УДК 51-72

К ВОПРОСУ О СПИНЕ ЭЛЕКТРОНА
TO QUESTION ON THE ELECTRON SPIN

Н.А. Чеканов [1], И.Н. Беляева [1], Н.Н. Чеканова [2]
N.A. Chekanov [1], I.N. Belyaeva [1], N.N. Chekanova [2]

[1] Белгородский национальный исследовательский университет, Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85
Belgorod National Research University, 85 Pobedy St, Belgorod, 308015, Russia

[2] Харьковский институт банковского дела Университета банковского дела НБУ, Украина, 61174, г. Харьков, прт. Победы, 55
Kharkov Institute of Banking of National University of Banking, 55 av. Pobedy, Kharkov, 61174, Ukraine

E-mail: chekanov@bsu.edu.ru;ibelyaeva@bsu.edu.ru; chekanova76@list.ru

Аннотация. Показана несостоятельность попыток введения спина электрона в рамках классической физики.

Resume. Inconsistency of attempts of the deduction of the electron spin in the frame of the classical physics is shown.

Ключевые слова: электрон, спин, магнитное поле, классическая и квантовая механика, функции Гамильтона и Лагранжа.

Key words: electron, spin, magnetic field, classical and ouantum mechanics, Hamilton and Lagrange functions.

Введение

Одним из фундаментальных понятий как в классической, так и в квантовой механике является понятие момента импульса. В классической механике момент импульса – векторная величина – характеризует движение частицы в обычном трехмерном пространстве. Известные опыты, в первую очередь Штерна–Герлаха, а также Зеемана, и их анализ указывают, что частица, например электрон, по своей природе обладает дополнительным моментом импульса, который никак не связан с пространственным движением. Этот момент импульса назвали внутренним, или собственным, или просто спином. В дальнейшем речь будет идти только об электроне, хотя спин имеют и другие частицы. Хорошо известно, что понятие спина электрона сыграло существенное значение в открытии и построении нерелятивистской и релятивистской квантовой теории [1].

Из релятивистского уравнения Дирака [2] автоматически следует, что электрон обладает спином равным 1/2 в единицах постоянной Планка $\hbar$, и это значение спина согласуется с экспериментальными данными. На основании этого факта многие утверждают, что спин электрона является релятивистским эффектом. В книге [3] ее авторы Л. Биденхарн и Дж. Лаук со ссылкой на обзор Леви–Леблонда [4] пишут, «что примерно в 40 из 46 просмотренных книг по физике ошибочно указывается, что спин (электрона) – есть результат специальной теории относительности (то есть релятивизма)». Однако спин электрона и его величина 1/2 может быть получена [5] в рамках нерелятивистской квантовой механики без привлечения релятивистской квантовой теории Дирака, из которой автоматически следует правильная (экспериментально наблюдаемая) величина спина электрона.

С другой стороны, авторы, например, работ [6, 7] пытаются доказать, что спин электрона не имеет ни релятивистского, ни квантового происхождения, и что спин можно ввести в рамках классической физики.

Здесь уместно привести слова нобелевских лауреатов П. Дирака и В. Паули, которые впервые в рамках квантовой теории физически и математически обосновали понятие спина. [1] «Спиновый момент частицы следует представлять себе как результат некоторого внутреннего движения частицы, так что он связан со степенями свободы, отличающихся от тех, которые описывают движение частицы как целого. Спин не имеет близкого соответствия с чем-либо в классической механике, так что метод классических аналогий не подходит для его изучения» [11, с. 192]. В. Паули в работе [12, с. 69] писал, что «с помощью квантовой механики Бор смог показать, что спин электрона нельзя измерить в экспериментах, описываемых классически, и поэтому его (спин) следует рассматривать как существенно квантовомеханическое свойство электрона». Известный физик-теоретик, нобелевский лауреат Г. Бете [13, с. 19] писал: «Частицы могут обладать собственным моментом количества движения, который нельзя выразить через классические координаты и импульсы. Компоненты этого момента количества движения могут быть полуцелыми... Спин не имеет аналога в классической механике».

В настоящей работе показывается, что попытки ввести спин на принципах классической физики несостоятельны.

