УДК 519.21 + 537.86

О СВЯЗИ МЕЖДУ СПЕКТРАЛЬНО ОБРАТИМЫМИ И ГАМИЛЬТОНОВЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

ABOUT THE CONNECTION BETWEEN SPECTRAL REVERSIBLE AND HAMILTONIAN DYNAMICAL SYSTEMS

Ю.П. Вирченко, А.В. Субботин
Yu.P. Virchenko, A.V. Subbotin

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия

Belgorod State University,
Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia

e-mail:virch48@bsu.edu.ru

Аннотация
Введено общее понятие о спектрально обратимых автономных динамических системах. Показано, что всякая автономная гамильтонова система является спектрально обратимой. Доказана теорема о том, что генераторы линейных систем, получаемых линеаризацией каждой данной спектрально обратимой системы, связаны линейным преобразованием на основе дифференцируемой матриц-функции U(X) с генераторами линейных гамильтоновых систем.

Abstract
The general concept about spectral reversibility of autonomous dynamical systems is introduced. It is shown that any autonomous hamiltonian system is the spectral reversible one. It is proved the conjecture that generators of linear systems which are obtained by linearization of each given spectral reversible system may be linearly transformed on the basis of differentiable matrix-function U(X) into generators of linear hamiltonian systems.

Ключевые слова: гамильтонова система, линеаризованная система, спектральная обратимость, линейное преобразование, генератор.
Keywords: Hamiltonian system, linearized system, spectral reversibility, linear transformation, generator.

1. Введение. В работах [1]-[5] нами было введено понятие о спектрально-обратимых конечномерных автономных линейных динамических системах. Было показано, что, в общем случае, каждая такая динамическая система приводится подходящей линейной заменой динамических переменных к соответствующей линейной гамильтоновой динамической системе. Замечательно, что линейные автономные спектрально обратимые системы представляют собой системы, у которых имеется обратимость во времени, при трактовке этого понятия в широком смысле слова. Поясним это положение нижеследующим рассуждением.

Известно, что обратимость во времени линейных гамильтоновых систем в том смысле, что уравнения движения инвариантны относительно замены $t \Rightarrow -t$ с одновременным изменением направлений на обратное у всех импульсов, имеет место только в отсутствие внешнего магнитного поля. В присутствие же внешнего магнитного поля, для сохранения свойства инвариантности при указанных выше преобразованиях системы динамических уравнений, нужно одновременно изменять на обратное направление самого магнитного поля в каждой пространственной точке. Разумеется, что такая известная в теоретической физике трактовка понятия обратимости во времени системы, помещенной во внешнее магнитное поле, тесно связна с конкретной физической ситуацией. Между тем, по физическим соображениям ясно, что механическая система во внешнем магнитном поле, у которой отсутствует диссипация энергии, должна обладать свойством обратимости во времени, так как каждому движению такой системы соответствует обратное ему движение. Это наводит на мысль о том, что обратимость во времени нужно сформулировать для автономных динамических систем в каких-то более общих терминах, не связывая ее с понятием динамических переменных, которые называют импульсами. Так как свойство класса движений динамической системы, которое связано с обращением знака времени в динамических уравнениях, является локальным свойством решений, то естественно связать это свойство с решениями линейных динамических систем, которые получаются из данной системы путем ее линеаризации в произвольной точке фазового пространства. Тогда существование для всякого локального движения обратного ему движения у данной автономной динамической системы можно сформулировать как свойство инвариантности класса решений у любой ее линеаризованной системы в любой точке фазового пространства. Для наличия этого свойства инвариантности, в свою очередь, необходимо и достаточно, чтобы спектр генератора движения линеаризованной системы обладал свойством инвариантности по отношению к обращению знаков у всех его собственных чисел с учетом кратности.

Таким образом, можно думать, что сформулированное в следующем пункте свойство спектральной обратимости автономных динамических систем является наиболее общей математической трактовкой физического понятия обратимости во времени. В связи с введенным понятием спектральной обратимости, возникает естественный математический вопрос. В каком отношении находятся классы спектрально обратимых систем и гамильтоновых систем. Естественно ожидать следующее: если понятие спектральной обратимости, является правильной интерпретацией физического понятия обратимости во времени, то любая гамильтонова система является спектрально обратимой динамической системой. Это положение доказывается в следующем пункте (Теорема 1). Ясно, что существует обширный класс спектрально обратимых динамических систем, которые не являются гамильтоновыми. Таковыми являются все системы, которые получаются из какой-либо гамильтоновой системы путем произвольного *неканонического* (см., например, [6]) преобразования ее динамических переменных. Тогда, возникает проблема. Исчерпывает ли таким образом полученный класс автономных динамических систем весь класс спектрально обратимых систем. В настоящем сообщении намечен путь решения этой проблемы. Мы показываем, что для каждой спектрально обратимой системы, порождаемой дифференцируемой биекцией $\mathbf{F}:\mathbf{R}^{2d}\to\mathbf{R}^{2d}$, существуют дифференцируемая матриц-функция $\mathbf{H}(X)$ на $\mathbf{R}^{2d}$, которая в каждой точке X является генератором линейной гамильтоновой системы, а также дифференцируемая невырожденная матриц-функция $\mathbf{U}(X)$, $\det\mathbf{U}(X)\neq 0$ на фазовом пространстве $\mathbf{R}^{2d}$, которая связывает $\mathbf{H}(X)$ с генератором $\mathbf{G}(X)$ линейной системы, которая порождается линеаризацией в той же точке X исходной динамической системы.

