УДК 512.62

О СИММЕТРИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

ON SYMMETRIC POLYNOMIALS OF A SPECIAL FORM

С.М. Рацеев [1] , О.И. Череватенко [2]
S.M. Ratseev, O.I. Cherevatenko

[1]Ульяновский государственный университет, 432017, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, 42.

Ulyanovsk State University, 432017, Ulyanovsk, Lev Tolstoy 42

[2]Ульяновский государственный педагогический университет имени И.Н.Ульянова, 432063, г. Ульяновск, пл. 100-летия со дня рождения В.И. Ленина, 4.

Ulyanovsk State I.N.Ulyanov Pedagogical University, Ploshchad' 100-letiya so dnya rozhdeniya V.I. Lenina, 4

E-mail: ratseevsm@mail.ru; chai@pisem.net

Аннотация. Работа посвящена исследованию симметрических многочленов специального вида. Получены критерии симметричности таких многочленов. Данная задача является частным случаем очень сложных задач о подходах к классификации первичных многообразий ассоциативных алгебр над полями положительной характеристики.

Resume. The paper is devoted to the study of symmetric polynomials of a special form. The necessary and sufficient conditions for the symmetry of such polynomials. This problem is a special case of very difficult problems on approaches to the classification of the prime varieties of associative algebras over fields of positive characteristic.

Ключевые слова: многочлен, симметрический многочлен.
Key words: polynomial, symmetric polynomial.

Введение

Один из способов изучения свойств многочленов из кольца $R[x_1,\ldots,x_n]$ над кольцом R состоит в описании таких многочленов, которые не изменяются при различных преобразованиях этого кольца. Одним из важных классов таких многочленов являются многочлены, которые являются инвариантными относительно действия элементов симметрической группы S_n, то есть такие многочлены $f(x_1,\ldots,x_n)\in R[x_1,\ldots,x_n]$, для которых выполнено равенство

$$f(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)}) = f(x_1,\ldots,x_n),\ \sigma\in S_n.$$

Такие многочлены называются симметрическими многочленами. Основными симметрическими многочленами в кольце $R[x_1,\ldots,x_n]$ являются

$$\sigma_k(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} x_{i_1}\ldots x_{i_k},\ \ 1\le k\le n.$$

Основная теорема теории симметрических многочленов гласит, что любой симметрический многочлен может быть представлен единственным образом в виде многочлена от основных симметрических многочленов.

Симметрические функции имеют приложения в комбинаторике, алгебраической геометрии, теории представлений и т.д. (см., например, [1, 2, 3]).

Данная работа посвящена исследованию симметрических многочленов специального вида. Эта задача является частным случаем чрезвычайно сложных задач, возникших в работах А.Р.Кемера [4] о подходах к классификации первичных многообразий ассоциативных алгебр над полями положительной характеристики.

Пусть K — некоторое поле, X и Y — некоторые счетные множества, причем $X \cap Y = \varnothing$. Целью данной работы является описание всех симметрических многочленов относительно переменных $x_1,\dots,x_n$ и $y_1,\dots,y_n$ вида

$$\sum \alpha_{i_1\dots i_k j_1\dots j_k}(x_{i_1}y_{j_1}+1)\dots(x_{i_k}y_{j_k}+1),\ \alpha_{i_1\dots i_k j_1\dots j_k}\in K, \tag{1}$$

где $x_{i_1},\dots,x_{i_k}\in X$, $y_{j_1},\dots,y_{j_k}\in Y$, причем $x_{i_1},\dots,x_{i_k}$ попарно различны и $y_{j_1},\dots,y_{j_k}$ попарно различны.

Хорошо известное строение кольца всех симметрических многочленов не зависит от характеристики основного поля. Для многочленов вида (1) это уже не так. Размерности пространств таких многочленов существенно зависят от характеристики основного поля. В частности, над полями положительной характеристики такие ненулевые многочлены вообще могут отсутствовать.

