УДК 621.396.01

# О МЕТОДЕ СУБПОЛОСНОЙ ОПТИМАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

# METHOD SUBBAND OPTIMAL INTERPOLATION

**Е.Г. Жиляков, А.А. Черноморец, Е.В. Болгова**
**E.G. Zhilyakov, A.A. Chernomorets, E.V. Bolgova**

*Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Россия, 308015, Белгород, ул. Победы, 85*

*Belgorod State National Research University, 85 Pobeda St, Belgorod, 308015, Russia*

*e-mail: zhilyakov @bsu.edu.ru, chernomorets @bsu.edu.ru, bolgova _e@bsu.edu.ru*

*Аннотация.* В работе предложен метод интерполяции изображений, основанный на оптимальном вычислении субполосных оценок производных интерполируюших изображений. Исследованы требования к выбору подобластей пространственных частот, в которых осуществляется вычисление субполосных оценок производных.

*Resume.* The paper presents the image interpolation method based on the calculation of the optimal subband estimates of the derivatives of interpolating images. We investigated the requirements for the selection of spatial frequencies sub-areas, in which the calculation of the subband estimates of derivatives was performed.

*Ключевые слова:* интерполяция, частотная подобласть, субполосная матрица, трансформанта Фурье
*Keywords*: interpolation, frequency subarea, subband matrix, Fourier transform

В задачах обработки изображений требуется детальный визуальный анализ полученных изображений, что возможно осуществить при увеличении их масштаба. Во многих случаях для решения данной задачи не существует возможности получить новое изображение наблюдаемой сцены с большим разрешением, тогда для масштабирования изображений необходимо применять интерполяционные методы, заключающиеся в вычислении значений интерполирующей функции в некотором фиксированном наборе точек, которые располагаются между пикселями исходных изображений [1].

Простейшим способом интерполяции изображений является интерполяция методом ближайшего соседа (ступенчатая интерполяция) — метод интерполяции, при котором в качестве промежуточного значения выбирается ближайшее известное значение функции. На практике часто применяется интерполяция функции нескольких переменных (билинейная интерполяция и бикубическая интерполяция). Недостатком является тот факт, что с ростом числа точек между узлами интерполяции возрастает порядок многочлена, а вместе с ним возрастает число операций, которые необходимо выполнить для вычисления точки на интерполирующей кривой. С ростом числа точек между узлами интерполяции на интерполирующей кривой возможно появление осцилляций.

Изображение, подлежащее интерполяции, представим в виде прямоугольной матрицы вещественных чисел $U=(u_{m1,m2})$, $m_1=1,2,...,M_1$, $m_2=1,2,...,M_2$. Значения интерполирующего изображения $\hat{U}=(\hat{u}_{n1,n2})$, $n_1=1,2,...,N_1$, $n_2=1,2,...,N_2$, следует вычислять в $D_1$ и $D_2$ промежуточных точках между исходными пикселями вдоль соответствующих осей координат ($D_1$ и $D_2$ – коэффициенты интерполяции), то есть размерности исходного и интерполирующего изображений связаны следующими соотношениями:

$$N_1=D_1(M_1-1)+1, \qquad N_2=D_2(M_2-1)+1. \tag{1}$$

При этом в узлах интерполяции должны выполняться следующие равенства:

$$\hat{u}_{D_1(m_1-1)+1,D_2(m_2-1)+1}=u_{m_1m_2},\ m_1=1,2,...,M_1,\ m_2=1,2,...,M_2. \tag{2}$$

Для решения задачи интерполяции разработаны различные методы, среди которых в настоящее время наибольшее распространение получила интерполяция на основе бикубических сплайнов. Следует, однако, отметить, что такой подход не позволяет учесть частотные свойства исходных изображений $U=(u_{m1,m2})$, $m_1=1,2,...,M_1$, $m_2=1,2,...,M_2$, которые можно описать с помощью трансформанты Фурье [2],

$$F(\omega_1,\omega_2)=\sum_{m_1=1}^{M_1}\sum_{m_2=1}^{M_2}u_{m_1m_2}e^{-j\omega_1(m_1-1)}e^{-j\omega_2(m_2-1)}, \tag{3}$$

где $j$ – мнимая единица, $\omega_1$, $\omega_2$ – пространственные круговые частоты,
$-\pi\le\omega_1<\pi,\quad -\pi\le\omega_2<\pi$ .