2. Спектрально обратимые динамические системы. Пусть $\mathbf{F}:\mathbf{R}^{2n}\to\mathbf{R}^{2n}$ – биекция $\mathbf{R}^{2n}$, $n\in\mathbb{N}$. Система дифференциальных уравнений

$$\dot{X}(t)=\mathbf{F}(X(t)) \tag{1}$$

определяет траектории $X(t)=\langle x_1(t),\ldots,x_{2n}(t)\rangle$ четномерной автономной динамической системы в фазовом пространстве $\mathbf{R}^{2n}$ ее состояний $X(t)=\langle x_1,\ldots,x_{2n}\rangle$. В каждой точке $X\in\mathbf{R}^{2n}$ определена порождаемая невырожденным линейным преобразованием $\mathbf{G}(X):\mathbf{R}^{2n}\to\mathbf{R}^{2n}$, с помощью $2n\times 2n$-матрицы $\mathbf{G}(X)=(G_{ij}(X);i,j=1\div 2n)$,

$$G_{ij}(X) = \frac{\partial \mathbf{F}_i(X)}{\partial x_j}, \tag{2}$$

$\det \mathbf{G} \neq 0$, соответствующая системе (1) линейная касательная динамическая система

$$\dot{\tilde{X}}(\mathrm{t}) = \left[\mathbf{G}(X)\right]\tilde{X}(\mathrm{t}) \tag{3}$$

с траекториями $\tilde{X}(\mathrm{t}) = \langle \tilde{x}_1(\mathrm{t}), \ldots, \tilde{x}_{2n}(\mathrm{t}) \rangle$.

Определим подкласс спектрально-обратимых систем в классе всех систем вида (1).

Определение 1. *Пусть* $\mathbf{G}$ *– невырожденная четномерная матрица размерности* $2n$, $\det \mathbf{G} \neq 0$ *простой структуры (см. [Гант], гл. 3, §8, стр.85), не имеющая кратных точек спектра* $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n}\}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, *если* $i \neq j$, $i,j = 1 \div 2n$. *Матрицу* $\mathbf{G}$ *назовем спектрально-обратимой, если ее спектр обладает следующим свойством: для каждого* $j = 1 \div 2n$ *существует единственный номер* j' *такой, что* $\lambda_{j'} = -\lambda_j$.

Определение 2. *Динамическую систему (1) назовем спектрально-обратимой, если в каждой точке* $X \in \mathbf{R}^{2n}$ *соответствующая ей матрица* $\mathbf{G}(X)$ *является спектрально-обратимой.*

Примером спектрально-обратимых систем являются т.н. гамильтоновы системы. Система (1) размерности $2n$ называется гамильтоновой, если при разложении ее фазового пространства векторов X декартово произведение $X = \langle P, Q \rangle$ пространств векторов $P = \langle p_1, \ldots, p_{2n} \rangle$ и $Q = \langle q_1, \ldots, q_{2n} \rangle$ размерности n, для нее найдется функция $H : \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$ (гамильтониан системы) такая, что

$$\mathbf{F}(X) = \left\langle -\frac{\partial H(X)}{\partial Q}, \frac{\partial H(X)}{\partial P} \right\rangle, H(X) \equiv H(P,Q).$$

Для гамильтоновой системы с гамильтонианом $H(X)$ соответствующие ей генераторы $\mathbf{G}(X) \equiv \mathbf{G}(P,Q)$ касательных систем в каждой точке $X \in \mathbf{R}^{2n}$ имеют следующую блочную структуру

$$\mathbf{G}(X) = \begin{pmatrix} -B^{+}(X) & C(X) \\ A(X) & B(X) \end{pmatrix} \tag{4}$$

с блоками в виде $n \times n$ $A(X), B(X), C(X)$. Здесь символом $+$ обозначено транспонирование матрицы $B(X)$, и имеет место симметрия матриц $A(X)$ и $C(X)$. Явные выражения матричных элементов $A_{ij}(X), B_{ij}(X), C_{ij}(X), i,j = 1 \div n$ этих матриц даются формулами

$$A_{ij}(X) = \frac{\partial^2 H(X)}{\partial p_i \partial p_j}, B_{ij}(X) = \frac{\partial^2 H(X)}{\partial q_i \partial p_j}, C_{ij}(X) = \frac{\partial^2 H(X)}{\partial q_i \partial q_j}, i,j = 1 \div n.$$

В связи с описанной блочной структурой матриц $\mathbf{G}(X)$ гамильтоновых систем, произвольные четномерные матрицы $\mathbf{G}$ размерности $2n$, имеющие аналогичный блочный вид

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} -B^{+} & C \\ A & B \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где $n \times n$-блоки A и C симметричны, будем называть *гамильтоновыми матрицами*.