1. Симметрические многочлены специального вида

Определим умножение элементов вида $(x_{i_1}y_{j_1}+1)\dots(x_{i_k}y_{j_k}+1)$ и $(x_{a_1}y_{b_1}+1)\dots(x_{a_n}y_{b_n}+1)$ следующим образом:

$$(x_{i_1}y_{j_1}+1)\dots(x_{i_k}y_{j_k}+1)\cdot(x_{a_1}y_{b_1}+1)\dots(x_{a_n}y_{b_n}+1)=$$
$$=\begin{cases}(x_{i_1}y_{j_1}+1)\dots(x_{i_k}y_{j_k}+1)(x_{a_1}y_{b_1}+1)\dots(x_{a_n}y_{b_n}+1), & \textit{если}\ \{i_1,\dots,i_k\}\cap\{a_1,\dots,a_n\}=\varnothing\ \textit{и}\\ & \{j_1,\dots,j_k\}\cap\{b_1,\dots,b_n\}=\varnothing,\\ 0, \textit{иначе} & \end{cases}$$

Распространим это правило на все многочлены вида (1), используя линейность. Не трудно заметить, что полученное множество относительно операций + и $\cdot$ будет являться ассоциативным коммутативным кольцом с единицей.

Пусть K — некоторое поле. Рассмотрим многочлены вида

$$\sum \alpha_{i_1\dots i_k j_1\dots j_k}(x_{i_1}y_{j_1}+1)\dots(x_{i_k}y_{j_k}+1),\ \alpha_{i_1\dots i_k j_1\dots j_k}\in K, \tag{2}$$

где $\{i_1,\dots,i_k\}\subseteq\{1,\dots,n\}$, $\{j_1,\dots,j_k\}\subseteq\{1,\dots,n\}$, $\#\{i_1,\dots,i_k\}=\#\{j_1,\dots,j_k\}=k$.

Ввиду коммутативности скобок, можно считать, что $j_1<j_2<\dots<j_k$ в каждом слагаемом из (2).

Пусть A_n^k — множество всех размещений без повторений из n элементов по k множества $\{1,\dots,n\}$. То есть множество A_n^k состоит из упорядоченных выборок вида $(i_1,\dots,i_k)$, где $\{i_1,\dots,i_k\}\subseteq\{1,\dots,n\}$ и $i_1,\dots,i_k$ попарно различны.

Обозначим через $F_k^n(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)$, где $1\le k\le n$, многочлен вида (2), в котором каждое слагаемое состоит ровно из k скобок. Тогда многочлен F_k^n имеет такой общий вид:

$$F_k^n(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)=\sum_{\substack{(i_1,\dots,i_k)\in\mathsf{A}_n^k\\ 1\le j_1<\dots<j_k\le n}}\alpha_{i_1\dots i_k j_1\dots j_k}(x_{i_1}y_{j_1}+1)\dots(x_{i_k}y_{j_k}+1), \tag{3}$$

то есть сумма берется по всем элементам множества A_n^k и по всем k-элементным подмножествам $\{j_1,\dots,j_k\}$ в множестве $\{1,\dots,n\}$, при этом $j_1<j_2<\dots<j_k$.

Лемма 1. *Пусть K — поле нулевой характеристики и $n\in\mathbb{N}$. Многочлен $F_1^n(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)$ является симметрическим многочленом относительно переменных $x_1,\dots,x_n$ тогда и только тогда, когда он имеет такой вид:*

$$F_1^n(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)=\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{j=1}^n \beta_j y_j\right)+n\cdot\sum_{j=1}^n\beta_j,\ \ \beta_j\in K.$$

Многочлен $F_1^n(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)$ является симметрическим многочленом относительно переменных $x_1,\dots,x_n$ и $y_1,\dots,y_n$ тогда и только тогда, когда он имеет такой вид:

$$F_1^n(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)=\beta\cdot\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{j=1}^n y_j\right)+n^2\cdot\beta,\quad \beta\in K.$$

Доказательство. Учитывая (3), многочлен F_1^n имеет такой общий вид:

$$F_1^n(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\alpha_{ij}(x_iy_j+1),\quad \alpha_{ij}\in K.$$

После преобразования получаем

$$F_1^n(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\alpha_{ij}(x_iy_j+1)=\sum_{i=1}^n x_i\left(\sum_{j=1}^n\alpha_{ij}y_j\right)+\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\alpha_{ij}.$$