Классические функции Лагранжа и Гамильтона

Так как магнитные свойства электрона выявляются в магнитном поле, то рассмотрим электрон в постоянном магнитном поле $\vec{B}=(0,0,B)$, его векторный потенциал выберем (как и в работах [6, 7]) в виде

$$\vec{A}=\frac{1}{2}[\vec{B}\times\vec{r}]=\frac{B}{2}\left(-x_2\vec{i}+x_1\vec{j}+0\vec{k}\right), \qquad (1)$$

где $\vec{r}=(x_1,x_2,x_3)$ – радиус-вектор электрона относительно какой-либо декартовой системы координат, $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ – единичные векторы вдоль осей x_1,x_2,x_3, магнитное поле направлено вдоль вектора $\vec{k}$.

Функцию Лагранжа в гауссовой системе единиц для нерелятивистского электрона массой m и отрицательным зарядом $q=-e$ ($e>0$ – величина элементарного заряда), который движется в постоянном магнитном поле $\vec{B}=(0,0,B)$, как известно, [14, стр. 69] можно записать в виде

$$L(x_1,x_2,x_3,\dot{x}_1,\dot{x}_2,\dot{x}_3)=\frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2\right)-\frac{eB}{2c}\left(x_1\dot{x}_2+x_2\dot{x}_1\right), \qquad (2)$$

где положение электрона в пространстве и его скорость определяются векторами $\vec{r}$ и $\dot{\vec{r}}$, c – скорость света. Исходя из вида классической функции Лагранжа (2) построим функцию Гамильтона $H(x_1,x_2,x_3,p_1,p_2,p_3)$ для электрона в однородном постоянном внешнем магнитном поле. Как известно [15], функцию Гамильтона H можно найти из функции Лагранжа L при помощи преобразования Лежандра по переменным $\dot{x}_1,\dot{x}_2,\dot{x}_3$, считая при этом переменные x_1,x_2,x_3 параметрами. Для этого при помощи порождающей функции Лагранжа $L(x_1,x_2,x_3,\dot{x}_1,\dot{x}_2,\dot{x}_3)$ произведем замену независимых переменных $\dot{x}_1,\dot{x}_2,\dot{x}_3$ на новые p_1,p_2,p_3 согласно уравнениям

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_i}, \quad i=1,2,3. \qquad (3)$$

Так как частные производные в правой части уравнений (3) существуют и непрерывны и гессиан

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}_i\partial\dot{x}_k}\right)=m^2\neq 0 \qquad (4)$$

[1] Идея наличия внутреннего момента импульса у электрона была высказана в печати голландскими физиками Дж. Уленбеком и С. Гаудсмитом [8; 1, с.153–154], но их классическая теория о предположении вращения электрона вокруг своей оси в реальном пространстве не выдерживает никакой критики. Представление о вращающемся электроне было выдвинуто ранее Р. Кронингом, но не опубликовано [1, с.149–151]. Еще раньше в 1921 году эту же гипотезу выдвинул А. Комптон в качестве возможного объяснения естественной единицы магнетизма и даже опубликовал работу [9] , а до А.Комптона в 1915 А.Л. Парсонс [10] также обсуждал элементарные частицы, вращающиеся вокруг своей оси [1, с.149–151].

для функции Лагранжа (2) не равен нулю, то переменные $\dot{x}_1,\dot{x}_2,\dot{x}_3$ можно выразить через p_1,p_2,p_3 из уравнений (3) [15]. Тогда функция Гамильтона определится следующим выражением

$$H(x_1,x_2,x_3,p_1,p_2,p_3)=\sum_{i=1}^{3}p_i\dot{x}_i-L(x_1,x_2,x_3,\dot{x}_1,\dot{x}_2,\dot{x}_3), \qquad (5)$$

причем в правой его части (5) все величины $\dot{x}_1,\dot{x}_2,\dot{x}_3$ должны быть выражены через p_1,p_2,p_3 с помощью уравнений (3). Известно [15], что переход от переменных $\dot{x}_1,\dot{x}_2,\dot{x}_3$ к переменным p_1,p_2,p_3 описанным выше способом, называется преобразованием Лежандра. Обратное преобразование от переменных p_1,p_2,p_3 к переменным $\dot{x}_1,\dot{x}_2,\dot{x}_3$ осуществляется при помощи функции Гамильтона по формулам:

$$\dot{x}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i=1,2,3, , \qquad (6)$$

а для второй половины переменных x_1,x_2,x_3, которые при выполнении преобразования Лежандра считаются параметрами, имеются следующие соотношения

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}=\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i=1,2,3. \qquad (7)$$

Из уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)=\frac{\partial L}{\partial x_i}, \qquad (8)$$

с учетом соотношений (3) и (7) получаем

$$\frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_i}, \qquad (9)$$

которые совместно с выражениями (6), записанными как

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad (10)$$

составляют систему канонических уравнений Гамильтона.

