УДК 517.927.2

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО НЕПРЕРЫВНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПРОИЗВОДНЫМИ РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ СЕГМЕНТНОГО ПОРЯДКА

THE DIRICHLET PROBLEM FOR ORDINARY CONTINUOUS DIFFERENTIAL EQUATION WITH THE RIEMANN-LIOUVILLE DERIVATIVES OF SEGMENT ORDER

Б.И. Эфендиев
B.I. Efendiev

[2]Институт прикладной математики и автоматизации,
Россия, 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, д. 89А

Institute of Applied Mathematics and Automation, 89 A, Shortanov St, Nalchik, 360000, Russia

E-mail: beslan_efendiev@mail.ru

Аннотация. В данной работе рассматривается задача Дирихле для обыкновенного непрерывного дифференциального уравнения с производными Римана-Лиувилля сегментного порядка.

Resume. In this paper we consider the Dirichlet problem for an ordinary continuous differential equation with Riemann-Liouville derivatives of segment order.

Ключевые слова: непрерывные дифференциальные уравнения, задача Дирихле, производная Римана-Лиувилля сегментного порядка, дробная производная Римана-Лиувилля.

Key words: continuous differential equations, Dirichlet problem, Riemann-Liouville derivative of segment order, fractional derivative Riemann-Liouville.

Введение

В интервале $0 < x < l$ рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u''(x) + aD_{0x}^{[\alpha,\beta]}u(x) + bu'(x) + cD_{0x}^{[\gamma,\delta]}u(x) + du(x) = f(x), \tag{1}$$

где (см. [1, 2]),

$$D_{0x}^{[\alpha,\beta]}u(x) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} D_{0x}^{s}u(x)ds \tag{2}$$

- оператор непрерывного интегродифференцирования порядка $[\alpha,\beta]$, $D_{0x}^{s}u(x)$ - оператор дробного интегродифференцирования Римана-Лиувилля порядка s [2], $1<\alpha<\beta<2$, $0<\gamma<\delta<1$, a,b,c,d - const.

Уравнение (1) относится к классу непрерывных дифференциальных уравнений [1]. Оператор (2) был введен в работе [1], а в [2] были изучены их свойства, в частности, доказана положительность этих операторов, получена формула непрерывного интегрирования по частям.

В работе [3] построен оператор, обращающий оператор (2) и получены аналоги формулы Ньютона-Лейбница, а в [4, с. 148] доказан принцип экстремума для оператора непрерывного интегродифференцирования (2).

Уравнения с операторами вида (2) исследовались ранее многими учеными, в случае когда под интегралом стоит оператор Римана-Лиувилля - А.М. Нахушевым и А.В. Псху (см. [5, гл. 2,4], [4, гл. 5]).

В работе [6] для обыкновенного дифференциального уравнения континуального порядка

$$D_{0x}^{[\alpha,\beta]}u(x) + \lambda u(x) = f(x), \qquad \alpha < \beta \le 1$$

построено фундаментальное решение и найдено представление решения задачи Коши, показана положительность фундаментального решения и характер зависимости от спектрального параметра.

Для уравнения (1) при $a=b=d=0$, $c=\lambda$ построено фундаментальное решение и найдены решения начальной и краевых задач [7-9]. В случае $a=b=c=\lambda$, $d=0$, для уравнения (1) получены необходимые начальные условия [10]. В работе [11] для уравнения (1) найдено фундаментальное решение и с его помощью построено явное представление решения видоизмененной задачи Коши для уравнения (1).

Регулярным решением уравнения (1) в области $]0,l[$ назовем функцию $u=u(x)$, принадлежащую классу $C[0,l]\cap C^2]0,l[$ и удовлетворяющую уравнению (1) в области $]0,l[$.