Легко показать справедливость свойства периодичности (период равен $2\pi$) по двум аргументам характеристики (3),

$$F(\omega_1+2\pi k_1,\omega_2+2\pi k_2)=F(\omega_1,\omega_2)\ , \tag{4}$$

где $k_1,k_2$ – целые числа.

В свою очередь, трансформанта Фурье интерполирующего изображения,

$$\hat F^{D_1D_2}(x_1,x_2)=\frac{1}{D_1D_2}\sum_{i_1=1}^{N_1}\sum_{i_2=1}^{N_2}\hat u_{i_1i_2}e^{-jx_1(i_1-1)/D_1}e^{-jx_2(i_2-1)/D_2}, \tag{5}$$

$$-\pi D_1\le x_1<\pi D_1,\quad -\pi D_2\le x_2<\pi D_2\ ,$$

будет также периодической функцией с периодами $2\pi D_1$ и $2\pi D_2$,

$$\hat F^{D_1D_2}(x_1+2\pi D_1k_1,x_2+2\pi D_2k_2)=\hat F^{D_1D_2}(x_1,x_2)\ , \tag{6}$$

где $k_1,k_2$ – целые числа.

Интерес представляет установление условий, при которых в спектре интерполирующего изображения не появляются ложные частоты (aliasing).

Естественно потребовать, чтобы в спектре $\ddot F^{D_1D_2}(x_1,x_2)$ интерполирующего изображения $\ddot U$ присутствовали только компоненты, соответствующие спектру $F(\omega_1,\omega_2)$ исходного изображения $U$ .

Поскольку в спектре $F(\omega_1,\omega_2)$ исходного изображения $U$ присутствуют компоненты во всей подобласти $V_\pi$ пространственных частот (ППЧ), соответствующей периоду трансформанты Фурье,

$$V_\pi=\{(\omega_1,\omega_2)\ \ |\ \ -\pi\le\omega_1<\pi,\quad -\pi\le\omega_2<\pi\}, \tag{7}$$

то, имея в виду основные положения теории дискретизации, в идеале в подобласти $V$ ,

$$\hat V\ =\{(x_1,x_2)\ \ |\ \ -\pi D_1\le x_1<\pi D_1,\quad -\pi D_2\le x_2<\pi D_2\}, \tag{8}$$

соответствующей периоду трансформанты $\ddot F^{D_1D_2}(x_1,x_2)$ интерполирующего изображения $\ddot U$ , должно выполняться соотношение

$$\hat F^{D_1D_2}(x_1,x_2)=\begin{cases}F(x_1,x_2), & (x_1,x_2)\in V_\pi,\\ 0, & (x_1,x_2)\in\hat V\cap\overline{V}_\pi,\end{cases} \tag{9}$$

где $\overline{V}_\pi$ – дополнение подобласти $V_\pi$ .

Учитывая, что при выполнении практических расчетов трансформант Фурье изображений в цифровом виде вычисления осуществляются в подобласти пространственных частот $V_\pi$ вида (7), то в идеале соотношение (9) преобразуется к виду

$$\hat F(x_1,x_2)=\begin{cases}D_1D_2F(D_1x_1,D_2x_2), & (x_1,x_2)\in V_\pi^{\frac{1}{D_1}\frac{1}{D_2}},\\ 0, & (x_1,x_2)\in V_\pi\cap\overline{V}_\pi^{\frac{1}{D_1}\frac{1}{D_2}},\end{cases} \tag{10}$$

где

$$V_\pi^{\frac{1}{D_1}\frac{1}{D_2}}=\{(x_1,x_2)\ \ |\ \ -\pi/D_1\le x_1<\pi/D_1,\quad -\pi/D_2\le x_2<\pi/D_2\}, \tag{11}$$

$$\hat F\ (x_1,x_2)=\sum_{i_1=1}^{N_1}\sum_{i_2=1}^{N_2}\hat u_{i_1i_2}e^{-jx_1(i_1-1)}e^{-jx_2(i_2-1)}\ .$$

В виду ограниченности размеров изображений в точности выполнить условия (9–10) невозможно. Однако, можно добиться в некотором смысле наилучшего приближения к нему.