Для любой перестановки $\sigma\in S_n$ выполнено равенство $\sigma F_1^n=F_1^n$ тогда и только тогда, когда для любых $i_1,i_2\in\{1,2,\ldots,n\}$ выполнено равенство $\alpha_{i_1j}=\alpha_{i_2j}$, то есть коэффициенты α_{ij} не зависят от i. Обозначим $\alpha_{ij}=\beta_j$. Поэтому элемент F_1^n, симметричный относительно переменных $x_1,\ldots,x_n$, имеет такой вид:

$$F_1^n(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)=\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{j=1}^n\beta_jy_j\right)+n\cdot\sum_{j=1}^n\beta_j,\quad \beta_j\in K. \tag{4}$$

При этом многочлен F_1^n вида (4) симметричен относительно переменных $y_1,\ldots,y_n$ тогда и только тогда, когда для любых i и j выполнено равенство $\beta_i=\beta_j=\beta$.

Поэтому многочлен $F_1^n(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)$ является симметрическим многочленом относительно переменных $x_1,\ldots,x_n$ и $y_1,\ldots,y_n$ тогда и только тогда, когда он имеет такой вид:

$$F_1^n(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)=\beta\cdot\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{j=1}^n y_j\right)+n^2\cdot\beta,\quad \beta\in K.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть K — поле нулевой характеристики и $n\in\mathbb{N}$. Многочлен $F_2^n(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)$ является симметрическим многочленом относительно переменных $x_1,\ldots,x_n$ тогда и только тогда, когда он имеет такой вид:*

$$F_2^n(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)=2!\cdot\left(\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j\right)\left(\sum_{1\le s<t\le n}\beta_{st}y_sy_t\right)+(n-1)\cdot\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{j=1}^n\Big(\sum_{s=1}^{j-1}\beta_{sj}+\sum_{t=j+1}^n\beta_{jt}\Big)y_j\right)+n(n-1)\cdot\sum_{1\le s<t\le n}\beta_{st}.$$

Многочлен $F_2^n(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)$ является симметрическим многочленом относительно переменных $x_1,\ldots,x_n$ и $y_1,\ldots,y_n$ тогда и только тогда, когда он имеет такой вид:

$$F_2^n(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)=2!\cdot\beta\cdot\left(\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j\right)\left(\sum_{1\le s<t\le n}y_sy_t\right)+(n-1)^2\cdot\beta\cdot\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{j=1}^n y_j\right)+\beta\cdot\frac{n^2(n-1)^2}{2},\quad \beta\in K.$$

Доказательство. Рассмотрим случай $k=2$. Общий вид многочлена вида F_2^n, учитывая (3), будет следующим:

$$F_2^n(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)=\sum_{\substack{1\le i,j\le n,\,i\ne j,\\1\le s<t\le n}}\alpha_{ijst}(x_iy_s+1)(x_jy_t+1).$$

После преобразования получаем

$$F_2^n(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)=\sum_{\substack{1\le i,j\le n,\,i\ne j,\\1\le s<t\le n}}\alpha_{ijst}(x_iy_s+1)(x_jy_t+1)=$$

$$=\sum_{\substack{1\le i,j\le n,\,i\ne j,\\1\le s<t\le n}}\alpha_{ijst}(x_ix_jy_sy_t+x_iy_s+x_jy_t)+\sum_{\substack{1\le i,j\le n,\,i\ne j,\\1\le s<t\le n}}\alpha_{ijst}=$$

$$=\sum_{1\le i,j\le n,\,i\ne j}x_ix_j\left(\sum_{1\le s<t\le n}\alpha_{ijst}y_sy_t\right)+\sum_{\substack{1\le i,j\le n,\,i\ne j,\\1\le s<t\le n}}\alpha_{ijst}(x_iy_s+x_jy_t)+\sum_{\substack{1\le i,j\le n,\,i\ne j,\\1\le s<t\le n}}\alpha_{ijst}.$$

Для любой перестановки $\sigma \in S_n$ выполнено равенство $\sigma F_2^n = F_2^n$ тогда и только тогда, когда коэффициенты α_{ijst} не зависят от i и j. Обозначим $\alpha_{ijst} = \beta_{st}$. Поэтому F_2^n можно записать в таком виде:

$$F_2^n(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n) = 2!\cdot\left(\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j\right)\left(\sum_{1\le s<t\le n} \beta_{st} y_s y_t\right) + \sum_{\substack{1\le i,j\le n, i\ne j,\\ 1\le s<t\le n}} \beta_{st}(x_i y_s + x_j y_t) + n(n-1)\cdot \sum_{1\le s<t\le n} \beta_{st}.$$

Преобразуем сумму $\sum\limits_{\substack{1\le i,j\le n, i\ne j,\\ 1\le s<t\le n}} \beta_{st}(x_i y_s + x_j y_t)$ к виду $\left(\sum\limits_{a=1}^{n} x_a\right)\left(\sum\limits_{b=1}^{n} \gamma_b y_b\right)$.