Задача. *Найти регулярное решение $u=u(x)$ уравнения (1) в интервале $]0,l[$, удовлетворяющее следующим условиям:*

$$u(0)=u_0, \qquad u(l)=u_l, \tag{3}$$

где $u_0,u_l-const.$

Рассмотрим функцию

$$G(x,t)=H(x-t)W(x-t)-\frac{W(x)W(l-t)}{W(l)}. \tag{4}$$

$$W(x)=W(x;\alpha,\beta,\gamma,\delta)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\nu_n(x), \qquad \nu_0(x)=x,$$

$$\nu_n(x)=\int_0^x\nu_{n-1}(x-t)\left[a\frac{1}{t}Vi(2-\beta,2-\alpha,t)+b+c\frac{1}{t}Vi(2-\delta,2-\gamma,t)+dt\right]dt, \qquad n\in N,$$

$$Vi(\sigma,\rho,x)=\int_\sigma^\rho\frac{x^t}{\Gamma(t)}dt, \quad x\geq 0, \quad \rho\geq\sigma\geq 0.$$

Здесь $W(x)$ – фундаментальное решение уравнения (1) [11], $H(x)$ – функция Хевисайда, $\Gamma(x)$ – гамма-функция Эйлера.

Оператор $\partial_{0x}^{[\rho,\sigma]}$ называется *регуляризованным* оператором дифференцирования сегментного порядка и связан с оператором непрерывного интегродифференцирования $D_{0x}^{[\gamma,\delta]}$ (2) соотношением

$$\partial_{0x}^{[\rho,\sigma]}u(x)=D_{0x}^{[\rho,\sigma]}u(x)-\sum_{k=0}^{n-1}u^{(k)}(0)\frac{1}{x}Vi(k-\sigma+1,k-\rho+1,x), \quad n-1<\sigma\leq n, \quad n\in N.$$

Лемма. *Функция $G(x,t)$ обладает следующими свойствами:*

1) $G(x,t)$ как функция переменной x является решением задачи

$$G_{xx}(x,t)+aD_{0x}^{[\alpha,\beta]}G(x,t)+bG_x(x,t)+cD_{0x}^{[\gamma,\delta]}G(x,t)+dG(x,t)=0, \tag{5}$$

$$G(0,t)=0, \qquad G(l,t)=0, \tag{6}$$

2) $G(x,t)$ как функция переменной t является решением задачи

$$G_{tt}(x,t)+a\partial_{lt}^{[\alpha,\beta]}G(x,t)-bG_t(x,t)+c\partial_{lt}^{[\gamma,\delta]}G(x,t)+dG(x,t)=a\frac{W(x)}{W(l)}\frac{1}{l-t}Vi(2-\beta,2-\alpha,l-t), \tag{7}$$

$$G(x,0)=0, \qquad G(x,l)=0, \tag{8}$$

3) $G(x,t)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[G_t(x,x+\varepsilon)-G_t(x,x-\varepsilon)\right]=1. \tag{9}$$

Действительно, из определения фундаментального решения уравнения (1) следует, что функция $W(x)$ удовлетворяет условиям [11]

$$W''(x)+aD_{0x}^{[\alpha,\beta]}W(x)+bW'(x)+cD_{0x}^{[\gamma,\delta]}W(x)+dW(x)=0, \tag{10}$$

$$W''(x)+a\partial_{0x}^{[\alpha,\beta]}W(x)+bW'(x)+c\partial_{0x}^{[\gamma,\delta]}W(x)+dW(x)=-a\frac{1}{x}Vi(2-\beta,2-\alpha,x), \tag{11}$$

$$W(0)=0, \qquad W'(0)=1. \tag{12}$$

Равенства (6) и(8) непосредственно получаются из представления (4) функции $G(x,t)$ с учетом первого соотношения (12).

