



УДК 517.958[550.3+551.5]

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ОБЛАЧНЫХ КАПЕЛЬ
ВО ФРАКТАЛЬНОЙ ОБЛАЧНОЙ СРЕДЕ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА НАГРЕВА****MATHEMATICAL MODELING OF THE DYNAMICS OF CLOUD DROPLETS IN
THE FRACTAL CLOUD ENVIRONMENT TAKING INTO ACCOUNT THE EFFECT
OF HEATING****Т.С. Кумыков****T.S. Kumukov**

Институт прикладной математики и автоматизации – филиал
Федерального государственного бюджетного научного учреждения
«Федеральный научный центр «Кабардино-Балкарский научный центр Российской
академии наук» (ИПМА КБНЦ РАН)
360004, Россия, КБР, г. Нальчик, ул. Шортанова 89 А

Institute of Applied Mathematics and Automation of Kabardin-Balkar Scientific Centre of RAS
89 A Shortanova St., Nalchik, 360004, Russia

E-mail: macist20@mail.ru

Аннотация

На основе дифференциального уравнения с дробной производной Капуто построена математическая модель диффузионного роста капель с учетом влияния тепла во фрактальной облачной среде. Проведены численные эксперименты для оценки влияния фрактальности среды и скорости диссипации теплоты, выделяющейся на каплях при конденсации, на рост облачных частиц при различных комбинациях микрофизических параметров.

Abstract

On the basis of differential equations with Caputo fractional derivative mathematical model of diffusion growth of droplets taking into account the effect of heat in fractal cloud environment. Numerical experiments are performed to evaluate the influence of fractality of the environment and the speed of dissipation of heat released on the droplet during condensation, the growth of cloud particles at different combinations of microphysical parameters.

Ключевые слова: фрактальная структура, облачная капля, эффект нагрева.

Keywords: fractal structure, cloud drop, the heating effect.

1. Введение

Как известно, испарение и рост капель жидкости в газообразной среде – процессы, играющие важную роль в природе [1]. Капли, образующие атмосферные облака и туманы, могут расти или испаряться за счет конденсации на них пара из окружающего воздуха, причем процессы роста и испарения протекают с поглощением или выделением тепла и могут происходить в условиях переохлаждения, кристаллизации. Исследованием геофизических процессов в облаках занимались Качурин Л.Г., Мейсон Б.Дж., Мучник В.М., Чалмерс Дж.А., Юман М., Ribeira J.C., Workman E.J., Reynold S.E., Имянитов И.М., Френкель Я.И. и др.

Также известно, что облака представляют собой нерегулярную фрактальную среду [2, 3]. Адекватное описание геопрцессов в облаках невозможно без применения фрак-



тально-динамического подхода [4], который существенно позволит развить физику облаков, где генезис грозových очагов являются предметом оживленных дискуссий [5]. В таких средах широко применяется аппарат дробного исчисления [6]. Это дает возможность решения сложных систем интегро-дифференциальных уравнений за счет введения нового параметра модели – порядка дробной производной. В известной мере основанием для этого являются подходящие математические свойства различных линейных операторов дробного исчисления. Так, дробный интеграл является обобщением n -кратного интеграла, а всюду не дифференцируемые в обычном смысле фрактальные функции могут быть дифференцируемы в смысле дробной производной Римана-Лиувилля или Капуто, что применимо для описания множественных процессов, например процессы роста и испарения с поглощением или выделением тепла. В связи с этим большой интерес представляет теоретическое исследование особенностей механизма роста и испарения облачных капель, учитывая фрактальность среды.

В данной работе на основе дифференциального уравнения с дробной производной Капуто рассматривается модель диффузионного роста капель с учетом эффекта нагрева во фрактальной облачной среде.

2. Постановка и решение задачи

Рассмотрим рост капли в облачной среде, скорость которого определяется не только скоростью диффузии водяного пара к ее поверхности, но и скоростью рассеивания теплоты, выделяющейся на капле при конденсации. Высвобождение скрытой теплоты конденсации L приводит к повышению температуры капли относительно окружающего воздуха: начинается процесс диффузии тепла в сторону от капли, который определяется уравнением, аналогичным уравнению для диффузии водяного пара:

$$\frac{dQ}{dt} = 4\pi r \lambda_a (T_s - T) c_i.$$

Уравнение сохранения энергии для капли имеет вид:

$$c_s n \frac{dT_s}{dt} = L \frac{dn}{dt} \frac{dQ}{dt}, \tag{1}$$

где c_s – теплоемкость воды, n – число молекул водяного пара, T_s – температура на поверхности капли.

