УДК 517.9

О МОДИФИЦИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ГЕЛЬДЕРА

THE MODIFIED HOLDER SPACES

Г.Н.Аверьянов, В.А. Полунин
G.N. Averianov, V.A. Polunin

Белгородский государственный национальный исследовательский университет
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85

Belgorod National Research University, 85 Pobedy St, Belgorod, 308015, Russia

E-mail: AvryanovGN@gmail.com, Polunin@bsu.edu.ru

Аннотация. В статье предложен новый подход копределению модифицированных пространств Гельдера, позволяющий легко описать и доказать некоторые важные свойства этих пространств. В частности на основе этих свойств доказанно, что если некоторая отличная от нуля функция принадлежит некому весовому пространству, то и непрерывная ветвь логарифма этой функции принадлежит тому же пространству.

Resume. This paper proposes a new approach to the definition of the modified holder spaces that makes it easy to describe and demonstrate some of the important properties of these spaces. In particular on the basis of these properties have proved that if a non-zero function belongs to the considered weighted space, then a continuous branch of the logarithm of this function belongs to the same space.

Ключевые слова: пространство Гельдера, банахово пространство
Key words: Holder space, Banach space

В работе [1] были введены весовые пространства Гельдера со специальным поведением в окрестности фиксированной точки. Пусть заданы компакт G на комплексной плоскости, точка $\tau \in G$ и $0 \le \lambda \le \mu \le 1$. Обозначим $C_0^{\mu}(G,\tau)$ класс всех функций $\varphi(t)$, $t \in G, t \ne \tau$, для которых конечна норма

$$|\varphi| = |\varphi|_0 + \{\varphi\}_\mu, \quad \{\varphi\}_\mu = \sup_{t_1,t_2} |t_1 - \tau|^\mu \frac{|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\mu},$$

где здесь и ниже $|\varphi|_0$ означает sup– норму. Этот класс является банаховым пространством относительно данной нормы, он берется за основу определения весовых пространств $C_\lambda^\mu(G,\tau)$ с произвольным весовым порядком $\lambda \in \mathrm{R}$. Именно, указанное пространство состоит из всех функций $\varphi(t) = |t-\tau|^\lambda \varphi_0(t)$, $\varphi_0 \in C_0^\mu$. При $0 < \lambda < 1$ пополнение этого пространства постоянными функциями обозначается $C_{(\lambda)}^\mu(G,\tau)$. Именно этот класс использовался в [1] при изучении задачи линейного сопряжения на кусочно- гладкой кривой при минимальных требованиях гладкости на кусочно- непрерывные коэффициенты.

В данной работе предлагается другой подход к определению пространства $C_{(\lambda)}^\mu(G,\tau)$, более удобный для описания их свойств. Именно, этот класс определим условием конечности полунормы

$$\{\varphi\}_{\mu,\lambda} = \sup_{t_1,t_2} |t_1 - \tau|^{\mu-\lambda} \frac{|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\mu}. \tag{1}$$

По отношению к постоянной $M = \{\varphi\}_{\mu,\lambda}$ это условие можем заменить, очевидно, оценкой

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \le M\,|t_1 - \tau|^{\lambda-\mu} |t_1 - t_2|^\mu, \tag{2}$$

справедливой для всех точек $t_1, t_2 \in G$, отличных от τ. Обратно, минимальная постоянная M в этой оценке дает полунорму (1). В крайних случаях $\lambda = 0$ и $\lambda = \mu$ полунорму (1) обозначаем, соответственно, $\{\varphi\}_\mu$ и $[\varphi]_\mu$. В первом случае скобки в обозначении пространства опускаем: $C^\mu_{(0)} = C^\mu_0$, а во втором случае $C^\mu_{(\mu)}(G,\tau)$ совпадает, очевидно, с пространством $C^\mu(G)$ функций, удовлетворяющих условию Гельдера с показателем μ.

Из (2) непосредственно следует, что

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \le 2^\mu M |t_1 - \tau|^\lambda \tag{3}$$

при $|t_2 - \tau| \le |t_1 - \tau|$. В частности, функция φ ограничена на множестве $G \setminus \{\tau\}$. т.е. ее sup–норма $|\varphi|_0$ конечна. Таким образом, в пространстве $C^\mu_{(\lambda)}(G,\tau)$ можно ввести норму

$$|\varphi| = |\varphi|_0 + \{\varphi\}_{\mu,\lambda} \tag{4}$$

относительно которой оно банахово.

С учетом критерия Коши оценка (3) также показывает, что при $\lambda > 0$ существует предел $\varphi(\tau) = \lim \varphi(t)$ в точке τ и, следовательно, функция φ непрерывна на всем множестве G.