Новые переменные p_1,p_2,p_3, определяемые формулами (3), являются импульсами рассматриваемой системы – электрона в постоянном однородном магнитном поле, которые канонически сопряжены пространственным переменным x_1,x_2,x_3. Поэтому вопрос, который ставится в работе [6], «определения для заряженной частицы величины, играющей ту же роль, что и импульс для незаряженной» не возникает, так как описание при помощи функции Лагранжа и функции Гамильтона является эквивалентным. Эта эквивалентность строго устанавливается преобразованием Лежандра.

Формулы (3) в случае функции Лагранжа (2) имеют следующий явный вид

$$\begin{aligned} p_1&=m\dot{x}_1+m\omega x_2, \\ p_2&=m\dot{x}_2+m\omega x_1, \\ p_3&=m\dot{x}_3, \end{aligned} \qquad (11)$$

а соответствующая функция Гамильтона согласно соотношению (5) может быть записана как

$$H=\frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{3}p_i^2+\omega(x_1p_2-x_2p_1)+\frac{m\omega^2}{2}(x_1^2+x_2^2), \qquad (12)$$

где для краткости записи введена $\omega=\dfrac{eB}{2mc}$ – ларморова частота [14].

Из формул (11) следует, что импульсы p_1,p_2 не совпадают с импульсами $m\dot{x}_1$, $m\dot{x}_2$ для свободного электрона, то есть без наличия внешнего магнитного поля. Однако это не удивительно, так как электрон находится во внешнем магнитном поле и естественно, что к гамильтониану для свободного электрона добавились дополнительные члены, связанные с изменением полной энергии. «Поэтому с первого взгляда может показаться странным, что магнитное поле изменяет энергию электрона, поскольку сила Лоренца перпендикулярна скорости, и поэтому ее работа должна равняться нулю. Однако, с другой стороны, хорошо известно, что вращающийся по окружности электрон, подобно круговому току, образует диполь, энергия которого в магнитном поле равна $-(\vec{M}_L\vec{B})$ ($\vec{M}_L$ - магнитный момент вращающегося электрона). Эти два на первый взгляд противоположных заключения могут быть разъяснены следующим образом. В течение всего времени изменения магнитного поля от нуля до некоторого постоянного значения на электрон должна действовать по направлению движения составляющая электрического поля, которая и сообщает электрону дополнительную энергию. Величина этой составляющей может быть найдена из закона индукции Фарадея» [17, стр.290].

Для определения сохраняющихся величин вычислим скобки Пуассона для компонент импульса $\vec{p}=(p_1,p_2,p_3)$ и момента импульсов $\vec{L}=(L_1,L_2,L_3)$, где $L_1=x_2p_3-x_3p_2$, $L_2=x_3p_1-x_1p_3$, $L_3=x_1p_2-x_2p_1$ с гамильтонианом (12). Как известно [16], скобка Пуассона для гамильтониана H и произвольной функции F, зависящей от канонически сопряженных переменных, определяется соотношением

$$\{H,F\}=\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial p_i}-\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial F}{\partial x_i}\right), \tag{13}$$

и если $\{H,F\}=0$ при $\dfrac{\partial F}{\partial t}=0$, то F есть интеграл движения, то есть сохраняющаяся величина.

Для указанных выше величин соответствующие скобки Пуассона равны:

$$\{H,p_1\}=\omega p_2+m\omega^2x_1,\ \{H,p_2\}=\omega p_1+m\omega^2x_2,\ \{H,p_3\}=0 \tag{14}$$

$$\{H,L_1\}=\omega L_2-m\omega^2x_2x_3,\ \{H,L_2\}=-\omega L_1+m\omega^2x_1x_3,\ \{H,L_3\}=0, \tag{15}$$

из чего следует, что сохраняются лишь третьи компоненты импульса p_3 и момента импульса L_3 вдоль направления постоянного магнитного поля $\vec{B}=(0,0,B)$, как и должно быть для случая движения в поле бесконечного однородного цилиндра [18, стр. 33]. Полный же импульс $\vec{p}$ и момент импульса $\vec{L}$ не сохраняются, так как однородность пространства имеется только вдоль направления магнитного поля.

