МАТЕМАТИКА

УДК 517.926.4

ВЫРОЖДАЮЩИЕСЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ

DEGENERATING SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS. ASYMPTOTIC REPRESENTATIONS OF SOLUTIONS

В.П. Архипов, А.В. Глушак
V.P. Arhipov, A.V. Glushak

ФГБОУ ВПО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева», Россия, 302026, г. Орел, ул. Комсомольская, 95

Белгородский национальный исследовательский университет, Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85

Oryel State University named after I.S. Turgenev, 95 Komsomolskaj St, Oryel , 302026, Russia

Belgorod National Research University, 85 Pobedy St, Belgorod, 308015, Russia

E-mail: varhipov@ inbox.ru, Glushak@.bsu.edu.ru

Аннотация. Для обыкновенных линейных вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка рассматривается метод построения асимптотических представлений решений, позволяющий исследовать их в комплексной плоскости и в зависимости от параметра. Получены формулы решений, оценки резольвенты задачи Дирихле, условия дискретности спектра и асимптотические формулы для нахождения собственных значений. Для сильных степенных вырождений даны асимптотические формулы роста собственных значений.

Resume. Here is considering the method of building asymptotic solution views of ordinary linear degenerating second-order differential equations which allows to research them in complex surface and depending of parameter. There have been got formulas of solutions, resolvent estimates for Dirichlet problem, discrete spectrum condition and asymptotic formulas for eigenvalue findings. For strong power degeneracy there asymptotic formulas of eigenvalues growth have been given.

Ключевые слова: вырождающиеся дифференциальные уравнения, асимптотические последовательности, краевые задачи, собственные значения.
Key words: degenerating differential equations, asymptotic sequences, boundary value problems, eigenvalues.

Введение

Дифференциальные уравнения с обращающимся в нуль коэффициентом при старшей производной не вписываются в рамки стандартной теории обыкновенных дифференциальных уравнений и давно привлекали внимание широкого круга исследователей. Отдельные виды таких уравнений (уравнения Эйлера, Бесселя и др.) подробно и глубоко изучены. Однако и до настоящего времени для уравнений второго порядка вырождающихся достаточно быстро в отдельных точках в уравнение первого порядка определенные моменты поведения решений исследованы недостаточно.

В работе рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$(a(t)u'(t))' + b(t)u'(t) + c(t,\lambda)u(t) = f(t),$$

допускающее в точке $t=0$ вырождение старшего коэффициента, поскольку $a(0)=0$.

Уравнения такого вида подробно исследовались В.П. Глушко в [1, 2] и в [3] – в приложении к вырождающимся эллиптическим уравнениям. Н.Х. Розов, В.Г. Сушко, Д.И. Чудова в [4] рассматривали возможности постановки и разрешимости задачи типа Коши для (1), для применение их к нелинейным уравнениям. Подробную библиографию более ранних работ можно найти в [5]. Точные асимптотические формулы решений уравнения (1) в правой окрестности точки вырождения установлены в [6], а в [7] построены двусторонние асимптотики гладких решений. Спектральные свойства (задача Штурма-Лиувилля) исследовались в [6] и [8].

В настоящей статье предлагается метод исследования, позволяющий строить точные и асимптотические формулы решений уравнения (1) в комплексной плоскости в окрестности точки вырождения, исследовать зависимость решения от параметра, получать оценки резольвенты краевых задач и исследовать асимптотику распределения собственных значений. В работе приведены асимптотические формулы для спектра в случае сильных степенных вырождений.

Задача в комплексной области. Свойства решений вспомогательной системы

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$Lu(t) \equiv (a(t)u'(t))' + b(t)u'(t) + c(t,\lambda)u(t) = 0, \tag{1}$$

с достаточно гладкими коэффициентами комплексной переменной $t = re^{i\psi} \in \Omega \subset C$, где Ω содержит отрезок $[0,1]$, например, $\Omega = \left\{t : -\frac{\pi}{6} < \psi < \frac{\pi}{6}. r < 2\right\}$. Основные требование на коэффициенты уравнения (1): $a(0)=0,\ b(0)\neq 0$ и $a(t)\neq 0$ при $t\neq 0$, $\lambda \in C$ – комплексный параметр.

Пусть $\alpha(t,\lambda)=\alpha(t)$ – произвольная достаточно гладкая в Ω функция. Все дальнейшие преобразования будем проводить при фиксированном значении параметра λ и без необходимости не будем отмечать его в обозначениях. Это замечание относится и к другим функциям, содержащим фиксированные параметры.

Для любых точек $t\neq 0$ и $t'\neq 0$ в Ω определим функции

$$v_k(t,t') = \alpha^{-1/2}(t)\exp\left\{\int_{t}^{t'} \frac{b(\tau)-(-1)^k\alpha(\tau)}{2a(\tau)}d\tau\right\}, \quad k=1,2, \tag{2}$$

где интеграл вычисляется по некоторой кусочно-гладкой кривой $\tilde{\gamma}\in\Omega$, соединяющий точки t, t' и такой, что на ней $\alpha(t)\neq 0$ и $a(t)\neq 0$. Всюду в дальнейшем t' – фиксированная точка в Ω, а контур интегрирования $\tilde{\gamma}\in\Omega$ будет ясен из контекста.

Укажем некоторые легко проверяемые свойства функций $v_1(t)$ и $v_2(t,)$:

а) $\dfrac{v_2(t)}{v_1(t)} = \exp\left\{-\int_t^{t'} \dfrac{\alpha(\tau)}{a(\tau)} d\tau\right\}$, $\left(\dfrac{v_2(t)}{v_1(t)}\right)' = \dfrac{\alpha(t)}{a(t)} \cdot \dfrac{v_2(t)}{v_1(t)}$ и $(\alpha(t)v_1(t)v_2(t))' = -\dfrac{b(t)}{a(t)}\alpha(t)v_1(t)v_2(t)$,

б) $v_2 \cdot Lv_1 = v_1 \cdot Lv_2$ на $\gamma \setminus \{0\}$),

в) $v_2 \cdot Lv_1 - v_1 \cdot Lv_2 = 0$.

Решения уравнения (1) в Ω, при каждом значении параметра $\lambda \in Z$, будем искать в виде

$$u(t) = d_1(t)v_1 + d_2(t)v_2, \tag{3}$$

выбирая функции $d_1(t), d_2(t)$ как и в методе вариации постоянных из условий

$$\begin{cases} d_1'(t)v_1(t) + d_2'(t)v_2(t) = 0 \\ L(d_1(t)v_1(t) + d_2(t)v_2(t)) = 0 \end{cases}. \tag{4}$$

Преобразования системы с учетом вышеуказанных свойств функций $v_{1,2}(t,t')$ приводят её к стандартному виду

$$\mathbf{d}'(t) = M(t,t')\mathbf{d}(t), \tag{5}$$

где $\mathbf{d}(t) = \begin{pmatrix} d_1(t) \\ d_2(t) \end{pmatrix}$, $M(t,t') = M(t) = h(t)\begin{pmatrix} 1 & e^{-w(t,t')} \\ -e^{w(t,t')} & -1 \end{pmatrix}$, $w(t,t') = \int_t^{t'} \dfrac{\alpha(\tau)}{a(\tau)} d\tau$,

$$h(t) = \frac{1}{4\alpha(t)}\left(a(t)\left(\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}\right)^2 - 2\left(a(t)\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}\right)' + \frac{\alpha^2(t) - b^2(t) + 4a(t)c(t) - 2b'(t)a(t)}{a(t)}\right).$$

Пусть $\gamma \subset \Omega$ простая кусочно-гладкая кривая, выходящая из точки $t = 0$ и на этой кривой $\alpha(t) \neq 0$ при $t \neq 0$. Для любой точки $t_0 \in \gamma \setminus \{0\}$ и произвольного начального вектора $\mathbf{d}_0 = \begin{pmatrix} d_{01} \\ d_{02} \end{pmatrix}$ рассмотрим задачу Коши для уравнения (5)

$$\mathbf{d}(t_0) = \mathbf{d}_0 = \begin{pmatrix} d_{01} \\ d_{02} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Лемма 1. Если $\gamma \subset \Omega$ произвольная простая кусочно-гладкая кривая, выходящая из точки $t = 0$, функции $a(t) \neq 0, \alpha(t) \neq 0$ при $t \in \gamma \setminus \{0\}$, а коэффициенты уравнения (1) дифференцируемы и $\alpha(t)$ дважды дифференцируема на $\gamma \setminus \{0\}$, то:

1) для любой начальной точки $t_0 \in \gamma \setminus \{0\}$ и любого вектора $\mathbf{d}_0$ существует единственное решение задачи (5), (6), определяемое при $t \in \gamma \setminus \{0\}$ равенством

$$\mathbf{d}(t) = F(t,t_0)\mathbf{d}_0, \tag{7}$$

где матрица $F(t,t_0) = \begin{pmatrix} F_{11}(t,t_0) & F_{12}(t,t_0) \\ F_{21}(t,t_0) & F_{22}(t,t_0) \end{pmatrix}$ определена рядом

$$F(t,t_0) = I - \int_t^{t_0} M(t_1)dt_1 + \int_t^{t_0} M(t_1)dt_1 \int_{t_1}^{t_0} M(t_2)dt_2 - \int_t^{t_0} M(t_1)dt_1 \int_{t_1}^{t_0} M(t_2)dt_2 \int_{t_2}^{t_0} M(t_3)dt_3 + \ldots, \tag{8}$$

а интегрирование всюду ведется по отрезку кривой γ;

2) каждое решение уравнения (1) в любой точке $t \in \gamma \setminus \{0\}$ представимо в виде

$$u(t)=d_1(t)v_1(t,t')+d_2(t)v_2(t,t')=$$
$$=v_1(t,t_0)\left(F_{11}(t,t_0)+F_{21}(t,t_0)e^{-w(t,t')}\right)d_{01}+v_2(t,t_0)\left(F_{22}(t,t_0)+F_{12}(t,t_0)e^{w(t,t')}\right)d_{02}. \qquad (9)$$

Доказательство. Функции $h(t)$ и $w(t)$ непрерывны на $\gamma\setminus\{0\}$, компоненты матрицы $M(t)$ равномерно ограниченны на $\gamma(t,t_0)$, что и гарантирует сходимость ряда (8). Умножая (8) слева на $M(t)$ и интегрируя от t до t_0, получим $I-F(t,t_0)=\int_t^{t_0}M(\tau)F(\tau,t_0)\,d\tau$. Откуда следует, что $F(t_0,t_0)=I$, а также что существует $\frac{\partial F(t,t_0)}{\partial t}$ и $\frac{\partial F(t,t_0)}{\partial t}=M(t)\cdot F(t,t_0)$, это и доказывает формулу (7) и лемму 1.