Теперь докажем формулу (9). В силу соотношения $W_t(x-t)=-W_x(x-t)$ и второго равенства (12) имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[G_t(x,x+\varepsilon)-G_t(x,x-\varepsilon)\right]=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\frac{W(x)W_t(l-x-\varepsilon)}{W(l)}-W_t(x-x+\varepsilon)+\frac{W(x)W_t(l-x-\varepsilon)}{W(l)}\right]=$$

$$=-\frac{W(x)W_t(l-x)}{W(l)}-W_t(0)+\frac{W(x)W_t(l-x)}{W(l)}=W'(0)=1.$$

Если вместо $G(x,t)$ в формулу (5) подставить представление (4), то в силу равенства (10) получится тождество. Справедливость равенства (7) следует из соотношения (11).

Функцию $G(x,t)$, определяемая формулой (4) и обладающая свойствами 1) - 3), назовем *функцией Грина* задачи Дирихле (3) для уравнения (1).

Теорема. Пусть $f(x)\in L[0,l]\cap C]0,l[$ *и выполнено условие* $W(l)\neq 0$. *Тогда задача Дирихле (3) для уравнения (1) однозначно разрешима и решение имеет вид*

$$u(x)=-u_0G_t(x,0)+u_lG_t(x,l)+\int_0^l G(x,t)f(t)dt. \tag{13}$$

Доказательство. Пусть $u(x)$ – решение уравнения (1). Проинтегрируем выражение $G(x,t)Lu(t)$ по переменной t от ε до $l-\varepsilon$, $0<\varepsilon<l$

$$\int_\varepsilon^{l-\varepsilon}G(x,t)u''(t)dt+a\int_\varepsilon^{l-\varepsilon}G(x,t)D_{0t}^{[\alpha,\beta]}u(t)dt+b\int_\varepsilon^{l-\varepsilon}G(x,t)u'(t)dt+c\int_\varepsilon^{l-\varepsilon}G(x,t)D_{0t}^{[\gamma,\delta]}u(t)dt+d\int_\varepsilon^{l-\varepsilon}G(x,t)u(t)dt=\int_\varepsilon^{l-\varepsilon}G(x,t)f(t)dt. \tag{14}$$

Вычислим интегралы стоящие в левой части равенства (14)

$$\int_\varepsilon^{l-\varepsilon}G(x,t)u''(t)dt=\int_\varepsilon^{l-\varepsilon}G_{tt}(x,t)u(t)dt+u(x)+u'(l-\varepsilon)G(x,l-\varepsilon)-u'(\varepsilon)G(x,\varepsilon)-u(l-\varepsilon)G_t(x,l-\varepsilon)+u(\varepsilon)G_t(x,\varepsilon). \tag{15}$$

$$\int_\varepsilon^{l-\varepsilon}G(x,t)D_{0t}^{[\alpha,\beta]}u(t)dt=\int_\varepsilon^{l-\varepsilon}G(x,t)\frac{d^2}{dt^2}D_{0t}^{[\alpha-2,\beta-2]}u(t)dt=\int_\varepsilon^{l-\varepsilon}G_{tt}(x,t)D_{0t}^{[\alpha-2,\beta-2]}u(t)dt+$$
$$+D_{0(l-\varepsilon)}^{[\alpha-1,\beta-1]}u(l-\varepsilon)G(x,l-\varepsilon)-D_{0\varepsilon}^{[\alpha-1,\beta-1]}u(\varepsilon)G(x,\varepsilon)-D_{0(l-\varepsilon)}^{[\alpha-2,\beta-2]}u(l-\varepsilon)G_t(x,l-\varepsilon)+D_{0\varepsilon}^{[\alpha-1,\beta-1]}u(\varepsilon)G_t(x,\varepsilon). \tag{16}$$

С учетом формулы непрерывного интегрирования по частям [5, с. 34]

$$\int_A^B v(x)D_{Ax}^{[\rho,\sigma]}u(x)dx=\int_A^B u(x)D_{Bx}^{[\rho,\sigma]}v(x)dx, \qquad \rho<\sigma\le 0$$