Зафиксируем пару индексов $(a,b) \in \{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,n\}$. Элемент $x_a y_b$ может находиться либо на первом месте в элементе $(x_i y_s + x_j y_t)$, либо на втором. Если $x_a y_b$ находится на первом месте, то такие слагаемые имеют вид

$$(x_a y_b + x_j y_t),\ j \in \{1,\dots,n\}\setminus\{a\},\ t\in\{b+1,\dots,n\}.$$

Если $x_a y_b$ находится на втором месте, то такие слагаемые имеют вид

$$(x_i y_s + x_a y_b),\ i \in \{1,\dots,n\}\setminus\{a\},\ s\in\{1,\dots,b-1\}.$$

Поэтому

$$\sum_{\substack{1\le i\le n\\ i\ne a}}\sum_{s=1}^{b-1} \beta_{sb}(x_i y_s + x_a y_b) + \sum_{\substack{1\le j\le n\\ j\ne a}}\sum_{t=b+1}^{n} \beta_{bt}(x_a y_b + x_j y_t) = (n-1)\cdot\left(\sum_{s=1}^{b-1}\beta_{sb} + \sum_{t=b+1}^{n}\beta_{bt}\right) x_a y_b + G,$$

где многочлен G не содержит слагаемых $x_a y_b$. Таким образом, элемент F_2^n имеет такой вид:

$$F_2^n(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n) = 2!\cdot\left(\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j\right)\left(\sum_{1\le s<t\le n} \beta_{st} y_s y_t\right) + \tag{5}$$

$$+(n-1)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{s=1}^{j-1}\beta_{sj} + \sum_{t=j+1}^{n}\beta_{jt}\Big) y_j\right) + n(n-1)\cdot\sum_{1\le s<t\le n}\beta_{st}.$$

При этом многочлен F_2^n вида (5) симметричен относительно переменных $y_1,\dots,y_n$ тогда и только тогда, когда для любых s_1, t_1 и s_2, t_2 выполнено равенство $\beta_{s_1 t_1} = \beta_{s_2 t_2}$. Поэтому многочлен $F_2^n(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)$ является симметрическим многочленом относительно переменных $x_1,\dots,x_n$ и $y_1,\dots,y_n$ тогда и только тогда, когда он имеет такой вид:

$$F_2^n(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n) = 2!\cdot\beta\cdot\left(\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j\right)\left(\sum_{1\le s<t\le n} y_s y_t\right) + (n-1)^2\cdot\beta\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right) + \beta\cdot\frac{n^2(n-1)^2}{2},\quad \beta\in K.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть K — поле нулевой характеристики и $n \in \mathrm{N}$. Многочлен $F_3^n(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)$ является симметрическим многочленом относительно переменных $x_1,\dots,x_n$ и $y_1,\dots,y_n$ тогда и только тогда, когда он имеет такой вид:*

$$F_3^n(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n) = 3!\cdot\beta\cdot\left(\sum_{1\le i<j<k\le n} x_i x_j x_k\right)\left(\sum_{1\le s<t<u\le n} y_s y_t y_u\right) + 2!\cdot(n-2)^2\cdot\beta\cdot\left(\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j\right)\left(\sum_{1\le s<t\le n} y_s y_t\right) +$$

$$+\frac{(n-1)^2(n-2)^2}{2}\cdot\beta\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right) + \beta\cdot\frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2}{3!},\quad \beta\in K.$$

Доказательство. Общий вид многочлена вида F_3^n, учитывая (3), будет следующим:

$$F_3^n(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n) = \sum_{\substack{(i,j,k)\in \mathrm{A}_n^3,\\ 1\le s<t<u\le n}} \alpha_{ijkstu}(x_i y_s + 1)(x_j y_t + 1)(x_k y_u + 1).$$

