorija, praktika [Experiment, theory, practice]. Moscow, Nauka, 495. (in Russian).

3. Аверин Г.В. 2014. Системодинамика. Донецк, Донбасс, 405. URL: http://www.chronos.msu.ru/ru/rrules/item/sistemodinamika-2 (30.08.16).

Averin G.V. 2014. Sistemodinamika [Systemdynamics]. Doneck, Donbass, 405. Available at: http://www.chronos.msu.ru/ru/rrules/item/sistemodinamika-2 (accessed 5 apr 2017). (in Russian).

4. Звягинцева А.В. 2016. Вероятностные методы комплексной оценки природно-антропогенных систем / Под науч. ред. д.т.н., проф. Г.В. Аверина. М., Спектр, 257.

Zviagintseva A.V. 2016. Verojatnostnye metody kompleksnoj ocenki prirodno-antropogennyh sistem [Probabilistic methods of a complex assessment of natural and anthropogenic systems] / Pod nauch. red. d.t.n., prof. G.V. Averina. Moscow, Spektr, 257. (in Russian).

5. Звягинцева А.В., Аверин Г.В. 2016. Интегрирование отдельных многомерных уравнений Пфаффа, имеющих важное прикладное значение. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Сер. Математика. Физика, 27 (248). Выпуск 45: 123–131.

Zviagintseva A.V., Averin G. V. 2016. Integrirovanie otdel'nyh mnogomernyh uravnenij Pfaffa, imejushhih vazhnoe prikladnoe znachenie [Integration of the several multivariate Pfaff equations which are important in application]. Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Matematika. Fizika [Scientific lists of the Belgorod state university. Mathematics. Physics, 27 (248)]. Issue 45: 123–131. (in Russian).

6. Александров А.А., Орлов К.А, Очков В.Ф. 2009. Теплофизические свойства рабочих веществ теплоэнергетики. М., МЭИ, 224.

Alexandrov A.A., Orlov K.A, Ochkov V.F. 2009. Teplofizicheskie svojstva rabochih veshhestv teplojenergetiki [Heatphysical properties of working substances of power system]. Moscow, MEI, 224.

7. Archives of the repeated analysis of climatic data of the World climatic center (AMIP/DOE Reanalysis aka NCEP/NCAR R2, ERA-Interim, MERRA, 20CR – 20 Century Reanalysis). Available at: http://meteo.ru/data (accessed 5 apr 2017).

8. Астрометрические звездные каталоги. URL: www.astro.spbu.ru/ (07.04.17).

Astrometric star directories. Available at: www.astro.spbu.ru/ (accessed 7 apr 2017). (in Russian).

9. Database of the World Bank. Available at: www.worldbank.org/data/icp (accessed 7 apr 2017).

10. Database of the Program of UN development. Available at: http://hdr.undp.org/reports/view_reports.cfm (accessed 7 apr 2017).

11. Вредные химические вещества. Справочник / Под ред. В.А. Филова. Л., Химия. Неорг. соед. эл-тов V-VIII групп, 1989, 592 с.; Неорг. соед. эл-тов I-IV групп, 1988, 512 с.

Harmful chemicals. The reference manual / Pod red. V.A. Filov. L., Himija. Neorg. soed. jel-tov V-VIII grupp, 1989, 592 p.; Neorg. soed. jel-tov I-IV grupp, 1988, 512 p.

12. AnAge: The Animal Ageing and Longevity Database. Available at: http://genomics.senescence.info/species/ (accessed 7 apr 2017).

13. Аверин Г.В., Звягинцева А.В. 2016. Построение уравнений состояний сложных систем на основе событийной оценки индикативных показателей. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Сер. Экономика. Информатика, 23 (244). Выпуск 40: 77–86.

Averin G.V., Zviagintseva A.V. 2016. Postroenie uravnenij sostojanij slozhnyh sistem na osnove sobytijnoj ocenki indikativnyh pokazatelej [Creation of the equations of difficult systems conditions on the basis of event assessment of indicators]. Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Jekonomika. Informatika [Scientific lists of the Belgorod state university. Economics. Informatics], 23 (244). Issue 40: 77–86. (in Russian).

14. Кошляков И.С. 1970. Уравнения в частных производных математической физики. М., Выш. шк., 712.

Koshlyakov I.S. 1970. Uravnenija v chastnyh proizvodnyh matematicheskoj fiziki [Partial equations of mathematical physics]. Moscow, Vsh. shk, 712.

15. Лыков А.В. 1967. Теория теплопроводности. М., Выш. шк., 600.

Lykov A. V. 1967. Teorija teploprovodnosti [Theory of heat conductivity]. Moscow., Vsh. shk, 600.