Спектральная обратимость гамильтоновых систем является следствием следующего утверждения.

Теорема 1. *Каждая гамильтонова матрица (5) является спектрально-обратимой.*

Гамильтонова матрица (4) представима в форме $\mathbf{G} = J\mathbf{K}$, где $\mathbf{K}$ – симметричная матрица и

$$J = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

$\mathbf{1}$ – единичная $n \times n$-матрица. Так как $J^+ = -J, J^2 = -\mathbf{1}$, то справедливы следующие равенства

$$\det(\lambda - \mathbf{G}) = \det(\lambda - J\mathbf{K}) = \det(\lambda - (\mathbf{K}J)^+) =$$
$$= \det(\lambda + \mathbf{K}J) = \det(-J\lambda + \mathbf{K}) = \det(-J\lambda - J^2\mathbf{K}) = \det(\lambda + J\mathbf{K}) = 0,$$

которая доказывает утверждение.

Напомним следующий замечательный факт из теории матриц (см. [7], гл.9, §13, стр.257):

Утверждение. *Всякая вещественная $d \times d$-матрица $\mathbf{G}$ простой структуры вещественно-подобна матрице*

$$\operatorname{diag}\left\{ \begin{pmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ -\nu_1 & \mu_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \mu_q & \nu_q \\ -\nu_q & \mu_q \end{pmatrix}, \mu_{2q+1}, \ldots, \mu_d \right\} = \mathbf{WGW}^{-1} \qquad (6)$$

где $\mathbf{W}$ – невырожденная вещественная матрица и $\mu_j \pm i\nu_j$, $\nu_j \neq 0, j = 1 \div q$; μ_k, $k = 2q+1 \div d$ – собственные числа с вещественными $\mu_1, \nu_1, \ldots, \mu_q, \nu_q, \mu_{2q+1}, \ldots, \mu_d$.

На основе сформулированного утверждения легко доказывается следующая теорема, которую можно рассматривать как обратную к Теореме 1.

Теорема 2. *Каждая вещественная спектрально-обратимая матрица $\mathbf{G}$ размерности $d = 2n$ вещественно подобна гамильтоновой матрице той же размерности.*

Нужно доказать, что для каждой четномерной, спектрально-обратимой матрицы $\mathbf{G}$ найдется вещественная невырожденная матрица $\mathbf{U}$ той же размерности такая, что матрица $\mathbf{UGU}^{-1}$ является гамильтоновой. С этой целью переформулируем приведенное **Утверждение** для рассматриваемого нами специального случая.

Пусть $\mathbf{W}$ – матрица, существование которой утверждается выше. Ввиду спектральной обратимости матрицы $\mathbf{G}$, таким же свойством обладает матрица $\mathbf{WGW}^{-1}$ с любой невырожденной вещественной матрицей размерности d. Следовательно, все ее вещественные собственные числа $\mu_{2q+1}, \ldots, \mu_{2n}$ образуют набор из четного числа элементов и распределяются на пары взаимно противоположных чисел $\{\lambda_j, -\lambda_j\}, j = q+1, \ldots, n$ так, что, ввиду отсутствия кратных точек спектра у матрицы $\mathbf{G}$ и, следовательно, у матрицы $\mathbf{WGW}^{-1}$, все эти пары различны. Каждой такой паре (если $q \neq n$) сопоставим диагональную спектрально обратимую 2×2 -матрицу $\mathbf{H}^{(j)} = \operatorname{diag}\{\lambda_j, -\lambda_j\}, j = q+1, \ldots, n$. Каждая матрица из этого набора не является подобной никакой другой взятой из него матрице. Рассмотрим теперь набор матриц

$$\mathbf{H}^{(j)} = \begin{pmatrix} \mu_j & \nu_j \\ -\nu_j & \mu_j \end{pmatrix}, j = 1 \div q, \qquad (7)$$

о которых идет речь в утверждении. У каждой из этих матриц собственные числа комплексны и комплексно сопряжены друг другу. Ввиду того, что кратность собственных значений матрицы $\mathbf{G}$ равна 1, то собственные числа всех этих матриц не равны друг другу при различных значениях j. Следовательно все матрицы из представленного набора не являются попарно подобными друг другу. С другой стороны, так как матрица $\mathbf{G}$ спектрально обратима, то для каждой матрицы $\mathbf{H}^{(j)}$ из этого набора найдется в нем матрица

$\mathbf{H}^{(j')}$ такая, что ее собственные числа $\mu_{j'} \pm i\nu_{j'}$ являются противоположными собственным числам $\mu_j \pm i\nu_j$ матрицы $\mathbf{H}^{(j)}$, то есть

$$\mathbf{H}^{(j')} = \begin{pmatrix} \mu_{j'} & \nu_{j'} \\ -\nu_{j'} & \mu_{j'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu_j & -\nu_j \\ \nu_j & -\mu_j \end{pmatrix} = -(\mathbf{H}^{(j)})^+, j = 1 \div q.$$