После преобразования получаем:

$$F_3^n(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)=\sum_{(i,j,k)\in A_n^3} x_i x_j x_k\left(\sum_{1\le s<t<u\le n}\alpha_{ijkstu} y_s y_t y_u\right)+$$

$$+\sum_{\substack{(i,j,k)\in A_n^3,\\ 1\le s<t<u\le n}}\alpha_{ijkstu}(x_i x_j y_s y_t + x_i x_k y_s y_u + x_j x_k y_t y_u)+\sum_{\substack{(i,j,k)\in A_n^3,\\ 1\le s<t<u\le n}}\alpha_{ijkstu}(x_i y_s + x_j y_t + x_k y_u)+\sum_{\substack{(i,j,k)\in A_n^3,\\ 1\le s<t<u\le n}}\alpha_{ijkstu}.$$

Многочлен $F_3^n(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)$ является симметрическим многочленом относительно переменных $x_1,\ldots,x_n$ и $y_1,\ldots,y_n$ тогда и только тогда, когда коэффициенты α_{ijkstu} не зависят от индексов i,j,k,s,t,u. Поэтому многочлен F_3^n имеет такой вид:

$$F_3^n(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)=3!\cdot\beta\cdot\left(\sum_{(i,j,k)\in A_n^3} x_i x_j x_k\right)\left(\sum_{1\le s<t<u\le n} y_s y_t y_u\right)+$$

$$+\beta\cdot\sum_{\substack{(i,j,k)\in A_n^3,\\ 1\le s<t<u\le n}}(x_i x_j y_s y_t + x_i x_k y_s y_u + x_j x_k y_t y_u)+\beta\cdot\sum_{\substack{(i,j,k)\in A_n^3,\\ 1\le s<t<u\le n}}(x_i y_s + x_j y_t + x_k y_u)+\beta\cdot\frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2}{3!}.$$

Рассуждая аналогичным образом, как и в лемме 2, получаем требуемый вид многочлена F_3^n. Лемма доказана.

Рассмотрим общий случай.

Теорема 1. *Пусть K — некоторое поле нулевой характеристики и n — некоторое натуральное число. Пусть $1\le k\le n$. Многочлен*

$$F_k^n(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)$$

является симметрическим многочленом относительно переменных $x_1,\ldots,x_n$ и $y_1,\ldots,y_n$ тогда и только тогда, когда он имеет такой вид:

$$F_k^n(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)=\sum_{s=0}^{k}(k-s)!\,A_{n-k+s}^s C_{n-k+s}^s\cdot\beta\cdot\left(\sum_{1\le i_1<\ldots<i_{k-s}\le n} x_{i_1}\ldots x_{i_{k-s}}\right)\left(\sum_{1\le j_1<\ldots<j_{k-s}\le n} y_{j_1}\ldots y_{j_{k-s}}\right),\qquad(6)$$

где A_n^k — число размещений из n по k, C_n^k — число сочетаний из n по k, $\beta\in K$.

Доказательство. Пусть $1\le k\le n$. Общий вид многочлена F_k^n имеет вид (3). Рассуждая аналогичным образом, как и в леммах 1-3, получаем, что для симметричности многочлена F_k^n относительно переменных $x_1,\ldots,x_n$ и $y_1,\ldots,y_n$ необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты $\alpha_{i_1\ldots i_k j_1\ldots j_k}$ были равны между собой. Пусть все $\alpha_{i_1\ldots i_k j_1\ldots j_k}$ равны β. Тогда

$$F_k^n(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)=\beta\cdot\sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_k)\in A_n^k\\ 1\le j_1<\ldots<j_k\le n}}(x_{i_1}y_{j_1}+1)\ldots(x_{i_k}y_{j_k}+1).$$

Покажем, что данный многочлен совпадает с (6). Вычислим коэффициенты при $\left(\sum_{1\le i_1<\ldots<i_{k-s}\le n} x_{i_1}\ldots x_{i_{k-s}}\right)\left(\sum_{1\le j_1<\ldots<j_{k-s}\le n} y_{j_1}\ldots y_{j_{k-s}}\right)$, где $s=0,\ldots,k$. После раскрытия скобок в элементе

$$\sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_k)\in A_n^k\\ 1\le j_1<\ldots<j_k\le n}}(x_{i_1}y_{j_1}+1)\ldots(x_{i_k}y_{j_k}+1)=\frac{1}{k!}\cdot\sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_k)\in A_n^k\\ (j_1,\ldots,j_k)\in A_n^k}}(x_{i_1}y_{j_1}+1)\ldots(x_{i_k}y_{j_k}+1)$$