Замечание 1. Точка t' в $v_{1,2}(t,t')$ выбирается произвольной на $\gamma\setminus\{0\}$, поэтому можно считать, что $\tilde{\gamma}\in\gamma\setminus\{0\}$, а в случае аналитичности $\alpha(t)$ и коэффициентов уравнения контур $\tilde{\gamma}\in\Omega$ является произвольным в Ω.

Для конкретного представление элементов $M(t)$ заметим, что

$$M(t_1)M(t_2)M(t_3)\ldots M(t_n)=$$
$$=h(t_1)\cdot h(t_2)\cdot\ldots\cdot h(t_n)\cdot(1-e^{-(w_1-w_2)})(1-e^{-(w_2-w_3)})\ldots(1-e^{-(w_{n-1}-w_n)})\begin{pmatrix}1 & e^{-w_n}\\ -e^{w_1} & -e^{w_1-w_n}\end{pmatrix},$$

где $w_i=w(t_i,t'),\ i=1,2,\ldots n$, и это приводит к следующим формулам для компонент матрицы $F(t,t_0)$:

$$F_{11}(t,t_0)=1-\int_t^{t_0}h(t_1)dt_1+\int_t^{t_0}h(t_1)dt_1\int_{t_1}^{t_0}h(t_2)(1-e^{-(w(t_1)-w(t_2))})dt_2-$$
$$-\int_t^{t_0}h(t_1)dt_1\int_{t_1}^{t_0}h(t_2)(1-e^{-(w(t_1)-w(t_2))})dt_2\int_{t_2}^{t_0}h(t_3)(1-e^{-(w(t_2)-w(t_3))})dt_3+\ldots,$$

$$F_{12}(t,t_0)=e^{-w(t_0)}\left(-\int_t^{t_0}h(t_1)e^{-(w(t_1)-w(t_0))}dt_1+\int_t^{t_0}h(t_1)dt_1\int_{t_1}^{t_0}h(t_2)(1-e^{-(w(t_1)-w(t_2))})e^{-(w(t_2)-w(t_0))}dt_2-\right.$$
$$\left.-\int_t^{t_0}h(t_1)dt_1\int_{t_1}^{t_0}h(t_2)(1-e^{-(w(t_1)-w(t_2))})dt_2\int_{t_2}^{t_0}h(t_3)(1-e^{-(w(t_2)-w(t_3))})e^{-(w(t_3)-w(t_0))}dt_3+\ldots\right),$$

$$F_{21}(t,t_0)=\left(\int_{t(\gamma)}^{t_0}h(t_1)e^{-(w(t)-w(t_1))}dt_1-\int_{t(\gamma)}^{t_0}h(t_1)e^{-(w(t)-w(t_1))}dt_1\int_{t_1}^{t_0}h(t_2)(1-e^{-(w(t_1)-w(t_2))})dt_2+\right.$$
$$\left.+\int_{t(\gamma)}^{t_0}h(t_1)e^{-(w(t)-w(t_1))}dt_1\int_{t_1}^{t_0}h(t_2)(1-e^{-(w(t_1)-w(t_2))})dt_2\int_{t_2}^{t_0}h(t_3)(1-e^{-(w(t_2)-w(t_3))})dt_3-\ldots\right)e^{w(t)},$$

$$F_{22}(t,t_0)=1+\int_t^{t_0}h(t_1)dt_1-\int_t^{t_0}h(t_1)dt_1\int_{t_1}^{t_0}h(t_2)(1-e^{-(w(t_1)-w(t_2))})e^{w(t_1)-w(t_2)}dt_2+$$
$$+\int_t^{t_0}h(t_1)dt_1\int_{t_1}^{t_0}h(t_2)(1-e^{-(w(t_1)-w(t_2))})dt_2\int_{t_2}^{t_0}h(t_3)(1-e^{-(w(t_2)-w(t_3))})e^{w(t_1)-w(t_3)}dt_3-\ldots. \qquad (10)$$

В случае монотонности функции $I(t)=\operatorname{Re}w(t)$ вдоль пути интегрирования γ для компонент матрицы $F(t,t_0)$ могут быть установлены следующие полезные соотношения.

Лемма 2. Если функции $h(t), \alpha(t), a(t)$ непрерывны вдоль контура интегрирования γ, $a(t)\neq 0$ $(t\neq 0)$, $\alpha(t)\neq 0$ на γ и $\operatorname{Re}w(t)$ не возрастает при движении от точки t к t_0 вдоль γ, то для любых значений t, t_0 внутренних для γ выполнены неравенства

$$|F_{11}(t,t_0)-1|\leq\frac{1}{2}\left(e^{2\varepsilon(t,t_0)}-1\right),\ |F_{22}(t,t_0)-1|\leq\varepsilon(t,t_0)+\frac{1}{2}\left(e^{2\varepsilon(t,t_0)}-1-2\varepsilon(t,t_0)\right)e^{\operatorname{Re}(w(t)-w(t_0))},$$

$$|F_{12}(t,t_0)|\leq\frac{1}{2}\left(e^{2\varepsilon(t,t_0)}-1\right)\cdot e^{-\operatorname{Re}w(t_0)},\quad |F_{21}(t,t_0)|\leq\frac{1}{2}\left(e^{2\varepsilon(t,t_0)}-1\right)\cdot e^{\operatorname{Re}w(t)}, \tag{11}$$

где $\varepsilon(t,t_0)=\int\limits_t^{t_0}|h(t_1)|\,dt_1$.

Доказательство леммы очевидным образом следует из формул (10), если заметить, что точки t_k в них располагаются вдоль пути интегрирования последовательно от точки t к точке t_0. При этом $\operatorname{Re}w(t)\geq\operatorname{Re}w(t_{k-1})\geq\operatorname{Re}w(t_k)\geq\operatorname{Re}w(t_0)$, для $k=1,2,\ldots,n$; $\left|1-e^{-(w(t_k)-w(t_{k-1}))}\right|\leq 2$; $\left|e^{-w(t_n)}\right|\leq e^{-\operatorname{Re}w(t_0)}$; $\left|e^{w(t_1)}\right|\leq e^{\operatorname{Re}w(t)}$ и $\left|e^{w(t_1)-w(t_k)}\right|\leq e^{\operatorname{Re}(w(t)-w(t_0))}$. Оценивая модуль выражений в (10), получим требуемые неравенства леммы 2.

Замечание 2. Выполнение условий леммы 1 обеспечивает непрерывность функции $h(t)$.

Лемма 3. Если функции $\alpha(t)\neq 0, a(t), h(t)$ непрерывны вдоль контура интегрирования γ с начальной точкой $t=0$, $a(0)=0$, $a(t)\neq 0$ на $\gamma\setminus\{0\}$, а интеграл

$$\varepsilon(0,t_0)=\int\limits_0^{t_0}|h(t_1)|\,dt_1=\lim_{t\to 0,\ t\in\gamma}\int\limits_t^{t_0}|h(t_1)|\,dt_1<\infty$$

сходится, то: 1) существуют конечные пределы

$$\lim_{t\to 0,\ t\in\gamma}F_{11}(t,t_0)=F_{11}(0,t_0),\quad \lim_{t\to 0,\ t\in\gamma}F_{12}(t,t_0)=F_{12}(0,t_0); \tag{12}$$

2) если, кроме того, $\operatorname{Re}w(t)$ не возрастает при движении от точки t к t_0 вдоль γ и $\lim\limits_{t\to 0(\gamma)}\operatorname{Re}w(t)=+\infty$, то

$$\lim_{t\to 0,\ t\in\gamma}F_{21}(t,t_0)e^{-w(t)}=\lim_{t\to 0,\ t\in\gamma}F_{22}(t,t_0)e^{-w(t)}=0. \tag{13}$$

Доказательство существования двух первых пределов следует непосредственно из формул (10) и абсолютной и равномерной сходимости соответствующих рядов. Далее, оценим первое из слагаемых в $F_{21}(t,t_0)$ при t близких к нулю. Имеем

$$\left|\int_t^{t_0} h(t_1)e^{w(t_1)}dt_1\right| \le \int_t^{t_0}\left|h(t_1)e^{w(t_1)}\right| dt_1 \le \int_t^{t^*}\left|h(t_1)e^{w(t_1)}\right| dt_1 + \int_{t^*}^{t_0}\left|h(t_1)e^{w(t_1)}\right| dt_1 \le$$

$$\le \left|e^{w(t)}\right| \cdot \int_t^{t^*}|h(t_1)|\, dt_1 + \left|e^{w(t^*)}\right| \cdot \int_{t^*}^{t_0}|h(t_1)|\, dt_1 \le \left|e^{w(t)}\right| \cdot \theta(t,t_0),$$

где $\theta(t,t_0) = \int_t^{t^*}|h(t_1)|\, dt_1 + \left|e^{w(t^*)-w(t)}\right| \cdot \int_{t^*}^{t_0} |h(t_1)|\, dt_1$ и t^* – некоторая точка на γ между t и t_0 такая, что $\operatorname{Re} w(t^*) = \frac{1}{2}\operatorname{Re} w(t)$ и $t^* \to 0$ при $t \to 0$. Поэтому $\lim\limits_{t\to 0,\, t\in\gamma} \theta(t,t_0) = 0$.