Кроме того, достаточно легко найти решения в явном виде для уравнений в лагранжевом и гамильтоновом подходах для функций (2) и (12), решения которых тождественны, что и не удивительно, так как оба подхода эквивалентны, и эта эквивалентность математически строго устанавливается посредством преобразования Лежандра.

В самом деле, рассматриваемая система является интегрируемой, так как имеются три независимых интеграла движения: гамильтониан H, третья компонента импульса L_3 и кинетическая энергия вдоль направления магнитного поля $p_3^2/2m$. Тогда согласно теореме Лиувилля об интегрируемости гамильтоновых систем [19], наша система с тремя степенями свободы является интегрируемой. Так как уравнение движения электрона вдоль x_3 - оси отделяется в обоих подходах и тривиально интегрируется: $x_3(t)=at+b$, a, b - постоянные, определяемые начальными условиями, то в результате имеем только две степени свободы.

Заметим, что в лагранжевом подходе, когда найдено общее решение $x_1(t)$, $x_2(t)$ системы уравнений (8), зависимость импульсов от времени определяется по формулам (11). Для нахождения решений уравнений Гамильтониана (9-10) удобно вначале преобразовать функцию (12), выполнив следующую каноническую замену переменных [20]:

$$Q_{1,2}=1/2(\pm ix_1\pm p_1+x_2-ip_2),$$
$$P_{1,2}=1/2(\mp ix_1\pm p_1+x_2-ip_2), \tag{16}$$

в которых гамильтониан (12) принимает очень простой вид:

$$H(Q_1,Q_2,P_1,P_2)=2i\omega Q_2P_2. \tag{17}$$

В результате полученные в явном виде решения уравнений Гамильтона и Лагранжа, как и должно быть из общего рассмотрения, полностью совпадают.

Поэтому утверждения авторов работ [6, 7], что переменные p_1, p_2 в присутствии магнитного поля нельзя рассматривать как компоненты обобщенного импульса на основании того, что они не совпадают с величинами $m\dot{x}_1$, $m\dot{x}_2$ и не являются интегралами движения, т.е. скобки Пуассона (13-15) не обращаются в нуль, являются несостоятельными. Так как последующее изложение в работах [6, 7] основано на этих утверждениях, то и введение, и описание спина электрона в рамках классической физики также несостоятельно. Спин электрона, как и спины других элементарных частиц, является существенно квантовым свойством.

Кроме того, в работах [6, 7] для описания спина, связанного с внутренними степенями свободы, на равных основаниях авторы используют как пространственно-временные, так и внутренние переменные. «Существуют, однако, строгие доказательства, основанные на использовании классической теории непрерывных групп симметрии, невозможности нетривиального объединения пространственно-временных симметрий, которое было бы совместимо с основными постулатами релятивистской локальной квантовой теорией поля [22]».

Уравнение Шредингера для электрона в постоянном магнитном поле и его решение

Сделав известные подстановки $p_1 \to \hat{p}_1 = -i\hbar\partial/\partial x_1$, $p_2 \to \hat{p}_2 = -i\hbar\partial/\partial x_2$ в соотношениях (16), получим квантовый аналог $\hat{H}$ классической функции Гамильтона (12) или (17) в следующей очень простой форме:

$$\hat{H} = 2\hbar\omega\left(\hat{Q}_2\hat{P}_2 + 1/2\right), \tag{18}$$

операторы $\hat{P}_\nu$, $\hat{Q}_\nu$ удовлетворяют коммутационным соотношениям $\left[\hat{P}_\nu, \hat{Q}_\mu\right] = \delta_{\mu,\nu}$, $(\mu,\nu = 1,2)$. Если теперь ввести полный ортонормированный набор функций [20]

$$|N,L\rangle = \left[\left(\frac{N+L}{2}\right)!\left(\frac{N+L}{2}\right)!\right]^{-1/2} \hat{Q}_2^{(N-L)/2}\hat{Q}_1^{(N+L)/2}|0,0\rangle, \tag{19}$$