будут получаться суммы вида

$$\frac{1}{k!}\cdot\sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_k)\in A_n^k\\ (j_1,\ldots,j_k)\in A_n^k}}\ \sum_{1\le t_1<\ldots<t_s\le k} x_{i_1}y_{j_1}\ldots\widehat{x}_{i_{t_1}}\widehat{y}_{j_{t_1}}\ldots\widehat{x}_{i_{t_s}}\widehat{y}_{j_{t_s}}\ldots x_{i_k}y_{j_k}\qquad(7)$$

где ^ означает, что элемент отсутствует. Понятно, что сумма $\sum\limits_{1\le t_1<\ldots<t_s\le k} x_{i_1}y_{j_1}\ldots\widehat{x}_{i_{t_1}}\widehat{y}_{j_{t_1}}\ldots\widehat{x}_{i_{t_s}}\widehat{y}_{j_{t_s}}\ldots x_{i_k}y_{j_k}$ состоит их C_k^s слагаемых. Далее, число элементов вида

$$(\ldots,a_1,\ldots,a_{k-s},\ldots),(\ldots,b_1,\ldots,b_{k-s},\ldots)\in \mathrm{A}_n^k\times\mathrm{A}_n^k,$$

где $a_1,\ldots,a_{k-s}$, $b_1,\ldots,b_{k-s}$ зафиксированы, равно $\left(C_{n-k+s}^s\right)^2$. Поэтому суммы вида (7) можно записать следующим образом:

$$\frac{1}{k!}\cdot\left(C_{n-k+s}^s\right)^2\cdot C_k^s\cdot\left(\sum_{(i_1,\ldots,i_{k-s})\in\mathrm{A}_n^{k-s}} x_{i_1}\ldots x_{i_{k-s}}\right)\left(\sum_{(j_1,\ldots,j_{k-s})\in\mathrm{A}_n^{k-s}} y_{j_1}\ldots y_{j_{k-s}}\right)=$$

$$=\frac{1}{k!}\cdot\left(C_{n-k+s}^s\right)^2\cdot C_k^s\cdot\left((k-s)!\right)^2\cdot\left(\sum_{1\le i_1<\ldots<i_{k-s}\le n} x_{i_1}\ldots x_{i_{k-s}}\right)\left(\sum_{1\le j_1<\ldots<j_{k-s}\le n} y_{j_1}\ldots y_{j_{k-s}}\right).$$

Осталось заметить, что

$$\frac{1}{k!}\cdot\left(C_{n-k+s}^s\right)^2\cdot C_k^s\cdot\left((k-s)!\right)^2=(k-s)!\,A_{n-k+s}^s\cdot C_{n-k+s}^s.$$

Теорема доказана.

Пример 1. *Пусть поле K имеет нулевую характеристику. Приведем некоторые частные случаи симметрических многочленов $F_k^n(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)$ относительно переменных $x_1,\ldots,x_n$ и $y_1,\ldots,y_n$ из теоремы 1. В качестве параметра β возьмем единицу.*

$$F_2^2(x_1,x_2,y_1,y_2)=2\cdot x_1x_2y_1y_2+(x_1+x_2)(y_1+y_2)+2,$$

$$F_2^3(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3)=2\cdot(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)(y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3)+4\cdot(x_1+x_2+x_3)(y_1+y_2+y_3)+18.$$

$$F_3^3(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3)=6\cdot x_1x_2x_3y_1y_2y_3+2\cdot(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)(y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3)+2\cdot(x_1+x_2+x_3)(y_1+y_2+y_3)+6.$$