Перепишем $F_{21}(t,t_0)$ в виде $F_{21}(t,t_0) = \int_t^{t_0} h(t_1)e^{w(t_1)}S(t_1,t_0)dt_1$, где

$$S(t_1,t_0) = 1 - \int_{t_1}^{t_0} h(t_2)(1-e^{-(w(t_1)-w(t_2))})dt_2 + \int_{t_1}^{t_0} h(t_2)(1-e^{-(w(t_1)-w(t_2))})dt_2 \int_{t_2}^{t_0} h(t_2)(1-e^{-(w(t_2)-w(t_3))})dt_3 - \ldots$$ и

$|S(t_1,t_0)| \le e^{2\varepsilon(t,t_0)}$, так как $\left|(1-e^{-(w(t_k)-w(t_{k+1}))})\right| \le 2$. Теперь $\left|F_{21}(t,t_0)e^{-w(t)}\right| \le \theta(t,t_0)\cdot e^{2\varepsilon(t,t_0)}$ и

$$\lim_{t\to 0,\, t\in\gamma} F_{21}(t,t_0)e^{-w(t)} = 0.$$

Аналогично, запишем $F_{22}(t,t_0) = 1 + \int_t^{t_0} h(t_1)dt_1 - \int_t^{t_0} h(t_1)e^{w(t_1)}\psi(t_1,t_0)dt_1$, где

$$\psi(t_1,t_0) = \int_{t_1}^{t_0} h(t_2)(1-e^{-(w(t_1)-w(t_2))})e^{-w(t_2)}dt_2 -$$

$$-\int_{t_1}^{t_0} h(t_2)(1-e^{-(w(t_1)-w(t_2))})dt_2 \int_{t_2}^{t_0} h(t_3)(1-e^{-(w(t_2)-w(t_3))})e^{-w(t_3)}dt_3 + \ldots$$

и $|\psi(t_1,t_0)| \le e^{-\operatorname{Re} w(t_0)}(e^{2\varepsilon(t_1,t_0)}-1)$. Как и ранее получим

$\left|e^{-w(t)}\left(F_{22}(t,t_0) - 1 - \int_t^{t_0} h(t_1)dt_1\right)\right| \le \theta(t,t_0)\cdot e^{-\operatorname{Re} w(t_0)}(e^{2\varepsilon(t,t_0)}-1)$. Откуда следует, что

$\lim\limits_{t\to 0,\, t\in\gamma}\left(F_{22}(t,t_0) - 1 - \int_t^{t_0} h(t_1)dt_1\right)e^{-w(t)} = 0$ и $\lim\limits_{t\to 0,\, t\in\gamma} F_{22}(t,t_0)e^{-w(t)} = 0$. Лемма доказана.

При выяснении поведения решений задачи (5), (6) вблизи точки $t=0$ важны свойства симметрии матрицы $F(t,t_0)$ по переменным t и t_0, которые содержатся далее в п.п. а) – г).

а) $\det F(t,t_0) = F_{11}(t,t_0)F_{22}(t,t_0) - F_{21}(t,t_0)F_{12}(t,t_0) \equiv 1$ при любых $t\in\gamma$ и $t_0\in\gamma$, поскольку по формуле Лиувилля $\det F(t,t_0) = \det F(t_0,t_0)\exp\left\{\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} M(t_1)dt_1\right\} = \det F(t_0,t_0) = 1$.

б) Для любых $t\in\gamma$ и $t_0\in\gamma$ $\mathbf{d}(t_0) = F(t_0,t)\cdot\mathbf{d}(t)$, и $F(t,t_0) = \{F(t_0,t)\}^{-1}$, т.е.

$$F_{11}(t,t_0) = F_{22}(t_0,t),\ F_{12}(t,t_0) = -F_{12}(t_0,t),\ F_{21}(t,t_0) = -F_{21}(t_0,t),\ F_{22}(t,t_0) = F_{11}(t_0,t). \qquad (14)$$

в) Повторное применение формулы (7) для точек $t_2, t_1, t_0, \in \gamma$ приводит к равенству

$$F(t_2,t_0)=\begin{pmatrix} F_{11}(t_2,t_0) & F_{12}(t_2,t_0) \\ F_{21}(t_2,t_0) & F_{22}(t_2,t_0) \end{pmatrix} = F(t_2,t_1)\cdot F(t_1,t_0) =$$

$$=\begin{pmatrix} F_{11}(t_2,t_1)F_{11}(t_1,t_0)+F_{12}(t_2,t_1)F_{21}(t_1,t_0) & F_{11}(t_2,t_1)F_{12}(t_1,t_0)+F_{12}(t_2,t_1)F_{22}(t_1,t_0) \\ F_{21}(t_2,t_1)F_{11}(t_1,t_0)+F_{22}(t_2,t_1)F_{21}(t_1,t_0) & F_{21}(t_2,t_1)F_{12}(t_1,t_0)+F_{22}(t_2,t_1)F_{22}(t_1,t_0) \end{pmatrix}. \tag{15}$$

г) Предположим, что некоторая часть кривой γ проходит по действительной оси и коэффициенты уравнения (1) для этих точек действительны. Отметим свойства симметрии матрицы $F(t,t_0)$, связывающие две произвольные точки t_1 и t_2 на действительной оси.

Пусть теперь $\operatorname{Im} t = \operatorname{Im} t_1 = \operatorname{Im} t_2 = 0$ тогда, если $u(t)=(v_1(t), v_2(t))\begin{pmatrix} d_1(t) \\ d_2(t) \end{pmatrix} = (v_1(t), v_2(t))\mathbf{d}(t)$ – произвольное решение уравнения (1). Тогда и функция $\bar u(t)=\bar d_1(t)\bar v_1(t)+\bar d_2(t)\bar v_2(t)$ также решение уравнения (1). Вектор $\bar{\mathbf{d}}(t)$ определяется как в (11): $\bar{\mathbf{d}}(t)=F(t,t_0)\cdot\bar{\mathbf{d}}(t_0)$ и $\bar{\mathbf{d}}(t_1)=F(t_1,t_2)\cdot\bar{\mathbf{d}}(t_2)$. Пусть также для функций $v_k(t)$ определена матрица B перехода к комплексно сопряженным функциям $\bar v_k(t)$: $(\bar v_1(t),\bar v_2(t))=(v_1(t),v_2(t))B(t),\ B^{-1}=\bar B$.

Для решения $\bar u(t)=(\bar v_1,\bar v_2)\begin{pmatrix} \bar d_1(t) \\ \bar d_2(t) \end{pmatrix} = (v_1(t),v_2(t))B\begin{pmatrix} \bar d_1(t) \\ \bar d_2(t) \end{pmatrix}$ и вектор $B\begin{pmatrix} \bar d_1(t) \\ \bar d_2(t) \end{pmatrix}$ можно рассматривать как вектор $\mathbf{d}(t)$ в (11) для этого решения уравнения (1). Тогда

$$B(t_1)\begin{pmatrix} \bar d_1(t_1) \\ \bar d_2(t_1) \end{pmatrix} = F(t_1,t_2)B(t_2)\begin{pmatrix} \bar d_1(t_2) \\ \bar d_2(t_2) \end{pmatrix}.$$

Умножая на $B^{-1}(t_1)$ слева и переходя к сопряжённым выражениям получим

$$\begin{pmatrix} \bar d_1(t_1) \\ \bar d_2(t_1) \end{pmatrix} = B^{-1}(t_1)F(t_1,t_2)B(t_2)\begin{pmatrix} \bar d_1(t_2) \\ \bar d_2(t_2) \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} d_1(t_1) \\ d_2(t_1) \end{pmatrix} = B\bar F(t_1,t_2)\bar B\begin{pmatrix} d_1(t_2) \\ d_2(t_2) \end{pmatrix},\ \text{или}$$

$$F(t_1,t_2)=B(t_1)\bar F(t_1,t_2)\bar B(t_2)\ . \tag{16}$$

Лемма 4. Пусть выполнены условия леммы 3, $\operatorname{Re} w(t)$ не возрастает при движении от точки t к t_0 вдоль γ и $\lim\limits_{t\to 0,\, t\in\gamma} \operatorname{Re} w(t) = +\infty$, тогда: а) существуют пределы

$$\lim_{t\to 0,\, t\in\gamma} d_1(t) = d_1(0) \neq \infty\,, \qquad \lim_{t\to 0(t\in\gamma)} d_2(t)e^{-w(t)} = 0\ ; \tag{17}$$