Покажем, что выполнению условий (9–10) способствует представление интерполирующего изображения $U$ в виде следующих аппроксимаций

$$\hat u_{i_1i_2}=u_{11}+\sum_{k_1=1}^{i_1-1}\sum_{k_2=1}^{i_2-1}\psi_{k_1k_2}\ , \tag{12}$$

при $i_1=2,3,\ldots,N_1$ , $i_2=2,3,\ldots,N_2$ ,
и для начальных строки и столбца в виде

$$\hat u_{k,1}-u_{11}=\sum_{k_1=1}^{k-1}\varphi_{k_1,1}\ ,\quad k=2,3,\ldots,N_1\ , \tag{13}$$

$$\hat{u}_{1,i} - u_{11} = \sum_{k_2=1}^{i-1} \varphi_{1,k_2}\,, \quad i = 2,3,\ldots,N_2\,, \tag{14}$$

где значения $\{\psi_{k_1k_2}\}$, $\{\varphi_{k_1,1}\}$, $\{\varphi_{1,k_2}\}$, $k_1 = 1,2,\ldots,N_1-1$, $k_2 = 1,2,\ldots,N_2-1$, являются аппроксимациями второй и первой производных соответствующих фрагментов интерполирующего изображения [2].

При этом интерполяционные равенства принимают соответствующий вид

$$u_{m_1m_2} - u_{11} = \sum_{k_1=1}^{D_1(m_1-1)} \sum_{k_2=1}^{D_2(m_2-1)} \psi_{k_1k_2}\,, \tag{15}$$

при

$$m_1 = 2,3,\ldots,M_1\,, \quad m_2 = 2,3,\ldots,M_2\,,$$

и

$$u_{m_1,1} - u_{11} = \sum_{k_1=1}^{D_1(m_1-1)} \varphi_{k_1,1}\,, \quad m_1 = 2,3,\ldots,M_1\,, \tag{16}$$

$$u_{1,m_2} - u_{11} = \sum_{k_2=1}^{D_2(m_2-1)} \varphi_{1,k_2}\,, \quad m_2 = 2,3,\ldots,M_2\,, \tag{17}$$

когда речь идет о первых строке и столбце.

В самом деле, положим

$$Z_{\bullet 1}(z) = \frac{1}{D_1}\sum_{n=1}^{N_1-1} \varphi_{n,1} e^{-jz(n-1)/D_1}\,, \quad -\pi D_1 \le z < \pi D_1\,, \tag{18}$$

$$Z_{1\bullet}(z) = \frac{1}{D_2}\sum_{n=1}^{N_2-1} \varphi_{1,n} e^{-jz(n-1)/D_2}\,, \quad -\pi D_2 \le z < \pi D_2\,,$$

($Z_{\bullet 1}(z)$, $Z_{1\bullet}(z)$ – трансформанты Фурье векторов $\vec{\varphi}_{\bullet 1} = \{\varphi_{k_1,1}\}$, $\vec{\varphi}_{1\bullet} = \{\varphi_{1,k_2}\}$, $k_1 = 1,2,\ldots,N_1-1$, $k_2 = 1,2,\ldots,N_2-1$).

Тогда справедливо представление

$$\varphi_{k_1,1} = \frac{1}{2\pi D_1}\int_{-\pi D_1}^{\pi D_1} Z_{\bullet 1}(z) e^{jz(k_1-1)/D_1} dz\,. \tag{19}$$

Следующий шаг заключается в выборе таких аппроксимаций $\{\psi_{k_1,k_2}\}$, $\{\varphi_{1,k_2}\}$ и $\{\varphi_{k_1,1}\}$, $k_1 = 1,2,\ldots,N_1-1$, $k_2 = 1,2,\ldots,N_2-1$, соответствующих производным, область ненулевых значений спектров которых вида (18) или для двумерного случая следующего вида

$$\frac{1}{D_1D_2}\sum_{k_1=1}^{N_1-1}\sum_{k_2=1}^{N_2-1} \psi_{k_1k_2} e^{-jz_1(k_1-1)/D_1} e^{-jz_2(k_2-1)/D_2}\,, \tag{20}$$

не выходили бы за пределы ППЧ, соответствующей условию (9).

Для простоты рассмотрим сначала одномерный вектор, имея в виду (13), (18) и (19).