Таким образом, имеется биекция набора матриц (7) на себя, определяемая равенством $\mathbf{H}^{(j')} = -(\mathbf{H}^{(j)})^+, j = 1 \div q$. Выделим из этого набора все матрицы $\mathbf{H}^{(k)}$, которые и имеют $\det \mathbf{H}^{(k)} > 0$ и, поэтому, имеют чисто мнимые собственные числа $\pm i\nu_j$, k=$1 \div r$. (Набор таких матриц может быть пуст и тогда $r = 0$.) Матрицы такого типа спектрально обратимы. Тогда, ввиду спектральной обратимости всех оставшихся 2×2-матриц и их существенной комплексности (собственные числа имеют отличные от нуля реальную и мнимую части), получаем, что число $(q - k)$ – четное, и эти матрицы разбиваются на пары $\left\{\mathbf{H}^{(j)}, -(\mathbf{H}^{(j)})^+\right\}$.

Таким образом, элементарными преобразованиями $\mathbf{U}(\square)\mathbf{U}^{-1}$, каждое из которых сводится к одновременной перестановке одноименных строки и столбца, применяемыми к матрице вида (6) можно добиться, чтобы последовательностью таких преобразований эта матрица $\mathbf{WGW}^{-1}$ была приведена к блочно-диагональному виду

$$\mathbf{H} = \operatorname{diag}\left\{\mathbf{H}^{(j)}\right\}, j = 1 \div n, \tag{8}$$

который состоит из вещественных 2×2-блоков. Причем первые $q - k$ блоков составляют матрицу с размерностью кратную 4

$$\operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix} \mathbf{H}^{(j)} & 0 \\ 0 & -(\mathbf{H}^{(j)})^+ \end{pmatrix}\right\}, j = 1 \div (q-k)/2, \tag{9}$$

далее следуют 2×2-блоки $\mathbf{H}^{(j)}$, $\mathrm{j} = (q-k+1) \div q$ (если $k \neq 0$) матриц вида (7) с $\mu_j = 0$ и, наконец, стоят блоки $\mathbf{H}^{(j)} = \operatorname{diag}\left\{\lambda_j, \ -\lambda_j\right\}, j = q+1,\dots, n$ (если $q \neq n$).

Так как 2×2-блоки с номерами $\mathrm{j} = (q-k+1) \div n$ являются гамильтоновыми 2×2-матрицами вида (4) и, кроме того, каждый из 4×4-блоков в матрице (9) является гамильтоновой 4×4-матрицей вида (4), то матрица (7), указанными выше элементарными преобразованиями, приводится к канонической форме (4) гамильтоновых матриц.

Далее, нашей целью является построение по заданной матриц-функции $\mathbf{G}(\xi)$ со значениями в виде вещественных спектрально обратимых матриц матриц-функции $\mathbf{H}(\xi)$, со значениями в виде канонических гамильтоновых матриц. Такое построение дается следующим утверждением.

Теорема 3. *Пусть для фиксированного четного числа* $d = 2n$ *задана* $\mathbf{G}: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d$ – *дифференцируемая по* ξ *матриц-функция от вещественного параметра* $\xi \in \mathbf{R}$ *со значениями в виде вещественных невырожденных спектрально-обратимых матриц* $\mathbf{G}(\xi)$, $\det \mathbf{G}(\xi) \neq 0$ простой структуры, *спектр которых не имеет кратных собственных значений. Тогда существует дифференцируемая по* ξ *матриц-функция* $\mathbf{U}: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d$ *со значениями в виде вещественных невырожденных матриц* $\mathbf{U}(\xi)$, *то есть* $\det \mathbf{U}(\xi) \neq 0$, *такая, что при каждом* $\xi \in \mathbf{R}$ *матрицы* $\mathbf{U}(\xi)\mathbf{G}(\xi)\mathbf{U}^{-1}(\xi) = \mathbf{H}(\xi)$ *являются каноническими гамильтоновыми.*

Доказательство основано на разрешимости гомологического уравнения (см. ниже (11)), связывающего производные

$$\mathbf{R}(\xi) = \frac{d\mathbf{U}(\xi)}{d\xi}\mathbf{U}^{-1}(\xi), \ \mathbf{T}(\xi) = \frac{d\mathbf{G}(\xi)}{d\xi}, \ \mathbf{S}(\xi) = \frac{d\mathbf{H}(\xi)}{d\xi} \tag{10}$$