б) для любых $t, t_0 \in \gamma \setminus \{0\}$ выполняются следующие соотношения

$$\left|d_1(t)-d_1(t_0)\right| \le C(e^{2\varepsilon(t,t_0)}-1), \qquad \left|d_1(t)-d_1(0)\right| \le C(e^{2\varepsilon(0,t)}-1),$$

$$\left|d_2(t)-d_2(t_0)\right| \le C(e^{2\varepsilon(t,t_0)}-1)e^{\operatorname{Re} w(t)} + \varepsilon(t,t_0)\left|d_2(t_0)\right|(1-e^{\operatorname{Re}(w(t)-w(t_0))}),$$

$$\left|d_2(t)e^{-w(t)}\right| \le 2Ce^{2\varepsilon(t,t_0)}\cdot\theta(t,t_0) + e^{-\operatorname{Re} w(t)}\cdot\left|d_2(t_0)\right|(1+\varepsilon(t,t_0))\ ,$$

где $\varepsilon(t,t_0)=\int\limits_t^{t_0} \left|h(t_1)\right| dt_1$, $C=\frac{1}{2}\left(\left|d_1(t_0)\right|+\left|d_2(t_0)\right|\cdot e^{-\operatorname{Re} w(t_0)}\right)$,

$$\theta(t,t_0)=\int\limits_{t_1}^{€}|h(t_1)|\,dt_1+e^{-1/2w(t)}\cdot\int\limits_{€}^{t_0}|h(t_1)|\,dt_1=\varepsilon(t,€)+e^{-1/2w(t)}\cdot\varepsilon(€,t_0)\ ,$$

при $€=€(t)\in\gamma:\operatorname{Re}w(€)=\dfrac{1}{2}\operatorname{Re}w(t)$ и $\theta(t,t_0)=0(1)$ когда $t\to 0$, $t\in\gamma$;

в) если $d_1(0)=0$, а $F_{11}(0,t_0)\neq 0$, то существуют конечные пределы $\lim\limits_{t\to 0,t\in\gamma}d_2(t)=d_2(0)\neq\infty$ и $\lim\limits_{t\to 0,t\in\gamma}d_1(t)e^{w(t)}=0$, при этом

$$\left|d_1(t)e^{w(t)}\right|\le\frac{1}{2}(e^{2\varepsilon(0,t)}-1)\cdot|d_2(0)|\ ,\qquad |d_2(t)-d_2(0)|\le\frac{1}{2}(e^{2\varepsilon(0,t)}-1)\cdot|d_2(0)|\ . \tag{18}$$

Доказательство предложений а) и б) следует из формулы (7), оценок (11) и лемм 2, 3. При этом $d_1(0)=d_{01}F_{11}(0,t_0)+d_{02}F_{12}(0,t_0)$. Пусть, наконец, $d_1(0)=0$, а $F_{11}(0,t_0)\neq 0$. Тогда $d_1(t_0)=-\dfrac{F_{12}(0,t_0)}{F_{11}(0,t_0)}d_2(t_0)$ и для любого $t\in\gamma$ из (7) следует

$$\begin{aligned}d_1(t)&=\frac{F_{12}(t,t_0)\cdot F_{11}(0,t_0)-F_{11}(t,t_0)\cdot F_{12}(0,t_0)}{F_{11}(0,t_0)}\cdot d_2(t_0),\\ d_2(t)&=\frac{F_{22}(t,t_0)\cdot F_{11}(0,t_0)-F_{21}(t,t_0)\cdot F_{12}(0,t_0)}{F_{11}(0,t_0)}\cdot d_2(t_0).\end{aligned}\tag{19}$$

Из леммы 3 и формул симметрии (14), (15) получим представления

$$F_{11}(0,t)=F_{11}(0,t_0)F_{11}(t_0,t)+F_{12}(0,t_0)F_{21}(t_0,t)=F_{22}(t,t_0)F_{11}(0,t_0)-F_{21}(t,t_0)F_{12}(0,t_0)\ ,$$

$$F_{12}(0,t)=F_{11}(0,t_0)F_{12}(t_0,t)+F_{12}(0,t_0)F_{22}(t_0,t)=F_{11}(0,t_0)(-F_{12}(t,t_0))+F_{12}(0,t_0)F_{11}(t,t_0)=$$
$$=-(F_{12}(t,t_0)F_{11}(0,t_0)-F_{11}(t,t_0)F_{12}(0,t_0))\ .$$

Равенства (19) тогда принимают вид $d_1(t)=-\dfrac{F_{12}(0,t)}{F_{11}(0,t_0)}\cdot d_2(t_0)$, $d_2(t)=\dfrac{F_{11}(0,t)}{F_{11}(0,t_0)}\cdot d_2(t_0)$.

При $t\to 0,\,t\in\gamma$ существует $\lim\limits_{t\to 0,t\in\gamma}d_2(t)=\dfrac{d_2(t_0)}{F_{11}(0,t_0)}=d_2(0)\neq\infty$, т.к. $F_{11}(0,0)=1$ и

$$d_1(t)=-F_{12}(0,t)\cdot d_2(0),\quad d_2(t)=F_{11}(0,t)\cdot d_2(0)\,. \tag{20}$$

Применяя теперь оценки для $F_{11}(0,t)$, $F_{12}(0,t)$ в точке $(0,t)$, заменив в лемме 2 точку (t,t_0) на точку $(0,t)$, выводим требуемые неравенства (18).

Асимптотика решений уравнения (1) при $t\in\Omega,\ t\to 0$

Леммы 1 – 4 позволяют исследовать поведение решения уравнения вблизи точки вырождения $t=0$ при изменении параметра λ, выбирая подходящим образом функцию $\alpha(t)$ и кривую γ .

Рассмотрим в Ω вырождающееся при $t=0$ дифференциальное уравнение

$$Lu\equiv(a(t)u'(t))'+b(t)u'(t)+c(t,\lambda)u(t)=0, \tag{1}$$

с действительными на отрезке $[0,1]$ коэффициентами такими, что $a(0)=0$, $b(0)\neq 0$ и $a(t)>0$ при $t\in(0,1]$ и применим описанную выше схему для получения асимптотических представлений решений уравнения (1) при $t\to 0$.

Так как в основном нас интересуют асимптотики действительных решений уравнения с действительными коэффициентами при $t \to 0$, то будем в дальнейшем полагать, что кривая $\gamma \subset \Omega$ выходит из точки $t=0$ вдоль некоторой части отрезка $[0,1]$, поскольку это несколько упрощает формулировки и вычисления. Для возможности использования получаемых формул для краевых задач на отрезке $[0,1]$ допустим также, что кривая γ заканчивается в точке $t=1$. Будем эти предположения отмечать обозначением $\gamma = \gamma_{01}$.

Пусть функции $a(t), b(t), c(t,\lambda)$ принадлежат $C^2[0,1]$ и допускают продолжение такой же гладкости на γ в область Ω комплексной плоскости переменной $t = re^{i\psi}$. Определим на γ непрерывную функцию $\alpha(t) \neq 0$ так, чтобы выполнялось следующее условие.

Условие 1. Функция $\alpha(t) \neq 0$ для $t \in \gamma$, $\alpha(0) = |b(0)| > 0$, а функция $h(t)$, определенная в (5), непрерывна на γ.

Такой выбор кривой γ и функции $\alpha(t)$ обеспечивает выполнение условий лемм 1 – 4. Действительно, $\lim\limits_{t\to 0,\, t\in\gamma} \operatorname{Re} w(t) = +\infty$, $\quad a(t) \in C^2[0,1]),\ h(t) \in C[0,1]$, следовательно, сходится интеграл

$$\varepsilon(0,t_0) = \int_0^{t_0} |h(t_1)|\, dt_1 = \lim_{t\to 0,\, t\in\gamma} \int_t^{t_0} |h(t_1)|\, dt_1 < \infty, \quad \lim_{t\to 0,\, t\in\gamma} \frac{\alpha^2(t) - (b^2(t) - 4a(t)c(t)) - 2b'(t)a(t)}{a(t)} \neq \infty$$

и $\operatorname{Re} w(t)$ не возрастает при движении от точки t к t_0 при t_0 достаточно близких к $t=0$.

В силу лемм 2 – 4 теперь можно утверждать, что если $b(0) < 0$, то любое решение уравнения (1) оказывается ограниченным при $t \to 0$ для любого выбора кривой γ, точки $t_0 \in \gamma \subset \Omega \setminus \{0\}$ и произвольном выборе начальных значений d_{01} и d_{02}, так как $\lim\limits_{t\to 0+0(\gamma)} v_k(t,t') \neq \infty$, $k = 1,2$. Следовательно, оно может быть записано в виде (9)

$$u(t) = v_1(F_{11}(t,t_0) + F_{21}(t,t_0)e^{-w(t,t')})d_{01} + v_2(F_{22}(t,t_0) + F_{12}(t,t_0)e^{w(t,t')})d_{02}.$$

В случае $b(0) > 0$ некоторые решения будут неограниченно возрастать при $t \to 0$. Так, если $b(0) > 0$ и $d_1(0) = \lim\limits_{t\to 0,\, t\in\gamma} (F_{11}(t,t_0)d_{01} + F_{12}(t,t_0)d_{02}) \neq 0$, то решение $u(t)$ в (9) не может быть ограниченным. Действительно, см. (13)

$$\lim_{t\to 0} \frac{u(t)}{v_1(t)d_1(t)} = 1 + \lim_{t\to 0} \frac{v_2(t)}{v_1(t)} \cdot \frac{d_2(t)}{d_1(t)} = 1 + \frac{\lim\limits_{t\to 0} e^{-w(t)}(F_{21}(t,t_0)d_{01} + F_{22}(t,t_0)d_{02})}{d_1(0)} = 1$$

и, так как $\lim\limits_{t\to 0, t\in\gamma} v_1(t,t') = \infty$, то $\lim\limits_{t\to 0, t\in\gamma} u(t) = \infty$.

