УДК 517.927

ОБ АНАЛОГАХ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА И УСЛОВИЯ ЛЕЖАНДРА ДЛЯ ОДНОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ НА ГРАФЕ

ON THE ANALOGS OF EULER EQUATION AND LEGENDRE CONDITIONS FOR ONE VARIATIONAL PROBLEM ON A GRAPH

Н.Н. Рябцева, Е.В. Кормош
N.N. Ryabtseva, E.V. Kormosh

Белгородский университет кооперации, экономики и права,
Россия, 308023, Белгород, ул. Студенческая, 116а

Belgorod University of Cooperation, Economics and Law, 116a, Sadovaya St., Belgorod, 308023, Russia

E-mail: kaf-end@bukep.ru

Аннотация
Устанавливается аналог классической теоремы Якоби о положительной определённости второй вариации для функционала, заданного на функциях ветвящегося аргумента из пространственной сети (геометрического графа). Особенности соответствующего аналога уравнения Якоби (как и уравнения Эйлера) порождены процедурой интегрирования по частям, приводящей к дифференцированию по состыкованным мерам.

Abstract
The analogue of classical Jacobi theorem about positive definiteness of the second variation for the functional that determined on the functions of the ramified argument from a spatial network (geometrical graph) is established. The specificities of the corresponding Euler equation and Jacobi equation is generated by the integration by parts procedure. This procedure leads to differentiation in the sense of a snap-together measures.

Ключевые слова*:* пространственная сеть, дифференцирование по мере, интегральный функционал, уравнение Эйлера, вторая вариация, уравнение Якоби, аналог теоремы Якоби.
Keywords*:* spatial network, differentiation in the sense of measure, integral functional, second variation, Euler equation, second variation, Jacoby equation, analogue of the Jacobi theorem.

Введение

В современном естествознании, физике, в инженерном проектировании и инженерной практике достаточно часто возникает проблема конструирования и расчетов объектов, которые имеют в пространстве форму решетки, рамы, т. е. некоторой пространственной сети, примером которых могут быть различного рода инженерные сети: системы трубопроводов, гидравлические сети, электрические сети; упругие системы строительной механики: решетки, рамы; модель электронных колебаний сложной молекулы, модели процессов в нейронных сетях и др. Такого рода объекты уже более столетия представляли весьма трудную проблему для эффективных расчетов, поскольку примитивное математическое моделирование, представляющее подобные объекты в виде системы дифференциальных уравнений ввиду не только объема информации, но и сложности этой информации (в расчетах должно учитываться условие сопряжения этих элементов), представляло собой необозримую по сложности задачу. Эффективные математические методы начали внедряться в моделирование подобных систем сравнительно недавно – всего лишь около 30 лет назад. В настоящее время научная активность в этом направлении достаточно высока. В работе в качестве математической модели сложных систем рассматриваются необходимые условия экстремума общего интегрального функционала на множестве функций с ветвящимся аргументом, который принимает значения из некоторого геометрического графа. Устанавливается достаточно полный аналог уравнения Эйлера при условиях, не требующих существования и непрерывности вторых частных производных функции F, а также и необходимое условие, типа классического условия Лежандра.

Рассмотрим функционал, определяемый записью

$$\Phi(u)=\int_{\Gamma}F(x,u(x),u'(x))dx=\sum_{i=1}^{m}\int_{\gamma_i}F(x,u(x),u'(x))dx\,, \tag{1}$$

где $u(x)$ – скалярнозначные функции, заданные на геометрическом связном графе Γ, т. е. u: $\Gamma\to R$. Мы рассматриваем здесь только непрерывные функции, заданные на Γ, предполагая их равномерно непрерывными на Γ и обозначая их множество через $C_{[\Gamma]}$. Для удобства мы предполагаем также, что каждая из рассматриваемых функций дифференцируема на каждом ребре γ_i так, что ее сужение u_i на γ_i оказывается элементом пространства $C^1_{[\gamma_i]}$. Для определенности процедуры дифференцирования нам необходимо задание ориентации на каждом ребре, т. е. выбора одного из двух возможных направлений единым образом сразу на всем ребре (тем самым граф должен быть ориентированным). Функцию F трех аргументов, определяющую подынтегральное выражение в (1), мы считаем заданной по первому аргументу – на Γ, по второму и третьему – на R, т. е. $F:\Gamma\times R\times R\to R$. Там, где это потребуется мы функцию F будем считать регулярной, т. е. достаточно гладкой – обсуждаемые проблемы определяются другими обстоятельствами, а не трудностями, связанными с потерей гладкости. Описанные договоренности позволяют считать подынтегральное выражение в (1) заданным и непрерывным на каждом ребре, если фиксирована функция $u(x)$. Аналогом классического закрепления концов будет условие задания фиксированного набора предельных значений u из $C^1[\Gamma]$: $\{u(a)\}_{a\in\partial\Gamma}$, и множество таких функций обозначим через L. L есть линейное многообразие в $C^1[\Gamma]$.