соответственно матриц $\mathbf{U}(\xi)$, $\mathbf{G}(\xi)$ и $\mathbf{H}(\xi)$ в каждой точке $\xi \in \mathbf{R}$. Это уравнение в каждой фиксированной точке $\xi \in \mathbf{R}$ получается дифференцированием по ξ соотношения $\mathbf{U}(\xi)\mathbf{G}(\xi)\mathbf{U}^{-1}(\xi) = \mathbf{H}(\xi)$, связывающего $\mathbf{G}(\xi)$ и $\mathbf{H}(\xi)$. При этом, в силу невырожденности матрицы $\mathbf{G}(\xi)$ и отсутствия у нее кратных собственных значений, такими же свойствами обладает матрица $\mathbf{H}(\xi)$. В результате, так как

$$\frac{d\mathbf{U}^{-1}(\xi)}{d\xi} = -\mathbf{U}^{-1}(\xi)\,\frac{d\mathbf{U}(\xi)}{d\xi}\mathbf{U}^{-1}(\xi)$$

и, следовательно, производная левой части равенства равна

$$\frac{d\mathbf{U}(\xi)}{d\xi}\mathbf{G}(\xi)\mathbf{U}(\xi) - \mathbf{U}(\xi)\mathbf{G}(\xi)\mathbf{U}^{-1}(\xi)\frac{d\mathbf{U}(\xi)}{d\xi}\mathbf{U}^{-1}(\xi) + \mathbf{U}(\xi)\frac{d\mathbf{G}(\xi)}{d\xi}\mathbf{U}^{-1}(\xi) =$$
$$= \mathbf{R}(\xi)\mathbf{H}(\xi) - \mathbf{H}(\xi)\mathbf{R}(\xi) + \mathbf{D}(\xi),$$

где $\mathbf{D}(\xi) = \mathbf{U}(\xi)\mathbf{T}(\xi)\mathbf{U}^{-1}(\xi)$, получаем гомологическое уравнение (для простоты мы опускаем указание конкретного значения ξ)

$$\left[\mathbf{R},\mathbf{H}\right] + \mathbf{D} = \mathbf{S}, \tag{11}$$

где $[\square,\square]$ обозначает коммутатор соответствующих матриц [1].

Положим, что гамильтонова матрица $\mathbf{H}$ представлена в блочно-диагональном виде (8), в котором $\mathbf{H}^{(j)}, j = 1 \div n$ – 2×2-вещественные канонические матричные блоки, которые

являются либо чисто диагональными матрицами вида $\mathrm{diag}\{\lambda_j,\ -\lambda_j\}, \lambda_j \neq 0$ (матрицы типа 1), либо 2×2-матрицами, имеющими комплексные собственные числа с ненулевой мнимой частью (матрицы типа 2), и, в этом случае, для каждого такого блока $\mathbf{H}^{(j)}$ найдется блок $\mathbf{H}^{(j')} = -(\mathbf{H}^{(j)})^{+}$. В силу невырожденности матрицы $\mathbf{H}(\xi)$, для всех матриц $\mathbf{H}^{(j)}$ имеет место $\det \mathbf{H}^{(j)}(\xi) \neq 0, j = 1 \div n$.

Докажем разрешимость уравнения (11) относительно матриц $\mathbf{R}$ и $\mathbf{S}$ при фиксированных матрицах $\mathbf{H}$ и $\mathbf{D}$ на классе вещественных матриц. Причем ее решение будет единственным при условиях, сформулированных ниже. Для доказательства разобьем матрицы $\mathbf{R}$, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{S}$ на 2×2-блоки в соответствии с разбиением (8) на такие блоки матрицы $\mathbf{H}$,

$$\mathbf{S} = (\mathbf{R}^{(i,j)})_{i,j=1\div n},\ \mathbf{S} = (\mathbf{D}^{(i,j)})_{i,j=1\div n},\ \mathbf{S} = (\mathbf{S}^{(i,j)})_{i,j=1\div n}. \tag{12}$$

Тогда уравнение (11) эквивалентно следующей системе матричных уравнений

$$\mathbf{R}^{(i,j)}\mathbf{H}^{(j)} - \mathbf{H}^{(i)}\mathbf{R}^{(i,j)} + \mathbf{D}^{(i,j)} = \mathbf{S}^{(i,j)},\ i,j = 1\div n. \tag{13}$$

Для однозначной разрешимости уравнения потребуем, чтобы блочная структура матрицы $\mathbf{S}$ была следующей $\mathbf{S}^{(i,j)} = \delta_{i,j}\mathbf{S}^{(j)}$, $i,j = 1\div n$, где 2×2-блоки $\mathbf{S}^{(j)}$ должны обладать такими же свойствами, что и блоки $\mathbf{H}^{(j)}, j = 1\div n$. Тогда система (13) матричных уравнений принимает вид

$$\mathbf{R}^{(i,j)}\mathbf{H}^{(j)} - \mathbf{H}^{(i)}\mathbf{R}^{(i,j)} + \mathbf{D}^{(i,j)} = \delta_{i,j}\mathbf{S}^{(j)},\ i,j = 1\div n. \tag{14}$$

[1] Заметим, что, в силу спектральной обратимости матриц $\mathbf{G}(\xi)$ и $\mathbf{H}(\xi)$, следы этих матриц в каждой точке $\xi \in \mathbf{R}$ должны быть равны нулю и, следовательно, равны нулю следы производных по ξ соответствующих им матриц-функций $\mathbf{T}(\xi)$ и $\mathbf{S}(\xi)$, а также $\mathrm{Sp}\,\mathbf{D}(\xi) = \mathrm{Sp}(\mathbf{U}(\xi)\mathbf{T}(\xi)\mathbf{U}^{-1}(\xi)) = \mathrm{Sp}\,\mathbf{T}(\xi) = 0$.