Лемма 1. Функция φ принадлежит $C^\mu_{(\lambda)}$, $\lambda > 0$, тогда и только, когда

$$\varphi_0(t) = |t - \tau|^{-\lambda}[\varphi(t) - \varphi(\tau)] \in C^\mu_0(G,\tau).$$

При этом (4) эквивалентна норме $|\varphi| = |\varphi|_0 + \{\varphi_0\}_\mu$. Более точно, справедливы оценки

$$\{\varphi_0\}_\mu \le 3\{\varphi\}_{\mu,\lambda}, \quad \{\varphi\}_{\mu,\lambda} \le 3\{\varphi_0\}_\mu. \tag{5}$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать $\tau = 0$. Пусть $\varphi \in C^\mu_{(\lambda)}$, тогда полагая $t_2 = \tau = 0, t_1 = t$ в оценке (3), в принятых обозначениях получим

$$|\varphi_0(t)| \le 2\{\varphi\}_{\mu,\lambda}. \tag{6}$$

Запишем далее

$$|\varphi_0(t_1) - \varphi_0(t_2)| \le |\varphi(t_1) - \varphi(t_2)||t_1|^{-\lambda} + |\varphi(t_2) - \varphi(0)|||t_1|^{-\lambda} - |t_2|^{-\lambda}|.$$

С учетом (2) отсюда

$$|\varphi_0(t_1) - \varphi_0(t_2)| \le \{\varphi\}_{\mu,\lambda}[|t_1|^{-\mu}|t_1 - t_2|^\mu + A|\varphi_0(t_2)|]$$

с постоянной $A = |a^\lambda - 1|$, $a = |t_2|/|t_1|$. Поскольку

$$|a^\lambda - 1| \le |a^\mu - 1| \tag{7}$$

при $\lambda \le \mu$ для любого $a > 0$, отсюда

$$A \le |a^\mu - 1| = |t_1|^{-\mu}||t_1|^\mu - |t_2|^\mu| \le |t_1|^{-\mu}|t_1 - t_2|^\mu,$$

что совместно с (6) приводит к первой оценке (5).

Обратно, пусть $\varphi(t) = c + |t|^\lambda \varphi_0(t)$ с некоторой функцией $\varphi_0 \in C^\mu_0$. Тогда

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \le |\varphi_0(t_1) - \varphi_0(t_2)||t_1|^\lambda + |\varphi_0(t_2)|||t_1|^\lambda - |t_2|^\lambda| \le$$

$$\le \{\varphi_0\}_\mu |t_1|^{\lambda-\mu}|t_1 - t_2|^\mu + |\varphi_0(t_2)||t_1|^\lambda|a^\lambda - 1|,$$

где положено $a = |t_2|/|t_1|$. С учетом (6), (7) как и выше отсюда получается второе неравенство (5).

Из леммы непосредственно следует, что оба данные выше определения пространства $C^\mu_{(\lambda)}$ действительно эквивалентны. Отметим несколько полезных его свойств.

Лемма 2. (a) Имеют место вложения банаховых пространств

$$C^\nu_{(\lambda)} \subseteq C^\mu_{(\lambda)}, \mu \le \nu; \quad C^\mu_{(\lambda')} \subseteq C^\mu_{(\lambda)}, \lambda \le \lambda'.$$

(b) Если $\varphi \in C^\mu_{(\lambda)}(G,\tau), \lambda > 0$, и функция f удовлетворяет условию Липшица на некотором компакте, содержащем множество значений φ, то суперпозиция $f \circ \varphi$ принадлежит $C^\mu_{(\lambda)}(G,\tau)$.

(c) Пусть функция α удовлетворяет условию Липшица на некотором компакте G_1, причем $\alpha(G_1)\subseteq G$ и $\alpha(\tau_1)=\tau$. Кроме того, выполнена оценка

$$|\alpha(t)-\alpha(\tau_1)|\le c\,|t-\tau_1|,\quad t\in G_1, \tag{8}$$

с некоторой постоянной $c>0$. Тогда оператор $\varphi\to\varphi\circ\alpha$ ограничен $C^{\mu}_{(\lambda)}(G,\tau)\to C^{\mu}_{(\lambda)}(G_1,\tau_1)$.

Доказательство. (a) Без ограничения общности можно считать, что $|t_2-\tau|\le|t_1-\tau|$ и, следовательно, $|t_2-t_1|\le 2|t_1-\tau|$. Поэтому для $\varphi\in C^{\nu}_{(\lambda)}(G,\tau)$ в силу (2) имеем:

$$|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|\le M\,|t_1-\tau|^{\lambda-\mu}|t_1-t_2|^{\mu}\frac{|t_1-t_2|^{\nu-\mu}}{|t_1-\tau|^{\nu-\mu}}\le M2^{\nu-\mu}\,|t_1-\tau|^{\lambda-\mu}|t_1-t_2|^{\mu}.$$

Пусть далее $\varphi\in C^{\nu}_{(\lambda')}(G,\tau)$, тогда аналогичным образом из (2) выводим:

$$|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|\le M\,|t_1-\tau|^{\lambda'-\lambda}|t_1-\tau|^{\lambda-\mu}|t_1-t_2|^{\mu}\le MR^{\lambda'-\lambda}\,|t_1-\tau|^{\lambda-\mu}|t_1-t_2|^{\mu},$$

где R есть диаметр множества G.