интеграл в правой части (16) равен

$$\int_\varepsilon^{l-\varepsilon}G_{tt}(x,t)D_{0t}^{[\alpha-2,\beta-2]}u(t)dt=\int_\varepsilon^{l-\varepsilon}G_{tt}(x,t)D_{0\varepsilon}^{[\alpha-2,\beta-2]}u(t)dt+\int_\varepsilon^{l-\varepsilon}G_{tt}(x,t)D_{\varepsilon t}^{[\alpha-2,\beta-2]}u(t)dt=$$
$$=\int_\varepsilon^{l-\varepsilon}G_{tt}(x,t)D_{0\varepsilon}^{[\alpha-2,\beta-2]}u(t)dt+\int_\varepsilon^{l-\varepsilon}u(t)D_{(l-\varepsilon)t}^{[\alpha-2,\beta-2]}G_{tt}(x,t)dt=\int_\varepsilon^{l-\varepsilon}G_{tt}(x,t)D_{0\varepsilon}^{[\alpha-2,\beta-2]}u(t)dt+\int_\varepsilon^{l-\varepsilon}u(t)\partial_{(l-\varepsilon)t}^{[\alpha,\beta]}G(x,t)dt.$$

В силу последнего равенства из соотношения (16) окончательно получим

$$\int_\varepsilon^{l-\varepsilon}G(x,t)D_{0t}^{[\alpha,\beta]}u(t)dt=\int_\varepsilon^{l-\varepsilon}G_{tt}(x,t)D_{0\varepsilon}^{[\alpha-2,\beta-2]}u(t)dt+\int_\varepsilon^{l-\varepsilon}u(t)\partial_{(l-\varepsilon)t}^{[\alpha,\beta]}G(x,t)dt+$$
$$+D_{0(l-\varepsilon)}^{[\alpha-1,\beta-1]}u(l-\varepsilon)G(x,l-\varepsilon)-D_{0\varepsilon}^{[\alpha-1,\beta-1]}u(\varepsilon)G(x,\varepsilon)-D_{0(l-\varepsilon)}^{[\alpha-2,\beta-2]}u(l-\varepsilon)G_t(x,l-\varepsilon)+D_{0\varepsilon}^{[\alpha-1,\beta-1]}u(\varepsilon)G_t(x,\varepsilon). \tag{17}$$

$$\int_\varepsilon^{l-\varepsilon}G(x,t)u'(t)dt=-\int_\varepsilon^{l-\varepsilon}G_t(x,t)u(t)dt+u(l-\varepsilon)G(x,l-\varepsilon)-u(\varepsilon)G(x,\varepsilon). \tag{18}$$

$$\int_\varepsilon^{l-\varepsilon}G(x,t)D_{0t}^{[\gamma,\delta]}u(t)dt=-\int_\varepsilon^{l-\varepsilon}G_t(x,t)D_{0\varepsilon}^{[\gamma-1,\delta-1]}u(t)dt+\int_\varepsilon^{l-\varepsilon}u(t)\partial_{(l-\varepsilon)t}^{[\gamma,\delta]}G(x,t)dt+D_{0(l-\varepsilon)}^{[\gamma-1,\delta-1]}u(l-\varepsilon)G(x,l-\varepsilon)-D_{0\varepsilon}^{[\gamma-1,\delta-1]}u(\varepsilon)G(x,\varepsilon). \tag{19}$$