Для однозначной разрешимости, потребуем чтобы блок $\mathbf{S}^{(j)}$ был диагональным с нулевым следом, если таковым является блок $\mathbf{H}^{(j)}$ с тем же номером. Более того, потребуем в этом случае, выполнение равенства $\operatorname{sgn}\det\mathbf{H}^{(j)} = \operatorname{sgn}\,\mathbf{det}\,\mathbf{S}^{(j)}$. Если же блок $\mathbf{H}^{(j)}$ обладает существенно комплексными собственными числами, и поэтому ему соответствует блок $\mathbf{H}^{(j')} = -(\mathbf{H}^{(j)})^+$, то потребуем, чтобы имело место такое же равенство $\mathbf{S}^{(j')} = -(\mathbf{S}^{(j)})^+$ для соответствующих $\mathbf{S}$-блоков. При этом, так как блок $\mathbf{H}^{(j)}$ имеет вид (7), то потребуем, чтобы такой же вид имел и блок $\mathbf{S}^{(j)}$.

Рассмотрим случай $i = j$. В этом случае необходимо выбрать 2×2-матрицу $\mathbf{S}^{(i)}$ так, чтобы было разрешимо матричное уравнение

$$\mathbf{R}^{(i,i)}\mathbf{H}^{(i)} - \mathbf{H}^{(i)}\mathbf{R}^{(i,i)} + \mathbf{D}^{(i,i)} = \mathbf{S}^{(i)},\ i = 1 \div n. \tag{15}$$

Потребуем, чтобы $\operatorname{Sp}\mathbf{R}^{(i,i)} = 0,\ \operatorname{Sp}(\mathbf{R}^{(i,i)}\mathbf{H}^{(i)}) = 0$ для каждого значения $i = 1 \div n$. Запишем однозначные разложения 2×2-матриц $\mathbf{R}^{(i,i)}$ и $\mathbf{H}^{(i)}$

$$\mathbf{R}^{(i,i)} = r_0\mathbf{1} + r_\alpha\sigma_\alpha,\ \mathbf{H}^{(i)} = h_0^{(i)}\mathbf{1} + h_\alpha^{(i)}\sigma_\alpha \tag{16}$$

(здесь и далее подразумевается суммирование по повторяющемуся индексу $\alpha = 1, 2, 3$) по линейно-независимому набору матриц, состоящему из единичной матрицы $\mathbf{1}$ и трех матриц Паули,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ввиду канонического вида блоков $\mathbf{H}^{(i)}$, коэффициент $h_1^{(i)}$ в (16) равен нулю. В разложениях (16) коэффициенты r_0, r_1, r_3 и $h_0^{(i)}, h_3^{(i)}$ вещественны, r_2 и $h_2^{(i)}$ мнимые. Тогда

$$\mathbf{R}^{(i,i)}\mathbf{H}^{(i)} = (r_0 h_0^{(i)} + r_\alpha h_\alpha^{(i)})\mathbf{1} + (r_0 h_\alpha^{(i)} + h_0^{(i)} r_\alpha)\sigma_\alpha + \mathrm{i}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} r_\beta h_\gamma^{(i)}\sigma_\alpha$$

и, следовательно,

$$\mathbf{R}^{(i,i)}\mathbf{H}^{(i)} - \mathbf{H}^{(i)}\mathbf{R}^{(i,i)} = 2\mathrm{i}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} r_\beta h_\gamma^{(i)}\sigma_\alpha. \tag{17}$$

Запишем для матриц $\mathbf{D}^{(i,i)}$ и $\mathbf{S}^{(i)}$ разложения, аналогичные разложениям (16),

$$\mathbf{D}^{(i,i)} = d_0\mathbf{1} + d_\alpha\sigma_\alpha,\ \mathbf{S}^{(i)} = s_0\mathbf{1} + s_\alpha\sigma_\alpha. \tag{18}$$

Ввиду указанного выше требования, чтобы блоки $\mathbf{S}^{(j)}$ должны обладать такими свойствами, как и соответствующие им блоки $\mathbf{H}^{(j)}$, коэффициент s_1 всегда равен нулю. Кроме того, как и выше, коэффициенты d_0, d_1, d_3 и s_0, s_3 вещественные, d_2 и s_2 мнимые. Подстановка разложений (16 - 18) в уравнение (15) и приравнивание коэффициентов разложений, стоящих в левой и правой частях равенства (18), что является необходимым в силу линейной независимости набора матриц $\mathbf{1}$, σ_α, $\alpha = 1, 2, 3$, дает систему уравнений для коэффициентов

$$d_0 = s_0,\ 2\mathrm{i}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} r_\beta h_\gamma^{(i)} + d_\alpha = s_\alpha,\ \alpha = 1, 2, 3, \tag{19}$$

в которой коэффициенты $h_0^{(i)}, d_0$ и $h_\alpha^{(i)}, d_\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3$ рассматриваются как заданные, а коэффициенты r_0, s_0 и r_α, s_α, $\alpha = 1, 2, 3$ – неизвестные искомые величины.