Для установившегося процесса роста капли, то есть при постоянстве температуры поверхности капли $\frac{dT_s}{dt} = 0$, выполняется условие сохранения энергии:

$$\frac{dQ}{dt} = L \frac{dn}{dt},$$

т. е. отток теплоты за единицу времени от капли равен притоку теплоты в результате изменения числа молекул в капле.

Температура поверхности капли определяется из уравнения сохранения энергии (1) с учетом уравнения скорости изменения количества теплоты и скорости увеличения числа молекул в капле:

$$T_s = T + \frac{LDc_s c_f}{\lambda_a k c_i} \left(\frac{e}{T} - \frac{E}{T_s} \right), \tag{2}$$

где D – коэффициент молекулярной диффузии водяного пара в воздухе, c_f – коэффициент вентиляции (ветровой множитель), c_i – поправочный коэффициент на размер капли, k – постоянная Больцмана, e – парциальное давление водяного пара, E – давление насыщения водяного пара, λ_a – теплопроводность воздуха.



В уравнении (2) внешние условия задаются параметрами e и T , а отношение $\frac{LDc_r c_f}{\lambda_a k c_r}$ слабо зависит от температуры и давления.

Вычисляя температуру поверхности капли и парциальное давление над каплей, путем совместного решения уравнения (4) и уравнения

$$E(T, r) = E(T) \exp\left(\frac{2\sigma m_*}{\rho_* T k r}\right),$$

а затем учитывая формулу

$$\frac{dr}{dt} = \frac{Dm_*}{\rho_* T k r} (e - E) c_r c_f,$$

получаем скорость конденсационного роста капли с учетом эффекта нагрева в виде:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{e - E(T, r)}{\left(\frac{L^2 \rho_* E(T)}{k \lambda_a T^2} + \frac{k \rho_* T}{D}\right) r(t)}. \quad (3)$$

Первое слагаемое в знаменателе описывает влияние теплопроводности, а второе – диффузии водяного пара.

По аналогии с работой [2] введем эффективную скорость изменения радиуса капли, учитывающую фрактальность среды

$$\left\langle \frac{dr(t)}{dt} \right\rangle = \frac{1}{\tau} D_{0r}^{\alpha-1} \frac{dr(t)}{dt} = \frac{1}{\tau} \partial_{0r}^{\alpha} r(t), \quad 0 < \alpha < 1,$$

с учетом которой, (3) принимает вид

$$\partial_{0r}^{\alpha} r(t) = \frac{e - E(T, r)}{\left(\frac{L^2 \rho_* E(T)}{k \lambda_a T^2} + \frac{k \rho_* T}{D}\right) r(t)}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (4)$$

где $\partial_{0r}^{\alpha} r(t)$ – дробная производная по Капуто, α – феноменологический параметр (в нашем случае – показатель фрактальности среды), τ – характерное время процесса.

Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка (4) с начальным условием

$$r(0) = r_0. \quad (5)$$

Задачи типа Коши для дифференциальных уравнений с дробной производной Римана–Лиувилля исследованы в работе [7].

Для нахождения приближенного решения задачи (4)–(5) воспользуемся разностным методом, предложенным в работе [8]. С этой целью на отрезке $[0, T]$ введем сетку $\bar{\omega}_h = \{jh, j = 0, 1, 2, \dots, N\}$ с шагом $h = T/N$ по времени, где N – натуральное число.

Дифференциальной задаче (4)–(5) поставим в соответствие следующую разностную схему:

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^j (t_{j-s+1}^{1-\alpha} - t_{j-s}^{1-\alpha}) y_{t,s} = f(t_j, y_j), \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (6)$$

$$y_0 = r_0, \quad (7)$$

где $\Delta_{0t}^{\alpha} y = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^j (t_{j-s+1}^{1-\alpha} - t_{j-s}^{1-\alpha}) y_{t,s}$ – дискретный аналог дробной производной, $y_{t,s} = \frac{y_{s+1} - y_s}{h}$ –

правая разностная производная, $f(t_j, y_j) = \frac{e - E(T, r)}{\left(\frac{L^2 \rho_* E(T)}{k \lambda_a T^2} + \frac{k \rho_* T}{D}\right) y_j}$.

Схема (6)–(7) является явной:

$$y_{j+1} = y_j + h^\alpha \Gamma(2-\alpha) \left[f(t_j, y_j) - \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^{j-1} (t_{j-s+1}^{1-\alpha} - t_{j-s}^{1-\alpha}) y_{t,s} \right],$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

Решение y разностной задачи (6)–(7) сходится к решению r соответствующей дифференциальной задачи (9)–(10) со скоростью $O(h^\alpha)$.