(b) Так как f удовлетворяет условию Липшица, то:

$$|f[\varphi(t_1)]-f[\varphi(t_2)]|\le[f]_1\,|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|.$$

С учетом (2) отсюда

$$|f[\varphi(t_1)]-f[\varphi(t_2)]|\le M[f]_1\,|t_1-\tau|^{\lambda-\mu}|t_1-t_2|^{\mu},$$

так что $\{f\circ\varphi\}_{\mu,\lambda}\le[f]_1M$, $M=\{\varphi\}_{\mu,\lambda}$.

(c) Пусть $\varphi\in C^{\mu}_{(\lambda)}(G,\tau)$, тогда в силу (2):

$$|\varphi[\alpha(t_1)]-\varphi[\alpha(t_2)]|\le M\,|\alpha(t_1)-\alpha(\tau_1)|^{\lambda-\mu}|\alpha(t_1)-\alpha(t_2)|^{\mu},$$

тогда в силу (8) и так как α удовлетворяет условию Липшица имеем

$$|\varphi[\alpha(t_1)]-\varphi[\alpha(t_2)]|\le M[\alpha]_1^{\mu}c^{\lambda-\mu}\,|t_1-\tau_1|^{\lambda-\mu}|t_1-t_2|^{\mu},$$

а значит $\varphi\circ\alpha\in C^{\mu}_{(\lambda)}(G_1,\tau_1)$ и $\{\varphi\circ\alpha\}_{\mu,\lambda}\le[\alpha]_1^{\mu}c^{\lambda-\mu}\{\varphi\}_{\mu,\lambda}$. Последнее заавершает доказательство леммы.

Применим лемму 2(c) к случаю, когда роль G играет Γ гладкая дуга с концом τ, а γ – ее параметризация $\gamma:[0,1]\to\Gamma$, $\gamma(0)=\tau$. В этом случае функция φ принадлежит $C^{\mu}_{(\lambda)}(\Gamma,\tau)$, $\lambda>0$, тогда и только, когда $\varphi\circ\gamma\in C^{\mu}_{(\lambda)}([0,1],0)$.

Для доказательства достаточно заметить, что параметризация γ удовлетворяет условиям леммы 2(c). В самом деле, то, что функция γ удовлетворяет условию Липшица, очевидно. Кроме того, функция двух переменных

$$\frac{\gamma(t_1)-\gamma(t_2)}{t_1-t_2}=\int_0^1\gamma'[t_2+s(t_1-t_2)]ds,\quad t_1\ne t_2,$$

доопределенная значением $\gamma'(t)$ при $t_1=t_2=t$, непрерывна в квадрате $0\le t_1,t_2\le 1$ и нигде в нуль не обращается. Поэтому она ограничена снизу по модулю некоторой положительной постоянной c и, в частности, параметризация γ удовлетворяет условию (8). Из этих же соображений обратное отображение γ^{-1} также удовлетворяет условиям леммы 2(c).

В качестве приложения леммы 2 отметим также следующее предложение, приведенное в [1] без доказательства.

Лемма 3. Пусть функция G принадлежит $C^{\mu}_{(\lambda)}(\Gamma,\tau)$ на гладкой дуге Γ с концом τ, причём

$$G(t)\ne 0,\quad t\in\Gamma. \tag{9}$$

Тогда непрерывная ветвь логарифма $\ln G(t)$ также принадлежит $C^{\mu}_{(\lambda)}(\Gamma,\tau)$.

Доказательство. В силу (9) существует такая постоянная $c>0$, что $|G(t)|\ge 2c$ для всех $t\in\Gamma$. Поскольку функция G равномерно непрерывна, найдется такое $\delta>0$, что

$$|G(t_1)-G(t_2)|\le c \qquad при\, |t_1-t_2|<\delta. \tag{10}$$

Пусть Γ разбита на дуги $\Gamma_1,\Gamma_2,..,\Gamma_n$ так, чтобы диаметр каждой дуги Γ_j не превосходит δ. Пусть τ_j - конец дуги Γ_j, причем $\tau_1=\tau$. Тогда в силу (10) значения $G(t)$ при $t\in\Gamma_j$ лежат в круге B_j с центром $G(\tau_j)$ радиуса c. Расстояние от $w=0$ до B_j не меньше c, поэтому функция $f(w)=\ln w, w\in B_j$, удовлетворяет на B_j условию Липшица. На основании леммы 2(b) отсюда

$$\ln G(t)\in C^{\mu}_{(\lambda)}(\Gamma_1,\tau), \quad t\in\Gamma_1. \tag{11}$$

Поскольку

$$\ln G(t)\in C^{\mu}(\Gamma_j), \quad t\in\Gamma_j, 2\le j\le n,$$

совместно с (11) приходим к справедливости леммы.

Список литературы

1. Аверьянов Г.Н., Солдатов А.П. 2016. Асимптотика решений задачи линейного сопряжения в угловых точках кривой, Дифференц. уравнения, т. 52, 9 : 1150 – 1159.

Aver'yanov G.N., Soldatov A.P. Asymptotics of Solutions of the Linear Conjugation Problem at the Corner Points of the Curve, , Differential Equations, 2016, Vol. 52, No. 9, pp. 1–10.