Из (19) следует, что s_0 выбирается однозначным образом, а $r_0 = 0$, учитывая требование $\operatorname{Sp}\mathbf{R}^{(i,i)} = 0$. Заметим, что равенство $d_0 = s_0$ приводит к тому, что $\operatorname{Sp}\mathbf{S}^{(i)} = 0$, если блок $\mathbf{H}^{(i)}$ диагональный и, следовательно, $\operatorname{Sp}\mathbf{H}^{(i)} = 0$, т.е. $\operatorname{Sp}\mathbf{T}^{(i)} = \operatorname{Sp}\mathbf{D}^{(i)} = 0$. Таким образом, имеется согласованность со сделанным выше выбором свойств 2×2-блоков в уравнении (13).

Проанализируем решения второго из уравнений (18). Допустим, что квадрат вектора $h_\alpha^{(i)}$ равен нулю, $h_\alpha^{(i)} h_\alpha^{(i)} = 0$, что, так как вектор h_α комплексный, возможно даже при $h_\alpha^{(i)} \neq 0$. Тогда, так как матрицы σ_α, $\alpha = 1, 2, 3$ безследны, то есть $\mathrm{Sp}\,\mathbf{H}^{(i)} = 2h_0$, и как $\det \mathbf{H}^{(i)} = (h_0^{(i)})^2 - h_\alpha^{(i)} h_\alpha^{(i)}$, то спектральное уравнение для матрицы $\mathbf{H}^{(i)}$ имеет вид

$$\det(\lambda \mathbf{1} - \mathbf{H}^{(i)}) = \lambda^2 - 2\lambda h_0^{(i)} + (h_0^{(i)})^2 = 0,$$

то есть она имеет одно двукратное собственное число $h_0^{(i)}$, которое является собственным числом матрицы $\mathbf{H}^{(i)}$, что недопустимо условиями теоремы. Таким образом, $h_\alpha^{(i)} h_\alpha^{(i)} \neq 0$.

Из (18), полагая поочередно $\alpha = 1, 2, 3$, следует

$$2\mathrm{i}(r_2 h_3^{(i)} + h_2^{(i)} r_3) + d_1 = 0, \; -2\mathrm{i} r_1 h_3^{(i)} + d_2 = s_2, \; -2\mathrm{i} r_1 h_2^{(i)} + d_3 = s_3. \tag{20}$$

Кроме того, следствием $\mathrm{Sp}(\mathbf{R}^{(i,i)} \mathbf{H}^{(i)}) = 0$, является уравнение

$$r_\alpha h_\alpha^{(i)} = 0. \tag{21}$$

Тогда из (21), в случае матриц $\mathbf{H}^{(j)}$ типа 1, следует $h_0^{(i)} = h_2^{(i)} = 0, r_3 = 0$, то есть $s_0 = s_2 = 0$, $s_3 = d_3$, а из (20) следует

$$r_2 = \frac{\mathrm{i} d_1}{2h_3^{(i)}}, \; r_1 = \frac{d_2}{2\mathrm{i} h_3^{(i)}}$$

и при этом r_2 – мнимая, r_1 – вещественные величины. Таким образом, решение единственно и матрица $\mathbf{R}^{(i)}$ вещественная.

Точно также, в случае матриц $\mathbf{H}^{(j)}$ типа 2, $h_3^{(i)} = 0$, то есть $s_2 = 0$, и из (21) следует $r_2 = 0$, то есть $s_2 = d_2$, а из (20) следует

$$r_3 = \frac{d_1}{2\mathrm{i} h_2^{(i)}}, \; r_1 = \frac{\mathrm{i} d_3}{2h_2^{(i)}}$$

и при этом r_1 и r_3 – вещественные величины. Таким образом, и в этом случае, решение единственно и матрица $\mathbf{R}^{(i)}$ вещественная.

Рассмотрим случай $i \neq j$ в (14). В силу того, что все собственные числа матрицы $\mathbf{G}$ различны, для любой пары различных номеров $\{i, j\}$, то, согласно известному утверждению (см. [7], гл.8, §3, стр.207)), уравнение (14) при $i \neq j, i, j = 1 \div n$

$$\mathbf{R}^{(i,j)} \mathbf{H}^{(j)} - \mathbf{H}^{(i)} \mathbf{R}^{(i,j)} = -\mathbf{D}^{(i,j)}$$

однозначно разрешимо.