Итак, необходимое условие ограниченности решений при $t \to 0$ для $b(0) > 0$ имеет вид

$$d_1(0) = F_{11}(0,t_0)d_{01} + F_{12}(0,t_0)d_{02} = 0. \tag{21}$$

Построим асимптотические при $t \to 0$ разложения двух линейно независимых решений $u_{1,2}(t)$ уравнения (1). Первое из решений $u_1(t)$ уравнения (1) получим, выбирая точку $t_0 \in \gamma \cap (0,1]$ достаточно близко к $t = 0$, $[0,t_0] \in \gamma$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\varepsilon(0,t_0)=\int_0^{t_0}|h(t_1)|\,dt_1\le\ln\frac{3}{2} \tag{22}$$

и начальные значения в ней $d_2(t_0)=d_{02}=0$, а $d_{01}\ne 0$. Тогда

$$u_1(t)=v_1(t)\cdot\left(F_{11}(t,t_0)+F_{21}(t,t_0)e^{-w(t)}\right)\cdot d_{01}=v_1(t)\cdot\Phi(t), \tag{23}$$

где $\Phi(t)=\left(F_{11}(t,t_0)+F_{21}(t,t_0)e^{-w(t)}\right)\cdot d_{01}$.

Отметим, что функция $u_1(t)$ в (23) определена при всех $t\in\gamma$, ограниченна на γ и $F_{11}(0,t_0)\ge\frac{1}{2}$ при выполнении условия (22). Выбрав $d_{01}=(F_{11}(0,t_0))^{-1}\ne 0$, определим функцию

$$\Phi(t)=(F_{11}(t,t_0)+F_{21}(t,t_0)e^{-w(t)})(F_{11}(0,t_0))^{-1}. \tag{24}$$

Формулы (10) вместе с (15) позволяют показать, что она удовлетворяет интегральному уравнению

$$\Phi(t)=1+K_1\Phi(t), \tag{25}$$

где $K_1\varphi(t)=\int_0^{t_0}K_1(t,t_1)\varphi(t_1)dt_1$ – интегральный оператор с ядром $K_1(t,t_1)=\begin{cases}h(t_1), & 0\le t_1\le t\le t_0\\ h(t_1)e^{w(t_1)-w(t)}, & t\le t_1\le t_0\end{cases}$, и начальному условию $\Phi(0)=1$ (см. [6]).

Функция $\Phi(t)$, как единственное решение интегрального уравнения (25), при выполнении условия (22), представляется абсолютно и равномерно на $[0,t_0]$ сходящимся рядом

$$\Phi(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k(t), \tag{26}$$

где $\varphi_k(t)=K_1\varphi_{k-1}(t)$ и $\varphi_0(t)\equiv 1$. Функции $\varphi_k(t)$ образуют асимптотическую последовательность при $t\to 0$, т.е. $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\varphi_k(t)}{\varphi_{k-1}(t)}=0,\ k=1,2,\dots$ (см. [6]).

Таким образом получаем асимптотическое при $t\to 0$ разложение решения $u_1(t)$ уравнения (1) по функциям $\{\varphi_k(t)\}$

$$u_1(t)=v_1(t)\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k(t). \tag{27}$$

Второе решение $u_2(t)$ уравнения (1) будем выбирать так, чтобы при $b(0)>0$ выполнялось условие ограниченности (21). Как следует из леммы 4 (см. (3) и (20)), решение при этом имеет вид

$$u_2(t)=v_2(t)(F_{11}(0,t)-F_{12}(0,t)e^{w(t)})=v_2(t)\Psi(t). \tag{28}$$

Функция $\Psi(t)=F_{11}(0,t)-F_{12}(0,t)\cdot e^{w(t)}$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\Psi(t)=1+K_2\Psi(t), \tag{29}$$

где $K_2\psi(t)=\int_0^{t}K_2(t,t_1)\psi(t_1)dt_1$ – интегральный оператор Вольтерра с ядром $K_2(t,t_1)=-h(t_1)\left(1-e^{w(t)-w(t_1)}\right)$ при $0\le t_1\le t$ и начальному условию $\Psi(0)=1$.

Как решение уравнения (29), функция $\Psi(t)$ представляется абсолютно и равномерно на γ сходящимся рядом

$$\Psi(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\psi_k(t), \tag{30}$$

где $\psi_k(t)=K_2\psi_{k-1}(t)$ и $\psi_0(t)\equiv 1$.

Непосредственно проверяется, что функции $\psi_k(t)$ образуют асимптотическую при $t\to 0$ последовательность, т.е. $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\psi_k(t)}{\psi_{k-1}(t)}=0,\ k=1,2,\ldots$. Следовательно, получаем асимптотическое при $t\to 0$ разложение решения $u_2(t)$ по функциям $\{\psi_k(t)\}$

$$u_2(t)=v_2(t)\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\psi_k(t). \tag{31}$$

Функция $u_2(t)$ при $b(0)>0$ является единственным (с точностью до множителя) ограниченным на γ решением уравнения (1). Прямые вычисления показывают, что функции $u_k(t)$. $k=1,2$ при $b(0)+a'(0)<0$ и $u_2(t)$ при $b(0)>0$ непрерывно дифференцируемы на γ вплоть до точки $t=0$. Общее решение уравнения (1) представляется в виде

$$u_0(t)=C_1\cdot u_1(t)+C_2\cdot u_2(t)=C_1\cdot v_1(t)\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k(t)+C_2\cdot v_2(t)\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\psi_k(t), \tag{32}$$

как разложение по асимптотическим при $t\to 0$ последовательностям $\{\varphi_k(t)\}$ и $\{\psi_k(t)\}$.

Для произвольной непрерывной на γ функции $f(t)$ рассмотрим теперь неоднородное уравнение, соответствующее уравнению (1)

$$Lu\equiv(a(t)u'(t))'+b(t)u'(t)+c(t,\lambda)u(t)=f(t). \tag{33}$$

Чтобы сохранить возможность использования получаемых формул для решения краевых задач на отрезке $[0,1]$, будем считать, что кривая $\gamma=\gamma_{01}$ начинается в точке $t=0$ и оканчивается в точке $t=1$. Ограниченное на γ решение уравнения (34) может быть представлено в виде

$$u_*(t)=\Phi(t)\int_0^t\frac{-\Psi(t_1)\exp\left\{-\int_{t_1}^{t}\frac{b(\tau)+\alpha(\tau,\lambda)}{2a(\tau)}d\tau\right\}}{a(1)W(1)\sqrt{\alpha(t,\lambda)\alpha(t_1,\lambda)}}f(t_1)dt_1+$$

$$+\Psi(t)\int_t^1\frac{-\Phi(t_1)\exp\left\{\int_{t}^{t_1}\frac{b(\tau)-\alpha(\tau,\lambda)}{2a(\tau)}d\tau\right\}}{a(1)W(1)\sqrt{\alpha(t,\lambda)\alpha(t_1,\lambda)}}f(t_1)dt_1,$$

и $W(1)=u_1(1)u_2'(1)-u_1'(1)u_2(1)$ (см., например, [6]).

Оценим предельное поведение Вронскиана

$$W(t)=u_1u_2'-u_1'u_2=W(1)\exp\left\{\int_t^1\frac{b(t_1)+a'(t_1)}{a(t_1)}dt_1\right\}\neq 0 \qquad \text{(формула Лиувилля)},$$

$$W(1)=W(t)\exp\left\{-\int_t^1\frac{b(t_1)+a'(t_1)}{a(t_1)}dt_1\right\}=W(t)\exp\left\{-\int_t^1\frac{b(t_1)dt_1}{a(t_1)}\right\}\frac{a(t)}{a(1)}=const. \tag{34}$$

Преобразуем $W(t)$, используя (2), (25), (29), получим

$$W(t)=u_1u_2'-u_1'u_2=(v_1v_2'-v_1'v_2)\Phi\Psi+v_1v_2(\Phi\Psi'-\Phi'\Psi)=$$

$$=\frac{\exp\left\{\int_t^{t'}\frac{b(t_1)dt_1}{a(t_1)}\right\}}{a(t)}\left(\Phi(t)\Psi(t)-\Psi(t)\int_t^1 h(t_1,\lambda)e^{-\int_t^{t_1}\frac{\alpha(\tau,\lambda)}{a(\tau)}d\tau}\Phi(t_1)dt_1-\Phi(t)\int_0^t h(t_1,\lambda)e^{-\int_{t_1}^{t}\frac{\alpha(\tau,\lambda)}{a(\tau)}d\tau}\Psi(t_1)dt_1\right).$$

Из формулы (34) при $t\to 0$ теперь получим

$$W(1)=W(t)\exp\left\{-\int_t^1\frac{b(t_1)dt_1}{a(t_1)}\right\}\frac{a(t)}{a(1)}=\lim_{t\to 0}\frac{a(t)W(t)}{a(1)\exp\left\{\int_t^{t'}\frac{b(t_1)dt_1}{a(t_1)}\right\}\exp\left\{\int_{t'}^1\frac{b(t_1)dt_1}{a(t_1)}\right\}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{t\to 0}\left(\Phi\Psi-\Psi\int_t^1 h(t_1,\lambda)e^{-\int_t^{t_1}\frac{\alpha(\tau,\lambda)}{a(\tau)}d\tau}\Phi(t_1)dt_1-\Phi\int_0^t h(t_1,\lambda)e^{-\int_{t_1}^{t}\frac{\alpha(\tau,\lambda)}{a(\tau)}d\tau}\Psi(t_1)dt_1\right)}{a(1)\exp\left\{\int_{t'}^1\frac{b(t_1)dt_1}{a(t_1)}\right\}}==\frac{\exp\left\{-\int_{t'}^1\frac{b(t_1)dt_1}{a(t_1)}\right\}}{a(1)},$$