Соответствующий вектор $\vec{\varphi}_{\bullet 1} = \{\varphi_{k_1,1}\}$, $k_1 = 1,2,\ldots,N_1-1$ предлагается представить в виде разложения

$$\vec{\varphi}_{\bullet 1} = \sum_{k=1}^{N_1-1} \alpha_{\bullet k}\vec{q}_k^{\,\Omega_1}\,, \tag{21}$$

по ортонормированному базису, составленному из собственных векторов $\vec{q}_k^{\,\Omega_1}$, $k = 1,2,\ldots,N_1-1$, так называемой субполосной матрицы $A_{\Omega_1}$ (понятие субполосной матрицы введено авторами и исследовано в работах [4, 5]), размерности $(N_1-1)\times(N_1-1)$, соответствующей, в общем случае, некоторой ППЧ $V(\widetilde{\Omega}_1,\Omega_1)$,

$$V(\widetilde{\Omega}_1,\Omega_1) = \{x_1 \mid x_1 \in [-\Omega_1,-\widetilde{\Omega}_1[\,\cup\,[\widetilde{\Omega}_1,\Omega_1[\}\,, \tag{22}$$

$$0 \le \widetilde{\Omega}_1, < \Omega_1 < \pi\,.$$

Значения пространственных частот $\widetilde{\Omega}_1$ и $\Omega_1$ будут уточнены позже.

Далее в работе в качестве разложения вектора $\vec{\varphi}_{\bullet 1} = \{\varphi_{k_1,1}\}$, $k_1 = 1,2,\ldots,N_1-1$ используется следующее представление его компонент

$$\varphi_{k_1,1} = \sum_{k=1}^{N_1-1} \alpha_{\bullet k} q_{k_1k}^{\Omega_1}\,, \; k_1 = 1,2,\ldots,N_1-1\,, \tag{23}$$

где $q_{k_1k}^{\Omega_1}$ – компоненты собственных векторов $\vec{q}_k^{\,\Omega_1}$, $k = 1,2,\ldots,N_1-1$, субполосной матрицы $A_{\Omega_1} = \{a_{im}^{\Omega_1}\}$, $i,m = 1,2,\ldots,N_1-1$, соответствующей ППЧ $V(\widetilde{\Omega}_1,\Omega_1)$ вида (22).

Аналогичные соотношения можно получить для вектора $\vec{\varphi}_{1\bullet}=\{\varphi_{1,k_2}\}$, $k_2=1,2,...,N_2-1$ и субполосной матрицы $A_{\Omega_2}$, соответствующей ППЧ $V(\widetilde{\Omega}_2,\Omega_2)$,

$$\varphi_{1,k_2}=\sum_{k=1}^{N_2-1}\alpha_{k\bullet}q_{k_2k}^{\Omega_2},\ k_2=1,2,...,N_2-1, \tag{24}$$

$$V(\widetilde{\Omega}_2,\Omega_2)=\{x_2\mid x_2\in[-\Omega_2,-\widetilde{\Omega}_2[\cup[\widetilde{\Omega}_2,\Omega_2[\}, \tag{25}$$

$$0\le\widetilde{\Omega}_2,<\Omega_2<\pi .$$

Значения пространственных частот $\widetilde{\Omega}_2$ и $\Omega_2$ также будут уточнены позже.

Тогда соотношениям (23) соответствуют следующие представления

$$\vec{\varphi}_{\bullet 1}=Q_1\vec{\alpha}_1, \tag{26}$$

$$\vec{\varphi}_{1\bullet}=Q_2\vec{\alpha}_2,$$

где

$$Q_1=\left(\vec{q}_1^{\,\Omega_1},\vec{q}_2^{\,\Omega_1},...,\vec{q}_{N_1-1}^{\,\Omega_1}\right), \tag{27}$$

$$Q_2=\left(\vec{q}_1^{\,\Omega_2},\vec{q}_2^{\,\Omega_2},...,\vec{q}_{N_2-1}^{\,\Omega_2}\right),$$

то есть $Q_1$ и $Q_2$ – матрицы, состоящие из $N_1-1$ и $N_2-1$ собственных векторов субполосных матриц $A_{\Omega_1}$ и $A_{\Omega_2}$,

$$\vec{\alpha}_1=(\alpha_{\bullet 1},\alpha_{\bullet 2},...,\alpha_{\bullet N_1-1})^T, \tag{28}$$

$$\vec{\alpha}_2=(\alpha_{1\bullet},\alpha_{2\bullet},...,\alpha_{N_2-1\bullet})^T.$$