3. Анализ полученных результатов

На рисунках 1 и 2 представлены графики численного решения задачи для разных значений температур ($T = 0^\circ\text{C}$ и $T = 5^\circ\text{C}$) и фрактальности среды α ($\alpha = 0,3$; $\alpha = 0,6$; $\alpha = 0,9$; $\alpha = 1$) с использованием Matlab R2016B. При этом функции были приведены к безразмерному виду, где в качестве характерной длины взято начальное значение r_0 . Из рисунка видно, что при малых значениях параметра α происходит резкий скачок радиуса капель, а затем после перехода через зону действия фрактального эффекта, замедляется. Исходя из этого, можно предположить, что процессы во фрактальных облачных средах протекают значительно медленнее, чем в сплошных.

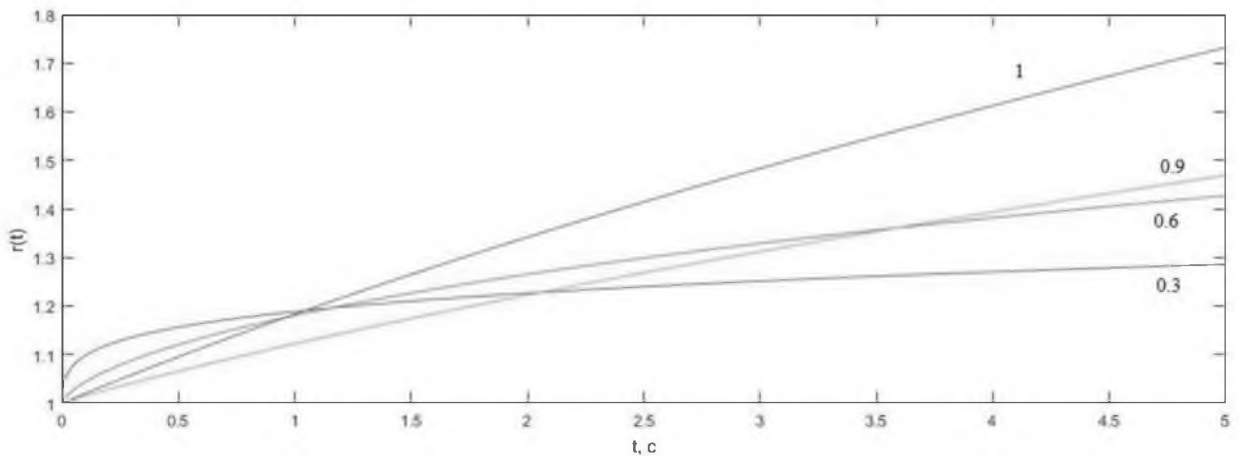


Рис. 1. Графики решений задачи (6), (7) при $T = 0^\circ\text{C}$ для различных α
 Fig. 1. Schedules of solutions of a task (6), (7) at $T = 0^\circ\text{C}$ for various α

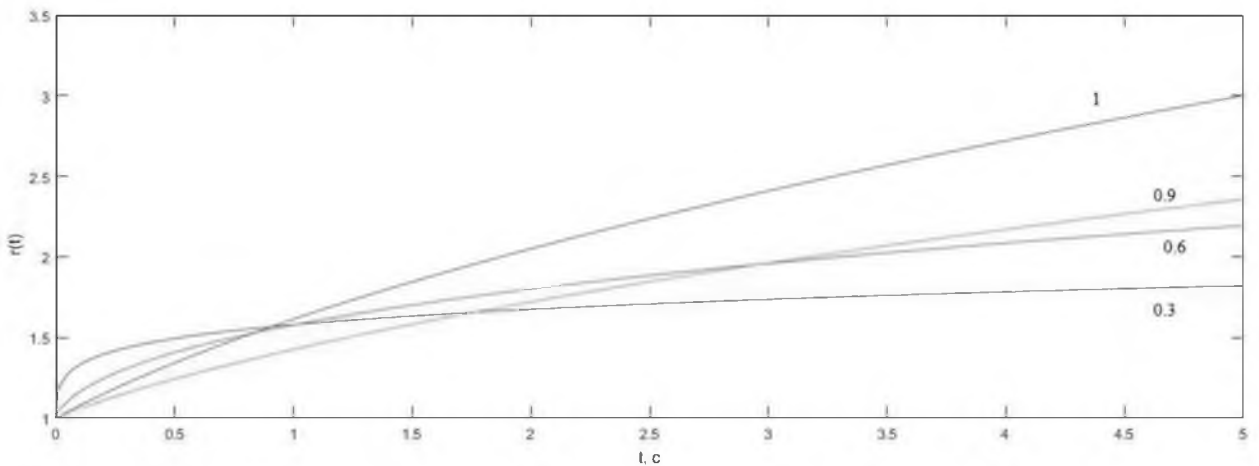


Рис. 2. Графики решений задачи (6) (7) при $T = 5^\circ\text{C}$ для различных α
 Fig. 2. Schedules of solutions of a task (6), (7) at $T = 5^\circ\text{C}$ for various α