так как $\lim\limits_{t\to 0}\int_t^1 h(t_1,\lambda)e^{-\int_t^{t_1}\frac{\alpha(\tau,\lambda)}{a(\tau)}d\tau}\Phi(t_1)dt_1=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\int_t^1 h(t_1,\lambda)e^{\int_{t_1}^1\frac{\alpha(\tau,\lambda)}{a(\tau)}d\tau}\Phi(t_1)dt_1}{e^{\int_t^1\frac{\alpha(\tau,\lambda)}{a(\tau)}d\tau}}(\frac{\infty}{\infty})=$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{h(t,\lambda)e^{\int_t^1\frac{\alpha(\tau,\lambda)}{a(\tau)}d\tau}\Phi(t)}{e^{\int_t^1\frac{\alpha(\tau,\lambda)}{a(\tau)}d\tau}\frac{\alpha(t,\lambda)}{a(t)}}=0 \quad \text{и} \quad \Phi(0)=1,\ \text{т.е.,}\ a(1)W(1)=\exp\left\{-\int_{t'(\gamma)}^1\frac{b(t_1)dt_1}{a(t_1)}\right\}.$$

Здесь точка t' - произвольная точка кривой $\gamma\setminus\{0\}$, но наиболее простой вид решение $u_*(t)$ имеет при $t'=1$. В этом случае получаем

$$u_*(t)=\Phi(t)\int_0^t\frac{-\Psi(t_1)\exp\left\{-\int_{t_1}^t\frac{b(\tau)+\alpha(\tau,\lambda)}{2a(\tau)}d\tau\right\}}{\sqrt{\alpha(t,\lambda)\alpha(t_1,\lambda)}}f(t_1)dt_1+$$
$$+\Psi(t)\int_t^1\frac{-\Phi(t_1)\exp\left\{\int_t^{t_1}\frac{b(\tau)-\alpha(\tau,\lambda)}{2a(\tau)}d\tau\right\}}{\sqrt{\alpha(t,\lambda)\alpha(t_1,\lambda)}}f(t_1)dt_1. \tag{35}$$

Отметим, что функции $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ не зависят от t' .

Рассмотрим предельное поведение решений при $t\to 0$ для $b(0)<0$. Нетрудно проверить, что $\lim\limits_{t\to 0}u_*(t)=0$ для $b(0)<0$ и $\lim\limits_{t\to 0}u_*(t)=u_*(0)\neq\infty$ для $b(0)>0$.

Дифференцируя (35) и вычисляя предел при $t\to 0+0$ устанавливаем непрерывность $u_*'(t)$ на γ. Таким образом фактически установлена

Теорема 1. Пусть $\gamma=\gamma_{01}\subset\Omega$ простая гладкая кривая, выходящая из точки $t=0$ вдоль отрезка $[0,1]$ и заканчивающаяся в точке $t=1$, $a(0)=0,$ $b(0)\neq 0$, $a(t)>0$ при $t\in\gamma\cap(0,1]$. Предположим, что при каждом λ коэффициенты уравнения (1) дважды непрерывно дифференцируемы вдоль кривой γ и $\alpha(t) \neq 0$ произвольная непрерывная функция, удовлетворяющая условию 1. Тогда справедливы следующие утверждения.

а) Функции $u_1(t), u_2(t)$, определенные в (24), (25), (29), образуют фундаментальную систему решений уравнения (1) и допускают разложения (27), (31) по асимптотическим при $t \to 0$ последовательностям $\{\varphi_k(t)\}$ и $\{\psi_k(t)\}$. При $b(0)+a'(0)<0$ обе функции непрерывно дифференцируемы на γ вплоть до $t=0$ и $\lim\limits_{t\to 0} u_2(t)=0$, а при $b(0)>0$ имеют место равенства $\lim\limits_{t\to 0} u_1(t)=+\infty$, $\lim\limits_{t\to 0} u_2(t)=u_2(0)=v_2(0)$ и $u_2(t)$ непрерывно дифференцируема на γ вплоть до $t=0$.

б) Для любой непрерывной на $\gamma=\gamma_{01}$ функции $f(t)$ существует непрерывно дифференцируемое на γ (при $b(0)+a'(0)<0$ или $b(0)>0$) решение неоднородного уравнения (33)

$$u_*(t)=A(t,\lambda)\Phi(t)+B(t,\lambda)\Psi(t), \tag{36}$$

где $A(t,\lambda)=\int\limits_0^t \dfrac{-\Psi(t_1)\exp\left\{-\int\limits_{t_1}^{t}\dfrac{b(\tau)+\alpha(\tau,\lambda)}{2\cdot a(\tau)}d\tau\right\}}{\sqrt{\alpha(t,\lambda)\alpha(t_1,\lambda)}} f(t_1)dt_1$, $B(t,\lambda)=\int\limits_t^1 \dfrac{-\Phi(t_1)\exp\left\{\int\limits_{t}^{t_1}\dfrac{b(\tau)-\alpha(\tau,\lambda)}{2\cdot a(\tau)}d\tau\right\}}{\sqrt{\alpha(t,\lambda)\alpha(t_1,\lambda)}} f(t_1)dt_1$.

При этом $\lim\limits_{t\to 0} u_*(t)=0$ для $b(0)<0$ и $\lim\limits_{t\to 0} u_*(t)=u_*(0)\neq\infty$ для $b(0)>0$.

в) Общее решение уравнения (33) при $t\to 0$ представляется в виде рядов по определенным в (26), (30) асимптотическим последовательностям $\{\varphi_k(t)\}$, $\{\psi_k(t)\}$ и имеет вид

$$u(t)=(C_1v_1(t,\lambda)+A(t,\lambda))\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k(t)+(C_2v_2(t,\lambda)+B(t,\lambda))\sum_{k=0}^{\infty}\psi_k(t), \tag{37}$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Замечание 3. 1) Выбор кривой γ (γ_{01}) вдоль отрезка $[0,1]$ и требование действительности коэффициентов не существенно и лишь упрощает доказательство. 2) Гладкость решений $u_k(t)$ в точке $t=0$ определяется коэффициентами и функциями

$$v_k(t)=\alpha^{-1/2}(t)\exp\left\{\int\limits_t^1\frac{b(\tau)-(-1)^k\alpha(\tau)}{2a(\tau)}d\tau\right\},\ k=1,2,\ t'=1 \ \text{(см. [6])}$$

и в настоящей статье не ставится задача точности формулировок о гладкости решений в точке вырождения. 3) Функция $\alpha(t)\neq 0$ может быть выбрана, например, одним из следующих способов:

а) $\alpha(t)=\sqrt{b^2(t)}$, б) $\alpha(t)=\sqrt{b^2(t)-4a(t)c(t,\lambda)}$, в) $\alpha(t)=\sqrt{b^2(t)-4a(t)\tilde{c}(t,\lambda)}$, $\tilde{c}(t,\lambda)=c(t,\lambda)-\dfrac{b'(t)}{2}$

(при фиксированной положительной ветви корня вблизи $t=0$). 4) В теореме не рассматривалось поведение решений при изменении параметра λ, однако, полученные для них формулы при определенных условиях на коэффициенты позволяют это сделать.

Двухточечные краевые задачи. Оценки резольвенты

При исследовании решений уравнения (1) для простоты изложения ограничимся простейшей зависимостью от параметра λ, предполагая, что $c(t,\lambda)=c(t)-\lambda$.

На отрезке [0,1] рассмотрим двухточечную краевую задачу для уравнения

$$Lu-\lambda u \equiv (a(t)u')'+b(t)u'+(c(t)-\lambda)u = f(t), \quad a(0)=0, \quad a(t)>0, t\neq 0, \quad b(0)=b_0\neq 0, \tag{38}$$

где $a(t), b(t), c(t)$ и $f(t)$ достаточно гладкие действительные функции, $\lambda\in R$.

Как известно (см. [1], а также раздел «**Асимптотика решений уравнения (1) при** $t\in\Omega, t\to 0$» настоящей работы), корректная постановка начальных и граничных задач для уравнения (38) определяется знаком b_0. При $b_0<0$ граничные условия имеют вид

$$u(0)=\sigma_1 u'(1)+\sigma_2 u(1)=0, \quad |\sigma_1|+|\sigma_2|\neq 0, \ (\sigma_1=0, \sigma_2=1) \tag{39}$$

при $b_0>0$ условие в точке $t=0$ снимается (заменяется условием ограниченности решения)

$$\overline{\lim_{t\to 0}}\,|u(t)|\neq\infty, \ \sigma_1 u'(1)+\sigma_2 u(1)=0, \quad |\sigma_1|+|\sigma_2|\neq 0 \quad (\sigma_1=0, \sigma_2=1). \tag{40}$$

Отметим, что по сравнению с рассматриваемым случаем исследование общих краевых задач не добавляет принципиальных трудностей.

Задачи (38), (39) и (38), (40) в определенном смысле являются «сопряженными», поэтому далее подробно исследуем при $b_0<0$ лишь задачу (38), (39) и соответствующий ей оператор L. При этом будем придерживаться рассмотренных выше схемы, подходов и результатов теоремы 1, выбирая путь интегрирования $\gamma=[0,1]$ и функцию

$$\alpha(t)=\alpha(t,\lambda)=\sqrt{b^2-4a(t)(c(t)-\lambda)}, \tag{41}$$

фиксируя на γ вблизи $t=0$ положительную ветвь корня.