Рассмотрим задачу:

$$\Phi(u)\to\min_{u\in L},$$

в предположении, что дающая минимум функция $u_0(x)$ – достаточно гладкая, а также функция $F(x, u, u')$, определяющая функционал, достаточно гладкая. Аналогом классической теоремы Эйлера-Лагранжа [1] является следующий факт.

Теорема 1. Пусть F дважды непрерывно дифференцируема. Пусть $u_0(x)$ из L является точкой локального минимума функционала (1), причем $u_0\in C^2[\Gamma]$. Тогда на каждом ребре γ_i для нее справедливо тождество

$$F_u(x,u_0(x),u_0'(x))-\frac{d}{dx}F_{u'}(x,u_0(x),u_0'(x))=0\,, \tag{2}$$

а в каждой внутренней вершине $a\in J(\Gamma)$ справедливо условие

$$\sum\phi_i(a)F_{u'}^{(\gamma_i)}(a,u_0(a),(u_0)_i'(a))=0\,. \tag{3}$$

Через $\Gamma(a)$ обозначен набор примыкающих к a ребер. Число $\phi_i(a)$ равно 1, если ребро γ_i ориентировано «от a», и равно -1, если γ_i ориентировано «к a». Через $(u_0)_i'(a)$ обозначен предел $(u_0)'(x)$ при x, стремящимся к a по ребру γ_i.

Если $u_0(x)$ – точка экстремума данного функционала, то реализация классической схемы Лагранжа в виде минимизации функции $\Phi(u_0+\lambda h)$ при произвольном допустимом h приводит к первой вариации:

$$\delta\Phi(u_0)h=\frac{d}{d\lambda}\left[\Phi(u_0+\lambda h)\right]_{\lambda=0}=\left(\sum_i\int_{\gamma_i}\right)\left[F_uh+F_{u'}h'\right]dx+\sum_{a\in I(\Gamma)}F_u^{\circ}(a,u(a))h(a)\,,$$

причем должно быть $\delta\Phi(u_0)h=0$ для любой допустимой h. Отсюда стандартным образом следуют в силу произвола $h(x)$ аналоги обычных уравнений Эйлера и условие типа

$$\left[\sum_i F_{u_i'}(a,u(a),u_i'(a))\right]+F_u^{\circ}(a,u_0(a))=0\,,$$

которые в приложениях реализуются в виде так называемых условий трансмиссии, т. е. условий стыковки решений, подходящих к узлу a вдоль разных ребер.

Систему (2), (3) будем называть уравнением Эйлера для функционала (1). Решение уравнения Эйлера для функционала (1) будем называть экстремалью этого функционала, а решение этого уравнения, принадлежащее L, будем называть допустимой экстремалью функционала (1).

Требование о двукратной дифференцируемости u_0 в доказательстве этой теоремы 1 мы использовали только для того, чтобы иметь возможность говорить о производной $\frac{d}{dx}\left[F_{u'}(x,u_0(x),u_0'(x))\right]$, имея в виду, что если $u_0''(x)$ существует, то и $\frac{d}{dx}\left[F_{u'}(x,u_0(x),u_0'(x))\right]$ существует в силу известной теоремы о производной от суперпозиции функций. В действительности же требование о существовании второй производной у функции u_0 в теореме является излишним, о чем и говорит следующая лемма.

Лемма. Пусть выполнены условия теоремы 1, с той лишь разницей, что предположение $u_0 \in C^2[\Gamma]$ заменено на $u_0 \in C^1[\Gamma]$. Тогда $\frac{d}{dx}\left[F_{u'}(x,u_0(x),u_0'(x))\right]$ существует при всех $x \in R(\Gamma)$ и принадлежит $C[R(\Gamma)]$.