Подставляя равенства (15), (17)-(19) в формулу (14) и устремляя $\varepsilon\to 0$ будем иметь

$$u(x)+\int_0^l u(t)\left[G_{tt}(x,t)+a\partial_{lt}^{[\alpha,\beta]}G(x,t)-bG_t(x,t)+c\partial_{lt}^{[\gamma,\delta]}G(x,t)+dG(x,t)\right]dt+\int_0^l G_{tt}(x,t)D_{00}^{[\alpha-2,\beta-2]}u(0)dt-$$
$$-\int_0^l G_t(x,t)D_{00}^{[\gamma-1,\delta-1]}u(0)dt=\int_0^l G(x,t)f(t)dt+G_t(x,l)\left[u(l)+aD_{0l}^{[\alpha-2,\beta-2]}u(l)\right]-G_t(x,0)\left[u(0)+aD_{00}^{[\alpha-2,\beta-2]}u(0)\right]+$$
$$-G(x,l)\left[u'(l)+aD_{0l}^{[\alpha-1,\beta-1]}u(l)+bu(l)+c\partial_{0l}^{[\gamma-1,\delta-1]}u(l)\right]+G(x,0)\left[u'(0)+aD_{00}^{[\alpha-1,\beta-1]}u(0)+bu(0)+cD_{00}^{[\gamma-1,\delta-1]}u(0)\right], \tag{20}$$

где $D_{00}^{[\rho,\sigma]}u(0)=\lim\limits_{t\to 0}D_{0t}^{[\rho,\sigma]}u(t)$.

Так как операторы $D_{0t}^{[\alpha-2,\beta-2]}, D_{0t}^{[\gamma-1,\delta-1]}$ являются интегральными, то $D_{00}^{[\alpha-2,\beta-2]}u(0)=D_{00}^{[\gamma-1,\delta-1]}u(0)=0$. С учетом свойства 2) функции $G(x,t)$ формулу (20) перепишем в виде

$$u(x)+a\frac{W'(x)}{W(l)}\int_0^l u(t)\frac{1}{l-t}Vi(2-\beta,2-\alpha,l-t)dt=$$

$$=aD_{0l}^{[\alpha-2,\beta-2]}u(l)G_t(x,l)-u(0)G_t(x,0)+u(l)G_t(x,l)+\int_0^l G(x,t)f(t)dt. \qquad (21)$$

В силу равенства

$$D_{0l}^{[\alpha-2,\beta-2]}u(l)=\int_0^l u(t)\frac{1}{l-t}Vi(2-\beta,2-\alpha,l-t)dt$$

из формулы (21) получаем соотношение (13).

Подставляя найденное представление решения (13) в уравнение (1) и в краевые условия (3) с учетом соотношений (5), (6) получаем, что функция $u(x)$, определяемая формулой (13) действительно является решением задачи Дирихле (3) для уравнения (1).

Покажем теперь, что при отрицательных коэффициентах уравнения (1), т.е. $a,b,c,d<0$ условие разрешимости $W(l)\neq 0$ выполняется. Обозначим через

$$\varphi(x)=a\frac{1}{x}Vi(2-\beta,2-\alpha,x)+b+c\frac{1}{x}Vi(2-\delta,2-\gamma,x)+dx\,.$$

Из определения следует, что функция $Vi(\sigma,\rho,x)$ положительна при положительных аргументах. Значит, при отрицательных коэффициентах a,b,c,d функция $\varphi(x)<0$. Отсюда имеем, что $\nu_n(x)<0$ для нечетных n и $\nu_n(x)>0$ для четных n. Таким образом, при $a,b,c,d<0$ знакопеременный ряд $W(l)$ становится положительным, т.е. $W(l)>0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00462)

Список литературы
References

1. Нахушев А.М. 1988. О непрерывных дифференциальных уравнениях и их разностных аналогах. М., Доклады АН СССР, 300 (4): 796-799.

Nakhushev A.M. 1988. O nepreryvnyh differentsialnyh uravnenijah i ih raznostnyh analogah [On continuous differential equations and their difference analogues]. Moscow, Doklady AN USSR.

2. Нахушев А.М. 1998. О положительности операторов непрерывного и дискретного дифференцирования и интегрирования, весьма важных в дробном исчислении и в теории уравнения смешанного типа. М., Дифференциальные уравнения, 34 (1): 101-109.