Приведем оценки резольвенты R_λ задачи (38), (39). Для упрощения изложения в дальнейшем будем считать, что параметр $\lambda>c_{01}=\max\limits_{t\in\gamma} c(t)+1$, $\gamma=[0,1]$, $t'=1$ и при построении $\Phi(t), \Psi(t)$ будем выбирать $t_0=1$. Будем также предполагать выполненным следующее условие, которое содержит функцию $h(t)=\dfrac{1}{4\alpha(t)}\left(a(t)\left(\dfrac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}\right)^2-2\left(a(t)\dfrac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}\right)'+\dfrac{\alpha^2(t)-b^2(t)+4a(t)c(t)-2b'(t)a(t)}{a(t)}\right)$.

Условие 2. 1) Существуют $\lambda_0>0$, $M_h>0$ такие, что $|h(t,\lambda)|\leq M_h$ при $\lambda\geq\lambda_0$ и $t\in[0,1]$.
2) Существует конечный предел $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\varepsilon(0,1,\lambda)=0$, где $\varepsilon(0,1,\lambda)=\int\limits_0^1|h(t_1,\lambda)|\,dt_1=\lim\limits_{t\to 0}\int\limits_t^1 h(t_1,\lambda)\,dt_1<\infty$.

Условие 2 выполнено, например, для $a(t)=t^m, m\geq 2, \quad b, c\in R$.

Теорема 2. Пусть функции $a(t), b(t), c(t)$ принадлежат $C^2[0,1]$, $a(0)=0$, $a'(t)\geq 0$, $a(t)>0$ при $t\in(0,1]$, $b(0)=b_0<0$ и выполнено условие 2. Тогда при некотором $\lambda^*>0$ задача (38), (39) однозначно разрешима для любой функции $f(t)\in C[0,1]$ и $\lambda\geq\lambda^*$. Решение $u(t)=R_\lambda f(t)$ представимо в виде асимптотических при $t\to 0$ рядов по системам функций $\{\varphi_k(t)\}, \{\psi_k(t)\}$, определенных в (27), (32)

$$u(t)=A(t,\lambda)\Phi(t)+(B(t,\lambda)+C(t,\lambda))\Psi(t), \tag{42}$$

где $\Phi(t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\varphi_k(t), \Psi(t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\psi_k(t)$,

$$A(t,\lambda)=-\int_0^t \frac{\Psi(t_1)\exp\left\{-\int_{t_1}^{t}\frac{b(\tau)+\alpha(\tau,\lambda)}{2a(\tau)}d\tau\right\}}{\sqrt{\alpha(t,\lambda)\alpha(t_1,\lambda)}}f(t_1)dt_1\,,\quad B(t,\lambda)=-\int_t^1 \frac{\Phi(t_1)\exp\left\{\int_{t}^{t_1}\frac{b(\tau)-\alpha(\tau,\lambda)}{2a(\tau)}d\tau\right\}}{\sqrt{\alpha(t,\lambda)\alpha(t_1,\lambda)}}f(t_1)dt_1\,,$$

$$C(t,\lambda)=\frac{\Phi(1)}{\Psi(1)}\int_0^1 \frac{\Psi(t_1)\exp\left\{-\int_{t_1}^{1}\frac{b(\tau)+\alpha(\tau,\lambda)}{2a(\tau)}d\tau\right\}}{\sqrt{\alpha(t_1,\lambda)}}f(t_1)dt_1\cdot\frac{\exp\left\{\int_{t}^{1}\frac{b(\tau)-\alpha(\tau,\lambda)}{2a(\tau)}d\tau\right\}}{\sqrt{\alpha(t,\lambda)}}\,.$$

При этом, если $b_0+a'(0)<0$, то $u(t)\in C^1[0,1]$, $a(t)u''(t)\in C[0,1]$ и справедливо неравенство

$$\|a(t)u''(t)\|+\|u'\|+(\lambda-\lambda^*)\|u\|\le C^*\cdot\|f\|\,, \tag{43}$$

где $\|u\|=\max\limits_{t\in[0,1]}|u(t)|$.

Доказательство. Общее решение неоднородного уравнения (38), как следует из теоремы 1 (см. (23), (28), (32) и (37)), представимо на γ в виде (37), а именно:

$$u(t)=(C_1\cdot v_1(t,\lambda)+A(t,\lambda))\Phi(t)+(C_2\cdot v_2(t,\lambda)+B(t,\lambda))\Psi(t)=$$
$$=C_1\cdot v_1(t,\lambda)\Phi(t)+C_2\cdot v_2(t,\lambda)\Psi(t)+u_*(t)\,.$$

При выполнении условия 2 функции $\Phi(t),\ \Psi(t)$ равномерно по $\lambda\ge\lambda_0$ ограничены на $[0,1]$, при этом возможно выбрать λ_0 так, чтобы $\Psi(t)>\frac{1}{2}$ при всех $t\in[0,1]$ и $\lambda\ge\lambda_0>0$. Поэтому существует постоянная $M_0>0, M_0=\max\{|\Phi(t)|,|\Psi(t)|\}$.

Действительно, поскольку в этом случае выполнены все условия лемм 2 - 4 определим $\Phi(t)=(F_{11}(t,1)+F_{21}(t,1)e^{-w(t)})(F_{11}(0,1))^{-1}$, $\Psi(t)=F_{11}(0,t)-F_{12}(0,t)\cdot e^{w(t)}$. Далее несложно показать, что если выбрано значение параметра $\lambda_0>0$ так, чтобы при всех $\lambda\ge\lambda_0>0$

$$\varepsilon(0,1,\lambda)=\int_0^1|h(t_1,\lambda)|\,dt_1\le\ln\frac{3}{2}\,, \tag{44}$$

то $\frac{1}{2}<\Psi(t)\le 1, |\Phi(t)|\le 4$ на $[0,1]$ и можно выбрать $M_0=4$.

Так как при $b_0<0$ по теореме 1 $\lim\limits_{t\to 0}u_*(t)=0$ и $\lim\limits_{t\to 0+0}v_2(t)=0$, а $\Phi(0)=\Psi(0)=1$, то для выполнения граничных условий (39) достаточно выбрать постоянные C_1, C_2 следующим образом: $C_1=0$, $C_2=-\frac{u_*(1)}{u_2(1)}=-\alpha^{1/2}(1)\frac{u_*(1)}{\Psi(1)}$ $(\Psi(1)\ne 0)$, при этом $u_*(1)=A(1,\lambda)\Phi(1)$.

Тогда решение задачи (38), (39), учитывая формулу (42), может быть записано в виде

$$u(t)=A(t,\lambda)\Phi(t)+(-\alpha^{1/2}(1)\frac{A(1,\lambda)\Phi(1)}{\Psi(1)}v_2(t,\lambda)+B(t,\lambda))\Psi(t)=A(t,\lambda)\Phi(t)+(B(t,\lambda)+C(t,\lambda))\Psi(t)\,,$$

где $A(t,\lambda)=-\int_0^t \frac{\Psi(t_1)\exp\left\{-\int_{t_1}^{t}\frac{b(\tau)+\alpha(\tau,\lambda)}{2a(\tau)}d\tau\right\}}{\sqrt{\alpha(t,\lambda)\alpha(t_1,\lambda)}}f(t_1)dt_1$, $B(t,\lambda)=-\int_t^1 \frac{\Phi(t_1)\exp\left\{\int_{t}^{t_1}\frac{b(\tau)-\alpha(\tau,\lambda)}{2a(\tau)}d\tau\right\}}{\sqrt{\alpha(t,\lambda)\alpha(t_1,\lambda)}}f(t_1)dt_1$,

$$C(t,\lambda)=-\alpha^{1/2}(1)\frac{A(1,\lambda)\Phi(1)}{\Psi(1)}v_2(t,\lambda)=\frac{\Phi(1)}{\Psi(1)}\int_0^1\frac{\Psi(t_1)\exp\left\{-\int_{t_1}^{1}\frac{b(\tau)+\alpha(\tau,\lambda)}{2a(\tau)}d\tau\right\}}{\sqrt{\alpha(t_1,\lambda)}}f(t_1)dt_1\cdot\frac{\exp\left\{\int_t^1\frac{b(\tau)-\alpha(\tau,\lambda)}{2a(\tau)}d\tau\right\}}{\sqrt{\alpha(t,\lambda)}}.$$

Таким образом, оценки резольвенты сводятся к оценкам функций $A(t,\lambda), B(t,\lambda), C(t,\lambda)$. Эти оценки устанавливаются проще в предположении монотонности функции $a(t)$ на отрезке $[0,1]$, считая $a'(t)>0$ при $t>0$. Это требование выполнено вблизи точки $t=0$, если $a(t)\in C^1[0,1]$, $a(0)=0$ и $a(t)>0$ при $t>0$. Мы получим оценки лишь при $b(t)=b=const<0$ и $c(t)=c=const$, что несколько упрощает доказательство. Считая $\lambda>\lambda_1=\max(\lambda_0,c+1)$ получим

$$1)\ |A(t,\lambda)|\le\frac{4\max\limits_{t\in[0;1]}|f(t)|}{\lambda-c},\quad 2)\ |B(t,\lambda)|\le\frac{m_2\max\limits_{t\in[0;1]}|f(t)|}{\lambda-c},\quad 3)\ |C(t,\lambda)|\le\exp\left\{-\int_t^1\frac{|b|}{a(\tau)}d\tau\right\}\frac{m_3\max\limits_{[0;1]}|f(t)|}{\lambda-c}$$