Из результатов, представленных на рисунках 1 и 2, можно заметить, что при повышении температуры скорость роста капли повышается и, что предложенная модель находится в хорошем согласии с точным решением.

4. Заключение

В заключение отметим, что средний радиус капель в облаке является основным осадкообразующим фактором, эволюция которого связана с различными механизмами роста. Проведенные численные эксперименты для оценки влияния фрактальности среды на рост облачных частиц при различных сочетаниях микрофизических параметров показали общую зависимость роста облачных частиц от параметра фрактальности среды, выражающуюся в резком скачке, а затем в уменьшении скорости роста капель при различных значениях параметра. Выявлена зона начала действия фрактального эффекта при различных значениях параметра фрактальности среды с учетом эффекта нагрева. При нагреве зона фрактальности поднимается вверх. Полученные формулы, можно использовать для расчета изменения радиуса частиц облака с учетом эффекта нагрева капель с заданными параметрами, учитывающими фрактальность среды.

Список литературы

References

1. Фукс Н.А. 1958. Испарение и рост капель в газообразной среде (Академия наук СССР. Итоги науки 1). Физико-математические науки. М.: Изд-во Академии наук СССР, 93 с.
Fuks N.A. 1958. Isparenie i rost kapel v gazoobraznoy srede (Akademiya nauk SSSR. Itogi nauki 1). Fiziko-matematicheskie nauki. M.: Izd-vo Akademii nauk SSSR, 93 s.
2. Кумыков Т.С. 2016. Динамика заряда облачных капель во фрактальной среде. Математическое моделирование. №12. : 56–62.
Kumykov T.S. 2016. Dinamika zaryada oblachnyih kapel vo fraktalnoy srede. Matematicheskoe modelirovanie. №12. : 56–62.
3. Кумыков Т.С. 2016. Моделирование возникновения фрактальных структур «бабстонов» в атмосфере. Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика. Выпуск 44, №20 (241): 145–153.
Kumykov T.S. 2016. Modelirovanie vozniknoveniya fraktalnyih struktur «babstonov» v atmosfere. Nauchnyie vedomosti BelGU. Seriya: Matematika. Fizika. Vyipusk 44, №20 (241): 145–153.
4. Iudin D.I., Trakhtengerts V.Y., Hayakawa M. 2003. Fractal dynamics of electric discharges in a thundercloud. Phys. Rev. E. V. 68. P. 016601.
5. Мареев Е.Л., Трахтенгерц В.Ю., Иудин Д.И. и др. 2004. Современные проблемы исследования грозового электричества. Проектирование и технология электронных средств. : 7-16.
Mareev E.L., Trahtengerts V.Yu., Iudin D.I. i dr. 2004. Sovremennyye problemyi issledovaniya grozovogo elektrichestva. Proektirovanie i tehnologiya elektronnyih sredstv. : 7-16.
6. Псху А.В. 2005. Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными дробного и континуального порядка. Нальчик: Издательство КБНЦ РАН. 185.
Pshu A.V. 2005. Kraevyye zadachi dlya differentsialnyih uravneniy s chastnyimi proizvodnyimi drobnogo i kontinualnogo poryadka. Nalchik: Izdatelstvo KBNTs RAN. 185.
7. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. 1987. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения», Минск: Наука и техника, 688.
Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. 1987. Integraly i proizvodnyie drobnogo poryadka i nekotoryie ih prilozheniya», Minsk: Nauka i tehnika, 688.
8. Шогенов В.Х., Шхануков–Лафишев М.Х., Бештоев Х.М. 1997. Дробные производные: интерпретация и некоторые применения в физике. Сообщения объединенного института ядерных исследований, Дубна, 20.
Shogenov V.H., Shhanukov–Lafishev M.H., Beshtoev H.M. 1997. Drobnyye proizvodnyie: interpretatsiya i nekotoryie primeneniya v fizike. Soobscheniya ob'edinennogo instituta yadernyih issledovaniy, Dubna, 20.