В силу вышесказанного вытекает справедливость утверждения, являющегося аналогом теоремы Дю-Буа-Реймона классического вариационного исчисления[2].

Теорема 2. Если в

условии теоремы 1 условие $u_0 \in C^2[\Gamma]$ заменить на условие $u_0 \in C^1[\Gamma]$, то утверждения этой теоремы останутся верными.

Далее, если y_i – функция, заданная на Γ или на $R(\Gamma)$, то y_i обозначает сужение y на ребро γ_i.

Будем говорить, что функция F трижды непрерывно дифференцируема, если для любого ребра γ_i все частные производные третьего порядка функции $F^{(\gamma_i)}$ непрерывны на $\gamma_i \times R \times R$ и, более того, непрерывно доопределяемы на $[\gamma_i] \times R \times R$.

Теорема 3. Пусть F трижды непрерывно дифференцируема. Пусть вторая вариация функционала (1) неотрицательна для всех $h \in L_0$. Тогда $F_{u'u'}(x,u_0(x),u_0'(x)) \geq 0$ на $R(\Gamma)$.

Вторая вариация функционала (1) состоит из хорошо известных для задач на отрезке компонент и имеет вид:

$$\delta^2\Phi(u_0)h = \sum_i \int_{\gamma_i}\left[h^2\left(F_{uu} - \frac{d}{dx}F_{uu'}\right) + F_{u'u'}h'^2\right]dx + \sum_a \left(F^{\circ}_{uu} - F_{uu'}\right)h^2(a). \quad (4)$$

Переобозначая, как это обычно делается, $M(x) = F_{u'u'}(x,u_0(x),u_0'(x))$, $N(x) = F_{uu}(x,u_0(x),u_0'(x))$, $Q(x) = F_{uu'}(x,u_0(x),u_0'(x))$ мы можем придать второй вариации канонический вид квадратичного функционала:

$$\delta^2\Phi(u_0)h = \sum_i \int_{\gamma_i}\left(Mh'^2 + (N - Q')h^2\right)dx + \sum_a \left(F^{\circ}_{uu} - F_{uu'}\right)h^2(a), \quad (5)$$

где последняя группа слагаемых суммируется по внутренним узлам.

Рассмотрим теперь в (5) $h \in L_j$, где $L_j = \{h \in L_0 \mid h_i \equiv 0, i \neq j\}$, тогда для любой $a \in J(\Gamma)$ выполнено $h(a)=0$. Таким образом, из неотрицательности второй вариации функционала для всех $h \in L_0$ вытекает, что

$$\int_{\gamma_{ji}}\left(M_j h_j'^2 + (N_j - Q_j')h_j^2\right)dx \geq 0$$

для всех $h_j \in C_0^1[\gamma_j]$, где $C_0^1[\gamma_j] = \{h_j \in C^1[\gamma_j] \mid h_j(a_j) = h_j(b_j) = 0\}$. Если теперь применим к последнему неравенству известный результат для квадратичного функционала на отрезке, получим, $M_j(x) \geq 0$. Так как j выбрано произвольно, то это и означает, что $M(x) \geq 0$ на $R(\Gamma)$.

Заключение

В работе рассмотрены, в качестве математической модели сложных систем, необходимые условия экстремума общего интегрального функционала на множестве функций с ветвящимся аргументом, т. е. аргументом, принимающим значения из некоторого геометрического графа. Установлен достаточно полный аналог уравнения Эйлера при условиях, не требующих существования и непрерывности вторых частных производных функции F, а также и необходимое условие, типа классического условия Лежандра.

Список литературы
References

1. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А. 2003. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М.: ФИЗМАТЛИТ: 272 .

Pokorny Y. V., Penkin O. M., Pryadiev V. L., Borovskikh A. V., Lazarev K. P., et Shabrov S. A. 2003. Equationes Differentiales in geometrica graphs. M.: FISMAT: 272.

2. Покорный Ю.В., Покорная И.Ю., Прядиев В.Л., Рябцева Н.Н. 2007. Об интегрировании в вариационных неравенствах на пространственных сетях. Математические заметки, 81, 6: 904-911.

Pokornyi Yu.V., Pokornaya I.Yu., Pryadiev V.L., Ryabtseva N.N. 2007. Integration in variational inequalities on spatial grids. Mathematical Notes, 81,6: 810-816.