В частности, такие представления предлагается использовать для реализации соотношений (13) и (14), совокупности которых можно придать векторный вид

$$\hat{\vec{u}}_{\bullet 1}-u_{11}\vec{e}_1=B_1Q_1\vec{\alpha}_1, \tag{29}$$

$$\hat{\vec{u}}_{1\bullet}-u_{11}\vec{e}_2=B_2Q_2\vec{\alpha}_2,$$

где

$$\vec{u}_{1\bullet}=(u_{12},u_{13},...,u_{1N_2})^T, \tag{30}$$

$$\vec{u}_{\bullet 1}=(u_{21},u_{31},...,u_{N_11})^T.$$

$B_1$ и $B_2$ – квадратные нижние треугольные матрицы, содержащие 0 выше главной диагонали и 1 на главной диагонали и ниже ее, размерности которых $(N_1-1)\times(N_1-1)$ и $(N_2-1)\times(N_2-1)$ соответственно; $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ – состоящие из единиц векторы, размерности которых $(N_1-1)$ и $(N_2-1)$ соответственно.

Тогда интерполяционные равенства (16) и (17) можно представить в следующем виде

$$\vec{u}_{\bullet 1}-u_{11}\cdot\vec{\gamma}_1=\hat{B}_1\vec{\varphi}_{\bullet 1}=\hat{B}_1Q_1\vec{\alpha}_1, \tag{31}$$

$$\vec{u}_{1\bullet}-u_{11}\cdot\vec{\gamma}_2=\hat{B}_2\vec{\varphi}_{1\bullet}=\hat{B}_2Q_2\vec{\alpha}_2, \tag{32}$$

где

$$\vec{u}_{1\bullet}=(u_{12},...,u_{1,M_2})^T;\ \vec{u}_{\bullet 1}=(u_{21},...,u_{M_1,1})^T,$$

$\vec{\gamma}_1$, $\vec{\gamma}_2$ – векторы, размерностей $(M_1-1)$ и $(M_2-1)$, состоящие из единиц,

$\hat{B}_1$, $\hat{B}_2$ – матрицы размерностей $(M_1-1)\times(N_1-1)$ и $(M_2-1)\times(N_2-1)$ соответственно, состоящие из строк матриц $B_1$ и $B_2$ с номерами $D_1$, $2D_1$, ..., $(M_1-1)D_1$ и $D_2$, $2D_2$, ..., $(M_2-1)D_2$ соответственно.

Вычисление значений векторов $\vec{\varphi}_{\bullet 1}$ и $\vec{\varphi}_{1\bullet}$ предлагается осуществлять, исходя из условий удовлетворения следующему требованию: векторы $\vec{\varphi}_{\bullet 1}$ и $\vec{\varphi}_{1\bullet}$ вида (21), (23), (26) при выполнении интерполяционных условий (31) и (32) должны обладать максимальной сосредоточенностью энергии в соответствующих ППЧ $V(\widetilde{\Omega}_1,\Omega_1)$ вида (22) и $V(\widetilde{\Omega}_2,\Omega_2)$ вида (25), что, учитывая свойство $E^{\Omega}(\vec{f})=\vec{f}^TA_{\Omega}\vec{f}=\sum_{k=1}^{N}\lambda_k^{\Omega}\alpha_k^2$ субполосных матриц $A_{\Omega_1}$ и $A_{\Omega_2}$, соответствует решению следующих оптимизационных задач:

$$\left\|\vec{\varphi}_{\bullet 1}\right\|^2-\vec{\varphi}_{\bullet 1}^TA_{\Omega_1}\vec{\varphi}_{\bullet 1}\to\min_{\vec{\varphi}_{\bullet 1}},\ \vec{\varphi}_{\bullet 1}\in R^{N_1-1}, \tag{33}$$

$$\vec{u}_{\bullet 1}-u_{11}\cdot\vec{\gamma}_1=B_1\vec{\varphi}_{\bullet 1},$$

и

$$\|\vec{\varphi}_{1\bullet}\|^2 - \vec{\varphi}_{1\bullet}^T A_{\Omega_2}\vec{\varphi}_{1\bullet} \to \min_{\vec{\varphi}_{1\bullet}},\ \vec{\varphi}_{1\bullet} \in R^{N_2-1}, \tag{34}$$

$$\vec{u}_{1\bullet} - u_{11}\cdot\vec{\gamma}_2 = B_2\vec{\varphi}_{1\bullet}.$$

Решим указанную задачу относительно вектора $\vec{\varphi}_{\bullet 1}$.