Теорема 2. *Пусть $f(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)$ — многочлен от переменных $x_1,\ldots,x_n$ и $y_1,\ldots,y_n$ вида (1) над полем K нулевой характеристики. Данный многочлен является симметрическим многочленом относительно переменных $x_1,\ldots,x_n$ и $y_1,\ldots,y_n$ тогда и только тогда, когда он имеет следующий вид:*

$$f(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)=\sum_{s=0}^{2}\left(\sum_{i=2}^{n}\alpha_i s!A_{n-s}^{i-s}C_{n-s}^{i-s}\right)\left(\sum_{1\le i_1<\ldots<i_s\le n} x_{i_1}\ldots x_{i_s}\right)\left(\sum_{1\le j_1<\ldots<j_s\le n} y_{j_1}\ldots y_{j_s}\right)+$$

$$+\sum_{t=3}^{n}\left(\sum_{i=t}^{n}\alpha_i t!A_{n-t}^{i-t}C_{n-t}^{i-t}\right)\left(\sum_{1\le i_1<\ldots<i_t\le n} x_{i_1}\ldots x_{i_t}\right)\left(\sum_{1\le j_1<\ldots<j_t\le n} y_{j_1}\ldots y_{j_t}\right)$$

для некоторого набора чисел $\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n\in K$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что многочлен $f(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)$ является симметрическим многочленом относительно переменных $x_1,\ldots,x_n$ и $y_1,\ldots,y_n$ тогда и только тогда, когда он является линейной комбинацией симметрических многочленов $F_k^n(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)$, $k=2,\ldots,n$, вида (6):

$$f(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)=\sum_{k=2}^{n}\alpha_k F_k^n(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n).$$

Осталось преобразовать суммы к требуемому виду. Теорема доказана.

2. Симметрические многочлены специального вида в случае поля положительной характеристики

Теорема 3. *Пусть* K *— некоторое поле и* n *— некоторое натуральное число. В зависимости от характеристики поля* K *симметрические многочлены относительно переменных* $x_1,\ldots,x_n$ *и* $y_1,\ldots,y_n$ *из теоремы* 1 *при* $\beta=1$ *будут иметь следующий вид.*

I. 1. Пусть $char K=2$. Тогда

$$F_1^{2n}(x_1,\ldots,x_{2n},y_1,\ldots,y_{2n})=\left(\sum_{i=1}^{2n}x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{2n}y_j\right),$$

$$F_1^{2n-1}(x_1,\ldots,x_{2n-1},y_1,\ldots,y_{2n-1})=\left(\sum_{i=1}^{2n-1}x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{2n-1}y_j\right)+1,$$

$$F_2^{2n}(x_1,\ldots,x_{2n},y_1,\ldots,y_{2n})=\left(\sum_{i=1}^{2n}x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{2n}y_j\right),$$

$$F_2^{2n-1}(x_1,\ldots,x_{2n-1},y_1,\ldots,y_{2n-1})=0,$$

$$F_k^{n}(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)=0,\ 2<k\le n.$$

2. Пусть $char K=3$. Тогда

$$F_1^{3n}(x_1,\ldots,x_{3n},y_1,\ldots,y_{3n})=\left(\sum_{i=1}^{3n}x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{3n}y_j\right),$$

$$F_1^{3n-1}(x_1,\ldots,x_{3n-1},y_1,\ldots,y_{3n-1})=\left(\sum_{i=1}^{3n-1}x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{3n-1}y_j\right)+1,$$

$$F_1^{3n-2}(x_1,\ldots,x_{3n-2},y_1,\ldots,y_{3n-2})=\left(\sum_{i=1}^{3n-2}x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{3n-2}y_j\right)+1,$$

$$F_2^{3n}(x_1,\ldots,x_{3n},y_1,\ldots,y_{3n})=2\cdot\left(\sum_{1\le i<j\le 3n}x_ix_j\right)\left(\sum_{1\le s<t\le 3n}y_sy_t\right)+\left(\sum_{i=1}^{3n}x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{3n}y_j\right),$$

$$F_2^{3n-1}(x_1,\ldots,x_{3n-1},y_1,\ldots,y_{3n-1})=2\cdot\left(\sum_{1\le i<j\le 3n-1}x_ix_j\right)\left(\sum_{1\le s<t\le 3n-1}y_sy_t\right)+\left(\sum_{i=1}^{3n-1}x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{3n-1}y_j\right)+2,$$

$$F_2^{3n-2}(x_1,\ldots,x_{3n-2},y_1,\ldots,y_{3n-2})=2\cdot\left(\sum_{1\le i<j\le 3n-2}x_ix_j\right)\left(\sum_{1\le s<t\le 3n-2}y_sy_t\right)+\left(\sum_{i=1}^{3n-2}x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{3n-2}y_j\right),$$