где вакуумное состояние $|0,0\rangle$ определяется как $\hat{P}_1|0,0\rangle = \hat{P}_2|0,0\rangle$, то можно показать, что векторы $|N,L\rangle$ являются собственными функциями гамильтониана (18), а энергетический спектр (в плоскости перпендикулярной направлению магнитного поля) определяется формулой

$$E = \hbar\omega(N - L + 1), \quad N = 0,1,2,\ldots, \quad L = \pm N, \pm(N-2),\ldots,\pm 1(0). \tag{20}$$

Так как $\omega = eB/2mc$, а главное квантовое число $N = 2n + |L|$, $n = 0,1,2,\ldots$, то формулу (20) можно переписать как

$$E = \frac{eB\hbar}{mc}\left(n + \frac{|L| - L + 1}{2}\right), \tag{21}$$

а если квантовые числа состояний электрона упорядочить по-другому, например, положить $N = n_1 + n_2$ и $L = n_1 - n_2$, $n_1, n_2 = 0,1,\ldots$, то формула (20) для спектра примет вид

$$E = \frac{eB\hbar}{mc}\left(n_2 + \frac{1}{2}\right). \tag{22}$$

Формулы (21) и (22) совпадают с формулами, приведенными в книге [21]. Собственные ортонормированные функции (19) в полярных переменных (r,φ) можно выбрать в виде

$$\langle r,\varphi|N,L\rangle = \frac{i^N}{L!}\frac{e^{-iL\varphi}}{\sqrt{2\pi}}\left[2\left(\frac{N+L}{2}\right)!\Big/\left(\frac{N-L}{2}\right)!\right]^{1/2} r^{|L|}\exp(-r^2/2)M(a,b;r^2), \tag{23}$$

где $a = -(N-L)/2$, $b = |L| + 1$, $M(a,b;r^2)$ – функция Куммера [23].

Заключение

В работе кратко представлено теоретическое описание классической системы, в частности, электрона в постоянном магнитном поле в лагранжевом и гамильтоновых подходах, которые по конечным результатам эквивалентны, и это устанавливается математически строго преобразованием

Лежандра. Последовательное применение указанных основных подходов в теории классических динамических систем не может привести к введению спина электрона на основе принципов и законов классической механики. Описание с единых позиций пространственно-временных и спиновых переменных сталкивается с принципиальными трудностями фундаментального характера. Спин элементарной частицы есть сугубо существенное понятие квантовой механики. В работе приведено каноническое преобразование, которое позволяет упростить нахождение решений как классических уравнений движения Гамильтона, так и соответствующих им квантовых аналогов.

Список литературы

1. Джеммер М. Эволюция понятий квантовой механики / М. Джеммер. – М.: Наука, 1985. – 380 с.

Jammer M. The conceptual developmentof quantum mechanics / M. Jammer. – Inc. New-York-Sydney: Mc Graw-Hill book C, 1967 – 380 p.

2. Дирак П. К созданию квантовой теории поля / П. Дирак. – М.: Наука, 1990. – 368 с.

Dirac P. The quantum theory of the electron / P. Dirac – Proc. R. Soc.A. 1928. – V. 117. – P. 610–624

3. Биденхарн Л. Угловой момент в квантовой физике. Т. 1 / Л. Биденхарн, Дж. Лаук. – М.: Мир, 1984. – 304 с.

Biedenharn L.C., Louck J.D. Angular momentum in quantum physics. Eddison-Westley P.C.R., Massachusetts, 1981.

4. Levy-Leblond J.-M. Group Theory and its Applications, ed. E.M. Loebl / J.-M. Levy-Leblond. – New York: Academic Press, v. II, 1971. – 222 p.

5. Коцарев Л.Л. Нерелятивистский подход к определению спина электрона / Л.Л. Коцарев, Н.А. Чеканов // Материалы международной научно-методической конференции «Хорошавинские чтения». – Белгород: Изд-во БелГУ, 2004. – С. 39–45.

Kotsarev L.L., Chekanov N.A. Nonrelativistic ap proach to definition of electron spin // Materialy naychno-metodicheskoi konferentsii «Khoroshavinskie Chteniya». – Belgorod: Izd-vo Belsu, 2004. – P. 39–45.

6. Хезлот А. Классическая механика и спин электрона / А. Хезлот // Физика за рубежом: сб. статей, серия Б, – М.: Мир, 1986. – С. 66–83. (Перевод с анг.: A. Heslot. Amer. J. Phys., v. 51, – № 12. – 1983. – P. 1096).