Рассмотрим функционал

$$Z_{\Omega_1}(\vec{\varphi}_{\bullet 1}) = \|\vec{\varphi}_{\bullet 1}\|^2 - \vec{\varphi}_{\bullet 1}^T A_{\Omega_1}\vec{\varphi}_{\bullet 1}, \tag{35}$$

значение которого равно величине энергии вектора $\vec{\varphi}_{\bullet 1}$ вне ППЧ $V(\tilde{\Omega}_1, \Omega_1)$ вида (22).

Авторами доказано следующее утверждение: функционал $Z_{\varphi}(\vec{\varphi}_{\bullet 1})$ вида (35) при выполнении интерполяционных условий (31),

$$B_1\vec{\varphi}_{\bullet 1} = \vec{u}_{\bullet 1} - u_{11}\cdot\vec{\gamma}_1, \tag{36}$$

принимает минимальное значение

$$Z_{\Omega_1}(\vec{\varphi}_{\bullet 1}^*) = \min_{\vec{\varphi}_{\bullet 1}\in R^{N_1-1}} \|\vec{\varphi}_{\bullet 1}\|^2 - \vec{\varphi}_{\bullet 1}^T A_{\Omega}\vec{\varphi}_{\bullet 1}, \tag{37}$$

при

$$\vec{\varphi}_{\bullet 1}^* = Q_1 W_1^{-1} G_1^T (G_1 W_1^{-1} G_1^T)^{-1} \vec{u}_1, \tag{38}$$

где

$$\vec{u}_1 = \vec{u}_{\bullet 1} - u_{11}\cdot\vec{\gamma}_1, \tag{39}$$

$$G_1 = B_1 Q_1, \tag{40}$$

$W_1$ – матрица, размерности $(N_1-1)\times(N_1-1)$,

$$W_1 = I_1 - L_1, \tag{41}$$

$I_1$ – единичная матрица соответствующей размерности,

$L_1$ – диагональная матрица, диагональными элементами которой являются собственные числа $\lambda_1^{\Omega_1}, \lambda_2^{\Omega_1}, \ldots, \lambda_{N_1-1}^{\Omega_1}$ субполосной матрицы $A_{\Omega_1}$.

Тогда решение задачи интерполяции первого столбца и первой строки исходного изображения в окончательном виде определяется соотношениями:

$$\vec{u}_{\bullet 1} = u_{11}\vec{e}_1 + B_1 Q_1 W_1^{-1} Q_1^T B_1^T (B_1 Q_1 W_1^{-1} Q_1^T B_1^T)^{-1} \left(\vec{u}_{\bullet 1} - u_{11}\vec{\gamma}_1\right), \tag{42}$$

$$\vec{u}_{1\bullet} = u_{11}\vec{e}_2 + B_2 Q_2 W_2^{-1} Q_2^T B_2^T (B_2 Q_2 W_2^{-1} Q_2^T B_2^T)^{-1} \left(\vec{u}_{1\bullet} - u_{11}\vec{\gamma}_2\right), \tag{43}$$

где матрица $W_2$ введена для первой строки изображения аналогично матрице $W_1$ (41), введенной для первого столбца изображения.

Двумерная интерполирующая функция вида (12) по аналогии с (29) представляется в виде матрицы

$$U_u = u_{11}\vec{e}_1\vec{e}_2^{\,T} + B_1 \Psi B_2^T \tag{44}$$

где

$$U_u = (u_{n_1 n_2}),\ n_1 = 2,\ldots,N_1,\ n_2 = 2,\ldots,N_1,$$

$\Psi$ – матрица $(\psi_{ik})$, $i = 1,2,\ldots,N_1-1$, $k = 1,2,\ldots,N_2-1$, аппроксимирующая вторые производные интерполирующего изображения и удовлетворяющая требованию по аналогии с задачей (33), обладания максимальной сосредоточенностью энергии в соответствующей ППЧ при выполнении интерполяционных равенств (15), записанных в матричном виде

$$U_u - u_{11}\vec{\gamma}_1\vec{\gamma}_2^{\,T} = B_1 \Psi B_2^T, \tag{45}$$

$$U_u = (u_{ik}),\ i = 2,\ldots,M_1,\ k = 2,\ldots,M_2.$$

По аналогии с решением (38) оптимизационной задачи (33), (36–37), авторами было доказано, что указанная матрица $\Psi$ может быть представлена в виде

$$\Psi = Q_1 W_1^{-1} Q_1^T B_1^T (B_1 Q_1 W_1^{-1} Q_1^T B_1^T)^{-1} (U_u - u_{11}\vec{\gamma}_1\vec{\gamma}_2^{\,T})(W_2^{-1} Q_2^T B_2^T (B_2 Q_2 W_2^{-1} Q_2^T B_2^T)^{-1})^T Q_2^T. \tag{46}$$