при некоторых $m_2\ m_3>0$. Например, неравенство 1) может быть получено следующим образом:

$$|A(t,\lambda)|\le4\int_0^t\frac{\exp\left\{-\int_{t_1}^{t}\frac{\alpha(\tau,\lambda)-|b|}{2a(\tau)}d\tau\right\}}{\sqrt{\alpha(t,\lambda)\alpha(t_1,\lambda)}}dt_1\cdot\max_{t\in[0;1]}|f(t)|=4\max_{t\in[0;1]}|f(t)|\int_0^t\frac{\exp\left\{-\int_{t_1}^{t}\frac{2(\lambda-c)}{\alpha(\tau,\lambda)+|b|}d\tau\right\}}{\sqrt{\alpha(t,\lambda)\alpha(t_1,\lambda)}}dt_1=$$

$$=4\max_{t\in[0;1]}|f(t)|\left(\left.\frac{(\alpha(t_1,\lambda)+|b|)\exp\left\{-\int_{t_1}^{t}\frac{2(\lambda-c)}{\alpha(\tau,\lambda)+|b|}d\tau\right\}}{2(\lambda-c)\sqrt{\alpha(t,\lambda)\alpha(t_1,\lambda)}}\right|_{t_1=0}^{t_1=t}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2(\lambda-c)\sqrt{\alpha(t,\lambda)}}\int_0^t\left(\frac{(\alpha(t_1,\lambda)+|b|)}{\sqrt{\alpha(t_1,\lambda)}}\right)'\exp\left\{-\int_{t_1}^{t}\frac{2(\lambda-c)}{\alpha(\tau,\lambda)+|b|}d\tau\right\}dt_1\right)\le\frac{4\max\limits_{t\in[0;1]}|f(t)|}{\lambda-c},$$

так как при $t>0$ $a'(t)>0$ и $\left(\frac{(\alpha(t,\lambda)+|b|)}{\sqrt{\alpha(t,\lambda)}}\right)'\ge0$.

Объединяя неравенства 1) – 3) получим требуемую оценку резольвенты $(\lambda-c)\|u\|\le C^*\|f\|$.

Оценка производной решения проводится аналогично. Дифференцируя (42), получим

$$u'(t)=A'(t,\lambda)\Phi(t)+(B'(t,\lambda)+C'(t,\lambda))\Psi(t)+A(t,\lambda)\Phi'(t)+(B(t,\lambda)+C(t,\lambda))\Psi'(t)$$

и при $\lambda>\lambda_1$ и $b+a'(0)=-(|b|-a'(0))<0$ можно оценить каждую производную в отдельности.

Например, $\Phi'(t)=e^{-w(t)}\int_t^1h(t_1)e^{w(t_1)}\Phi(t_1)dt_1\ (-w(t))'=\frac{\alpha(t,\lambda)}{a(t)}\int_t^1h(t_1)e^{w(t_1)-w(t)}\Phi(t_1)dt_1$ и

$$|\Phi'(t)|\le4M_h\frac{\alpha(t,\lambda)}{a(t)}\int_t^1e^{w(t_1)-w(t)}dt_1\ =$$

$$= 4M_h \frac{\alpha(t,\lambda)}{a(t)} \left(\frac{a(t)}{\alpha(t,\lambda)} - \frac{a(1)}{\alpha(1,\lambda)} e^{-\int\limits_t^1 \frac{\alpha(\tau,\lambda)}{a(\tau)}d\tau} + \int\limits_t^1 e^{-\int\limits_t^{t_1} \frac{\alpha(\tau,\lambda)}{a(\tau)}d\tau} \frac{a'(t_1)\alpha^2(t_1,\lambda) - 2a(t_1)a'(t_1)(\lambda - c)}{\alpha^3(t_1,\lambda)} dt_1 \right) \le$$

$$\le 4M_h \left(1 + \frac{\alpha(t,\lambda)}{a(t)} \int\limits_t^1 e^{-\int\limits_t^{t_1} \frac{\alpha(\tau,\lambda)}{a(\tau)}d\tau} \frac{a'(t_1)}{\alpha(t_1,\lambda)} dt_1 \right) \le 4M_h \left(1 + \frac{1}{a(t)} \int\limits_t^1 a'(t_1) e^{-\int\limits_t^{t_1} \frac{\alpha(\tau,\lambda)}{a(\tau)}d\tau} dt_1 \right) \le$$

$$\le 4M_h \left(1 + \frac{1}{a(t)} \int\limits_t^1 a'(t_1) e^{-\int\limits_t^{t_1} \frac{|b|}{a(\tau)}d\tau} dt_1 \right) = 4M_h \left(1 + \frac{1}{a(1)} e^{-\int\limits_t^1 \frac{|b| - a'(\tau)}{a(\tau)}d\tau} \int\limits_t^1 a'(t_1) e^{\int\limits_{t_1}^1 \frac{|b|}{a(\tau)}d\tau} dt_1 \right) \le m_\Phi .$$

Аналогично, $|\Psi_t'(t,\lambda)| \le M_h$, $|A'(t,\lambda)| \le \dfrac{2}{|b|} \max\limits_{t\in[0;1]} |f(t)|$, $|B'(t,\lambda)| \le M_2 \max\limits_{t\in[0;1]} |f(t)|$,

$$|C'(t,\lambda)| \le \frac{M_3 \max\limits_{t\in[0;1]} |f(t)|}{(\lambda - c)^{1/2}}, \quad |u'(t)| \le M' \max_{t\in[0;1]} |f(t)|,\ M' > 0 .$$

Далее, так как $a(t)u''(t) = (-b - a'(t))u'(t) + (\lambda - c)u(t) - f(t)$, то

$$|a(t)u''(t)| \le |b + a'(t)| \cdot |u'(t)| + (\lambda - c)|u(t)| + |f(t)| \le M_a \cdot \max_{t\in[0;1]} |f(t)|, M_a > 0 .$$

Из этих оценок вытекает неравенство (43), что и завершает доказательство теоремы 2.

Замечание 4. Условие 2 выполнено при всех предположениях на коэффициенты, сформулированных в теореме 2 и достаточно больших значениях параметра λ. Аналогичное утверждение может быть сформулировано при $b_0 > 0$ и для задачи (38), (40).

Результаты теоремы 2 фактически показывают, что резольвента задачи (39), (40) при $b + a'(0) < 0$ является вполне непрерывным оператором с дискретным простым спектром и, следовательно, спектр оператора L краевой задачи (39), (40) состоит (см. соответствующие пояснения в [6], [8]) из простых действительных собственных значений $\{\lambda_k\}$ таких, что $\lambda_k \to -\infty$ при $k \to +\infty$. Асимптотическое распределение собственных значений будет рассмотрено во второй части статьи.

Работа подготовлена в рамках выполнения проекта № 9.101.2014/К государственного задания Орловскому государственному университету имени И.С. Тургенева.

Список литературы

1. Глушко В.П. Вырождающиеся линейные дифференциальные уравнения. II, III. Дифференц. Уравнения. (1968. №11 (4) : 1956–1966) (1969. №3(5): 443–455).

Glushko V.P. Degenerating Linear Differential Equations. II,III. Differential Equations. (1968. №11 (4) : 1956–1966) (1969. №3(5): 443–455).

2. Глушко В.П. 1972. Линейные вырождающиеся дифференциальные уравнения. Воронеж: Изд-во Воронежского ун-та.

Glushko V.P. 1972. Linear Degenerating Differential Equations, Voronezh.

3. Глушко В.П. 1970. Оценки в L_2 и разрешимость общих граничных задач для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка. Труды Московского математического общества, 23: 113–178.

Glushko V.P. 1970. Estimates and solvability of general boundary value problems for degenerate elliptic equations of second order. Proceedings of the Moscow Mathematical Society, 23 : 113–178.

4. Розов Н.Х., Сушко В.Г., Чудова Д.И. 1998. Дифференциальные уравнения с вырождающимся коэффициентом при старшей производной. Фундаментальная и прикладная математика, №3(4): 1063–1095.

Rosov N.Kh., Sushko V.G., Chudova D.I. 1998. Differential Equations with a Degenerate Coefficient Multiplying the Highest Derivative. Fundam. Prikl. Matem., № 3(4): 1063–1095.

5. Глушко В.П., Савченко Ю.Б. 1985. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка: пространства, операторы, граничные задачи. Итоги науки и техники. Сер. Мат. анал., 23: 125–218.

Glushko V.P., Savchenko Yu.B. 1985. Higher-order degenerate elliptic equations: Spaces, operators, boundary-value problems. Mathematical analysis. Itogi Nauki i Tekhniki. Moscow, 23: 125–218.

6. Архипов В.П. 2011. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с вырождающимся коэффициентом при старшей производной. Дифференц. уравнения, № 10 (47) : 1383–1393.

Arkhipov V.P. 2011. Linear Second-Order Differential Equations with Degenerating Coefficient of the Second Derivative. Differential Equations, № 10 (47): 1383–1393.

7. Архипов В.П., Глушак А.В. 2013. Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений второго порядка около точки вырождения. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика, №5 (148). Выпуск 30.

Arhipov V.P., Glushak A.V. 2013. Asymptotic Representations of Solutions the Second-Order Differential Equation near the Degenerating Point. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathem. Physics, №5(148). Iss. 30.

8. Архипов В.П., Соболев А.В. 1984. Осцилляционные свойства вырождающихся дифференциальных операторов второго порядка. ДАН СССР, №4(275): 777–779.

Arkhipov V.P., Sobolev A.V. 1984. Oscillation Properties of Degenerate Second-Order Differential Operators. Dokl. Akad. Nauk SSSR, №4(257): 777–779.