A. Heslot. Amer. J. Phys., v.51, – № 12. – 1983. – P. 1096

7. Чирков А.Г. Классическая физика и спин электрона / А.Г. Чирков, И.В. Казинец // Журнал технической физики. – 2000. – Т. 7. – Вып. 9. – С. 13-16.

Chirkov A.G. Classical physics and spin of electron / A.G. Chirkov, I.V. Kazinets / Journal of technical physics. – 2000. – V.70 – № 9. – P. 13–16.

8. Uhlenbeck G.E., Goudsmit S.A. Die Naturwissenschaften / G.E. Uhlenbeck, S.A. Goudsmit. – Bd 13, 1925. – P. 953–954.

9. Compton A.H. The magnetic electron / A.H. Compton // J. Franklin Institute. – 1921. – V. 192. – P. 145–155.

10. Parsons A.L. A magneton theory of the structure of the atom / A.L. Parsons // Smithsonian Miscellaneous Collections. – 1915. – V. 65. – № 11. – P. 17–23.

11. Дирак П. Принципы квантовой механики / П. Дирак. – М.: Наука, 1979. – 480 с.

Dirac P. The principles of quantum mechanics. Oxford: Clarendonpress, 4rd ed. 1958. – 481 p.

12. Паули В. Физические очерки / В. Паули. – М.: Наука, 1975. – 256 с.

Pauli W. Physics ocherki / W. Pauli. – M.: Nauka, 1975. – 256 p.

13. Бете Г. Квантовая механика / Г. Бете. – М.: Мир, 1965. – 334 с.

Bethe H.A. Intermediate quantum mechanics. Inc. New-York-Amsterdam: W.A. Benjamin, 1964. – 328 p.

14. Ландау Л.Д. Теория поля / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1967. – 460 с.

Landau LD. Teoriya polya / L.D. Landau, E.M. Lifshits. – M.: Nauka, 1967. – 460 p.

15. Трофимов В.В. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений / В.В. Трофимов, А.Т. Фоменко. – М.: Факториал, 1995. – 448 с.

Trofimov V.V. Algebra i geometriya integriruemiyh hamiltonovyh differential equations / V.V. Trofimov, A.T. Fomenko – M.: Factorial, 1995. – 448 p.

16. Гирвин С. Квантовый эффект Холла / С. Гирвин. – Москва-Ижевск: ИКИ, 2003. – 156 с.

Girvin S. Quantum effect of Holls / S. Girvin. – Moskva-Ighevsk: IKI, 2003. – 156 p.

17. Соколов А.А. Квантовая механика / А.А. Соколов, Ю.М. Лоскутов, И.М. Тернов. – М.: Гос. учебно-педагог. изд-во министерства просвещения РСФСР, 1962. – 592 с.

Sokolov A.A. Quantum mechanics / A.A. Sokolov, Yu.M. Loskutov, I.M. Ternov. – M.: Gos. uchebno-pedagog. izd-vo ministerstva prosveschenia RSFSR, 1962. – 592 p.

18. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. – М.: Наука, 1973. – 208 с.

Landau L.D., Lifshits E.M. Mechanics. – M. Nauka,1973. – 208 s.

19. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1974. – 432с.

20. Чеканов Н.А. Квантование нормальной формы Бирктофа-Густавсона// ЯФ. 1989, Т.50, вып.8, С. 344–346.

Chekanov N.A. Quantization of the Birkhoff-Gustavson normal form// Yadernaya physica. 1989, V.50, No.8, P. 344–346.

21. Ландау Л.Д. Квантовая механика (нерелятивистская теория) / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: ГИФМЛ. – 1963. – 704 с.

Landau L.D. Quantum mechanics (nonrelativistic theory) / Landau L.D., Lifshits E.M. – M.: GIFML, 1963 – 704 c.

22 Волков Д.В. Пространство – время, физические поля и квантовая статистика / Д.В. Волков // Проблемы современной теоретической физики: Сб. научных трудов. – К.: Наукова думка, 1982. – С. 92–102.

Volkov D.V. Prostranstvo – vremya, physics polya i quantum statistika / D.V. Volkov // Sb. nauchnikh trudov «Problemy sovremennoi theoretical physics». – K.: Naykova dymka, 1982. – P. 92–102.

23. Справочник по специальным функциям / ред. М. Абрамовиц, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

Spravochnik po special function / red. M. Abramovets, I.Stugan. – M.: Nauka, 1979. – 832 p.