Тогда, интерполирующее изображение определяется соотношением

$$\hat{U}_u = u_{11}\vec{e}_1\vec{e}_2^{\,T} + B_1 Q_1 W_1^{-1} Q_1^T \hat{B}_1^T (\hat{B}_1 Q_1 W_1^{-1} Q_1^T \hat{B}_1^T)^{-1} (U_u - u_{11}\vec{\gamma}_1\vec{\gamma}_2^{\,T})(W_2^{-1} Q_2^T \hat{B}_2^T (\hat{B}_2 Q_2 W_2^{-1} Q_2^T \hat{B}_2^T)^{-1})^T Q_2^T B_2^T. \tag{47}$$

Проведение вычислительных экспериментов по интерполяции изображений на основе предложенного метода показало, что при расчетах не рекомендуется использовать собственные векторы субполосных матриц, соответствующие собственным числам, близким к нулю [6]. Объясняется данная рекомендация тем, что энергия таких собственных векторов, исходя из исследованных ранее их свойств, расположена, в основном, вне соответствующей ППЧ, что нарушает требования (9–10) сосредоточенности энергии результатов интерполяции.

Существенное значение имеет выбор величины параметров $\tilde{\Omega}_1$, $\Omega_1$ и $\tilde{\Omega}_2$, $\Omega_2$ в определении (22) и (25). Очевидно, что их величина должна быть связана с условием (10). Имея в виду свойства собственных векторов и чисел субполосных матриц, а также основные положения теории дискретизации, можно показать, что для субполосных матриц следует положить

$$\tilde{\Omega}_1 = 0, \quad \Omega_1 = \frac{\pi}{D_1}, \tag{48}$$

$$\tilde{\Omega}_2 = 0, \quad \Omega_2 = \frac{\pi}{D_2}. \tag{49}$$

Покажем, например, что при указанных значениях $\tilde{\Omega}_1$ и $\Omega_1$, энергия интерполирующего вектора $\vec{u}_{\bullet 1}$ (13), (42) сосредоточена в ППЧ $V = (0, \frac{\pi}{D_1})$.

В процессе решения задачи интерполяции на основе решения оптимизационной задачи (33) вектор $\vec{\varphi}_{\bullet 1}$, являющийся аппроксимацией производной по первому столбцу $\vec{u}_{\bullet 1}$ интерполирующего изображения, был вычислен так (задача 33), что его энергия максимально сосредоточена в ППЧ $V = (0, \frac{\pi}{D_1})$.

Поскольку интерполирующий вектор $\vec{u}_{\bullet 1} = \{u_{k,1}\}$, $k = 2,3,...,N_1$ соответствует интегралу от производной, аппроксимацией которой является вектор $\vec{\varphi}_{\bullet 1}$, то энергия (спектр) интерполирующего вектора $\vec{u}_{\bullet 1}$, соответствует спектру (энергии) вектора $\vec{\varphi}_{\bullet 1}$, в котором наблюдается относительное снижение значений в области высоких частот.

Аналогично, можно показать, что энергия интерполирующего вектора $\vec{u}_{1\bullet}$ (14), (43) при использовании метода интерполяции, основанного на решении задачи максимизации долей энергии производных в заданной ППЧ, сосредоточена в ППЧ $V = (0, \frac{\pi}{D_2})$, а также, что энергия двумерной интерполирующей матрицы $U_u$ (12), (47) сосредоточена в ППЧ вида (11), что соответствует требованию (10).

При решении задачи $\|\vec{\varphi}_{\bullet 1}\|^2 \to \min\limits_{\vec{\varphi}_{\bullet 1}}$, $\vec{\varphi}_{\bullet 1} \in R^{N_1 - 1}$, интерполяции на основе минимизации нормы соответствующих производных также выполняется требование сосредоточенности энергии интерполирующих функций в заданной ППЧ (10), так как в обоих методах в представлении соответствующих аппроксимаций производных используются собственные векторы, для которых соответствующие им собственные числа имеют значения, существенно отличающиеся от нуля. Следовательно, энергия векторов, на основе которых осуществляется представление искомых оценок производных, в основном сосредоточена в заданной ППЧ. Из этого также следует и сосредоточенность энергии результатов интерполяции в той же ППЧ.