$$F_3^{3n}(x_1,\ldots,x_{3n},y_1,\ldots,y_{3n})=2\cdot\left(\sum_{1\le i<j\le 3n}x_ix_j\right)\left(\sum_{1\le s<t\le 3n}y_sy_t\right)+2\cdot\left(\sum_{i=1}^{3n}x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{3n}y_j\right),$$

$$F_3^{3n-1}(x_1,\ldots,x_{3n-1},y_1,\ldots,y_{3n-1})=0,$$

$$F_3^{3n-2}(x_1,\ldots,x_{3n-2},y_1,\ldots,y_{3n-2})=2\cdot\left(\sum_{1\le i<j\le 3n-2}x_ix_j\right)\left(\sum_{1\le s<t\le 3n-2}y_sy_t\right),$$

$$F_4^{3n-2}(x_1,\ldots,x_{3n-2},y_1,\ldots,y_{3n-2})=\left(\sum_{1\le i<j\le 3n-2}x_ix_j\right)\left(\sum_{1\le s<t\le 3n-2}y_sy_t\right),$$

$$F_k^{n}(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)=0,\ 4<k\le n.$$

II. Рассмотрим общий случай. Пусть $char K=p>0$. Тогда

$$F_k^{n}(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)=0,\ 2p-1\le k\le n.$$

Доказательство. Достаточно показать пункт **II**, так как **I** является частным случаем пункта **II** в плане равенства $F_k^n(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)=0,\ 2p-1\le k\le n.$ Покажем, что при $k\ge 2p-1$ все коэффициенты в формуле (6) делятся на p. Итак, рассмотрим коэффициент $(k-s)!\cdot A_{n-k+s}^{s}\cdot C_{n-k+s}^{s}$, который представим в виде

$$(k-s)!\cdot A_{n-k+s}^{s}\cdot C_{n-k+s}^{s}=(k-s)!\cdot(n-k+1)\cdot\ldots\cdot(n-k+s)\cdot C_{n-k+s}^{s}.$$

Если $s\ge p$, то число $(n-k+1)\cdot\ldots\cdot(n-k+s)$ делится на p, так как в этом числе не менее p множителей, состоящих из подряд идущих натуральных чисел. Если же $s<p$, то $(k-s)!\ge(k-p+1)!\ge(2p-1-p+1)!=p!$. Поэтому $(k-s)!$ делится на p. Теорема доказана.

Пример 2. *Пусть* $char K = 3$. *Рассмотрим все симметрические многочлены при* $n = 3$, *используя теорему* 3.

$$F_1^3(x_1, x_2, x_2, y_1, y_2, y_3) = (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3),$$

$$F_2^3(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = 2\cdot(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)(y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3) + (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3),$$

$$F_3^3(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = 2\cdot(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)(y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3) + 2\cdot(x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3).$$

Список литературы
References

1. Макдональд И. Симметрические функции и многочлены Холла. М.: Мир, 1985. 222 с.
Macdonald I. G. Symmetric Functions and Hall Polynomials, second ed. Oxford: Clarendon Press, 1995. 475 pp.

2. Рацеев С.М. Эквивалентные условия полиномиальности роста многообразий алгебр Пуассона // Вестн. Московск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2012. Т. 67, № 5. С. 8-13.

Ratseev S.M. Equivalent conditions of polynomial growth of a variety of Poisson algebras// Moscow University Mathematics Bulletin. 2012. Vol. 67, № 5-6. Pp. 195-199.

3. Рацеев С.М. Рост многообразий алгебр Лейбница с нильпотентным коммутантом // Матем. заметки. 2007. Т. 82, № 1. С. 108-117.

Ratseev S.M. The growth of varieties of leibniz algebras with nilpotent commutator subalgebra // Mathematical Notes. 2007. Vol.82, № 1-2. Pp. 96-103.

4. Кемер А.Р. Об идеалах групповой алгебры бесконечной симметрической группы над полем характеристики p // Матем. заметки, 2012, Т. 92, № 3, 417–425.

Kemer A.R. On Ideals of the Group Algebra of an Infinite Symmetric Group over a Field of Characteristic p // Mathematical Notes, 2012, Vol. 92, № 3, Pp. 417–425.