Nakhushev A.M. 1998. O polozhitelnosti operatorov nepreryvnogoiI discretnogo differentsirovanija i integrirovanija, vesma vazhnyh v drobnom ischislenii i v teorii uravnenija smeshannogo tipa [Positivity operators of continuous and discrete-differentiation and of integration of very important in the fractional calculus and the theory of equations of mixed type]. Moscow, Differential equations.

3. Псху А.В. 2004. К теории оператора интегро-дифференцирования континуального порядка. М., Дифференциальные уравнения, 40 (1): 120-127.

Pskhu A.V. 2004. K teorii operatora integro-differentsirovanija continualnogo porjadka [On the theory of integro-differentiation operator continuum order]. Moscow, Differential equations.

4. Псху А.В. 2005. Уравнения в частных производных дробного порядка. М., Наука.

Pskhu A.V. 2005. Uravnenija v chastnyh proizvodnyh drobnogo porjadka [Partial differential equations of fractional order]. Moscow, Nauka.

5. Нахушев А.М. 2003. Дробное исчисление и его применение. М., Физматлит.

Nakhushev A.M. 2003. Drobnoe ischislenie i ego primenenie [Fractional calculus and its application]. Moscow, Fizmatlit.

6. Псху А.В. 2007. Фундаментальное решение обыкновенного дифференциального уравнения континуального порядка. Нальчик, Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук, 9 (1): 73-78.

Pskhu A.V. 2007. Fundamentalnoe reshenie obyknovennogo differentsialnogo uravnenija continualnogo porjadka [Fundamental Solution for Differential Equation of Continual Order]. Nalchik, Reports of the Adyghe (Circassian) International Academy of Sciences.

7. Эфендиев Б.И. 2011. Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с континуальной производной. М., Дифференциальные уравнения, 47 (9): 1364-1368.

Efendiev B.I. 2011. Zadacha Coshi dlja obyknovennogo differentsialnogo uravnenija vtorogo porjadka s continualnoy proizvodnoy [Cauchy Problem for a Second-Order Ordinary Differential Equation with a Continual Derivative]. Moscow, Differential equations.

8. Эфендиев Б.И. 2013. Задача Стеклова для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с континуальной производной. М., Дифференциальные уравнения, 49 (4): 469-475.

Efendiev B.I. 2013. Zadacha Steklova dlja obyknovennogo differentsialnogo uravnenija vtorogo porjadka s continualnoy proizvodnoy [Steklov Problem for a Second-Order Ordinary Differential Equation with a Continual Derivative]. Moscow, Differential equations.

9. Эфендиев Б.И. 2015. Задача Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с континуальной производной. М., Математические заметки, 97 (4): 620-628.

Efendiev B.I. 2015. Zadacha Dirikhle dlja obyknovennogo differentsialnogo uravnenija vtorogo porjadka s continualnoy proizvodnoy [Dirichlet Problem for a Second-Order Ordinary Differential Equation with a Continual Derivative]. Moscow, Mathematical Notes.

10. Эфендиев Б.И. 2014. Начальная задача для непрерывного дифференциального уравнения второго порядка. М., Дифференциальные уравнения, 50 (4): 564-568.

Efendiev B.I. 2014. Nachalnaja zadacha dlja nepreryvnogo differentsialnogo uravnenija vtorogo porjadka [Initial-Value Problem for a Continuous Second-Order Differential Equation]. Moscow, Differential equations.

11. Эфендиев Б.И. 2015. Начальная задача для обыкновенного непрерывного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Нальчик, Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук, 17 (2): 52-56.

Efendiev B.I. 2015. Nachalnaja zadacha dlja obyknovennogo nepreryvnogo differentsialnogo uravnenija vtorogo porjadka s postojannymi koeffitsientami [Initial-Value Problem for a Continuous Second-Order Ordinary Differential Equation with constant coefficients]. Nalchik, Reports of the Adyghe (Circassian) International Academy of Sciences.