Таким образом, наряду с выполнением интерполяционных равенств (16–17), интерполяционные векторы вида (42–43) обладают значительной (в отдельных случаях, максимальной) сосредоточенностью энергии векторов, аппроксимирующих производные, в выбранных частотных подобластях. Для двумерной интерполирующей матрицы (47) наряду с интерполяционными равенствами (15) имеет место значительная, в отдельных случаях – максимальная сосредоточенность энергии в выбранной частотной подобласти матрицы, аппроксимирующей вторые частные производные, что соответствует требованию (10) постановки задачи интерполяции.

На основании предложенного метода субполосной оптимальной интерполяции была разработана его программная реализация и проведены вычислительные эксперименты, показавшие его высокую работоспособность.

**Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-07-00451.**

## Список литературы
## References

1. Половко А., Интерполяция. Методы и компьютерные технологии их реализации / А. Половко, П. Бутусов // СПб.: БХВ – Петербург, 2004. – 320 с.: ил.

Polovko A., Interpoljacija. Metody i komp'juternye tehnologii ih realizacii / A. Polovko, P. Butusov // SPb.: BHV – Peterburg, 2004. – 320 s.: il.

2. Жиляков, Е.Г. О частотном анализе изображений / Е.Г. Жиляков, А.А. Черноморец // Вопросы радиоэлектроники. Сер. ЭВТ. – 2010. – Вып. 1. – С. 94–103.

Zhilyakov, E.G. O chastotnom analize izobrazhenij / E.G. Zhilyakov, A.A. Chernomorets // Voprosy radiojelektroniki. Ser. JeVT. – 2010. – Vyp. 1. – S. 94–103.

3. Жиляков, Е.Г. Оценивание производных дискретных функций / Е.Г. Жиляков, А.А. Черноморец, Е.В. Болгова // Научные ведомости БелГУ. Сер. Экономика. Информатика. – 2015. – № 21 (216). – Вып. 36/1. – С. 96–100.

Zhilyakov, E.G. Ocenivanie proizvodnyh diskretnyh funkcij / E.G. Zhiljakov, A.A. Chernomorets, E.V. Bolgova // Nauchnye vedomosti BelGU. Ser. Jekonomika. Informatika. – 2015. – № 21 (216). – Vyp. 36/1. – S. 96–100.

4. Жиляков, Е.Г. Об эффективности метода оценивания значений долей энергии изображений на основе частотных представлений / Е.Г. Жиляков, А.А. Черноморец, А.Н. Заливин // Известия ОрелГТУ. Информационные системы и технологии. – № 2/52 (563) март-апрель. – 2009. – С. 12–22.

Zhilyakov, E.G. Ob jeffektivnosti metoda ocenivanija znachenij dolej jenergii izobrazhenij na osnove chastotnyh predstavlenij / E.G. Zhilyakov, A.A. Chernomorets, A.N. Zalivin // Izvestija OrelGTU. Informacionnye sistemy i tehnologii. – № 2/52 (563) mart-aprel'. – 2009. – S. 12–22.

5. Черноморец, А.А. Метод анализа распределения энергий изображений по заданным частотным интервалам / А.А. Черноморец, О.Н. Иванов // Научные ведомости БелГУ. Сер. История. Политология. Экономика. Информатика. – 2010. – № 19 (90). – Вып. 16/1. – С. 161–166.

Chernomorets, A.A. Metod analiza raspredelenija jenergij izobrazhenij po zadannym chastotnym intervalam / A.A. Chernomorets, O.N. Ivanov // Nauchnye vedomosti BelGU. Ser. Istorija. Politologija. Jekonomika. Informatika. – 2010. – № 19 (90). – Vyp. 16/1. – S. 161–166.

5. Черноморец, А.А. О свойствах собственных векторов субполосных матриц / А.А. Черноморец, Е.И. Прохоренко, В.А. Голощапова // Научные ведомости БелГУ. Сер. История. Политология. Экономика. Информатика. – 2009. – № 7 (62). – Вып. 10/1. – С. 122–128.

Chernomorets, A.A. O svojstvah sobstvennyh vektorov subpolosnyh matric / A.A. Chernomorets, E.I. Prohorenko, V.A. Goloshhapova // Nauchnye vedomosti BelGU. Ser. Istorija. Politologija. Jekonomika. Informatika. – 2009. – № 7 (62). – Vyp. 10/1. – S. 122–128.