Следствие. *Пусть для фиксированного четного числа* $d = 2n$ *задана* $\mathbf{G} : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d$ *– дифференцируемая по* $X \in \mathbf{R}^d$ *матриц-функция со значениями в виде вещественных невырожденных спектрально-обратимых матриц* $\mathbf{G}(X)$, $\det \mathbf{G}(X) \neq 0$ *простой структуры, спектр которых не имеет кратных собственных значений. Тогда существует дифференцируемая по* X *матриц-функция* $\mathbf{U} : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d$ *со значениями в виде вещественных невырожденных матриц* $\mathbf{U}(X)$, $\det \mathbf{U}(X) \neq 0$, *такая, что при каждом* $X \in \mathbf{R}^d$ *матрицы* $\mathbf{U}(X)\mathbf{G}(X)\mathbf{U}^{-1}(X) = \mathbf{H}(X)$ *являются каноническими гамильтоновыми.*

Значения однозначной дифференцируемой по x_1 матриц-функции $\mathbf{U}(X)$ определяются на оси $\{\langle x_1, 0, \ldots, 0 \rangle\}$ применением утверждения Теоремы 3 начиная со значения $\mathbf{U}(0)$ ее в точке 0, положив в утверждении теоремы $\xi = x_2$. В результате, получается дифференцируемая по x_1 функция $\mathbf{U}(x_1)$. Затем для каждого фиксированного значения x_1 определяется матриц-функция $\mathbf{U}(x_1,x_2)$ применением Теоремы 3, начиная со значения $\mathbf{U}(x_1,0)=\mathbf{U}(x_1)$, положив в утверждении теоремы $\xi = x_2$. В результате, получается дифференцируемая по x_2 функция $\mathbf{U}(x_1,x_2)$. Эта функция является также дифференцируемой и по x_1, так как дифференцируемым по x_1 является начальное значение решения дифференциального уравнения по x_2 для матрицы $\mathbf{U}(x_1,x_2)$. Таким образом, мы получаем дифференцируемую функцию $\mathbf{U}(x_1,x_2)$ в плоскости $\{\langle x_1, x_2, 0,..., 0\rangle\}$. Продолжая этот процесс далее до исчерпания всех направления координатных осей в пространстве $\mathbf{R}^d$, получим последовательность дифференцируемых матриц-функций $\langle \mathbf{U}(x_1), \mathbf{U}(x_1,x_2), \mathbf{U}(x_1,x_2,...,x_d)\rangle$. Полагая $\mathbf{U}(X)=\mathbf{U}(x_1,x_2,...,x_d)\cdot ...\cdot \mathbf{U}(x_1,x_2)\cdot \mathbf{U}(x_1)$ построим требуемую матриц-функцию.

Замечание. При построении матрицы $\mathbf{S}(\xi)$ при доказательстве Теоремы 3 не было необходимости доопределять матричные элементы в 2×2-матрицах $\mathbf{S}^{(i)}$, $i=1\div n$. Нужно было воспользоваться тем, что собственные числа матриц $\mathbf{G}(X)$ аналитически зависят от X, что следует из того, что ее характеристическое уравнение имеет дифференцируемые по X коэффициенты.

Список литературы
References

1. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. 2011. Свойство локальной обратимости гамильтоновых динамических систем // Материалы Международной конференции «Комплексный анализ и его приложения в дифференциальных уравнениях и теории чисел» Белгород, 17-21 октября 2011 / С.37-38.

Virchenko Yu.P., Subbotin A.V. 2011. The property of local reversibility of Hamiltonian dynamical systems // Conference materials "Complex analysis and its applications in differential equations theory and number theory" P.37-38.

2. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. 2011. Симметричность спектра линейных гамильтоновых систем. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics, 17(112);24: 179-180.

Virchenko Yu.P., Subbotin A.V. 2011. Spectrum symmetry of linear Hamiltonian dynamical systems. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics, 17(112);24: 179-180.

3. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. 2012. Полностью вырожденные линейные гамильтоновы системы. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics, 23(142);29: 215-218

Virchenko Yu.P., Subbotin A.V. 2012. Completely degenerated linear Hamiltonian systems. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics, 23(142);29: 215-218.

4. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. 2013. Характеризация линейных гамильтоновых систем // Материалы международной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения» 26-31 мая 2013, Белгород / Белгород: Политерра, 2013. – С.180-181.

Virchenko Yu.P., Subbotin A.V. 2013. Chracterization of linear Hamiltonian systems // Conference materials "Differential equations and its applications". P.180-181.

5. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. 2013. О спектральном разложении генераторов гамильтоновых систем. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics, 5(148);30: 135-141.

Virchenko Yu.P., Subbotin A.V. 2013. About spectral decomposition of Hamiltonian systems generators. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics, 5(148);30: 135-141.

6. Арнольд В.И. 1989. Математические методы классической механики. М.: Наука, 472.

Arnol'd V.I. 1989. Mathematical methods of classical mechanics. M.: Nauka, 472.

7. Гантмахер Ф.Р. 1966. Теория матриц. М.: Наука, 576.

Gantmakher F.R. 1966. Matrix theory. M.: Nauka, 576.