УДК 37J05

КЛАССИФИКАЦИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ОБРАТИМЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

CLASSIFICATION OF ANALYTIC REVERSIBLE DYNAMIC SYSTEM

А.В. Субботин
A.V. Subbotin

Белгородский национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г.Белгород, ул. Победы, 85

Belgorod National Research University,
85 Pobedy St, Belgorod, 308015, Russia

E-mail: subbotin_a@bsu.edu.ru;

Аннотация. Приводятся определения локально- и глобально-обратимых систем, а также теоремы, описывающие их свойства, в том числе неподвижную точку и сигнатуру. Описывается метод определения свойства обратимости для аналитических динамических систем.

Resume. It is given the definitions of local and global reversible systems, and theorems that describe their properties, including a fixed point and signature. The method for determining the properties of reversibility for analytic dynamical systems is represented.

Ключевые слова: обратимые динамические системы, локальная обратимость, глобальная обратимость, неподвижная точка, сигнатура.

Key words: reversible dynamic system, local reversibility, global reversibility, fixed point, signature.

Введение

В процессе поиска подхода для решения принципиальных проблем механики и электродинамики сплошных сред было введено понятие об *обратимых динамических системах*, которые являются естественным обобщением гамильтоновых (лагранжевых) систем [1],[2]. Идея, которая лежит в основе определения обратимых динамических систем состоит в наличии у них обратимости во времени определяемых ими движений. Обратимость движений выражается в виде специального свойства у множества соответствующих им решений автономных систем дифференциальных уравнений.

Пусть задана конечномерная автономная система размерности $\mathbf{n}$ с фазовым пространством $\mathbf{R}^n$. Это означает, что имеется диффеоморфизм $\mathsf{F}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, посредством которого определяются вектор-функции $\mathbf{X(t)}, \mathbf{t} \in \mathbf{R}$ со значениями $\mathbf{X} = \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n \rangle \in \mathbf{R}^n$ в виде решений векторного дифференциального уравнения в $\mathbf{R}^n$,

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathsf{F}(\mathbf{X}). \tag{1}$$

Определение 1. Систему (1) назовем локально-обратимой, если существует диффеоморфизм V такой, что он переводит (1) в систему

$$\dot{Y} = -F(Y),\ Y = V(X), \tag{2}$$

При этом отображение V является инволюцией, то есть имеет место $V(V(X)) = X,\ X \in R^n$.

Частным случаем локально-обратимых систем являются гамильтоновы системы с гамильтонианами, зависящими четным образом от вектора импульсов. Данное выше определение означает, что перемена направления времени для обратимых систем эквивалентна некоторой замене ее координат.

Определение 2. Систему (1) назовем глобально-обратимой, если существует инволюция $U,\ U^2 = id$ такая, что для решений $X = X(t, X_0)$ системы с начальными данными X имеет место

$$X_0 = X(t, U(X(t))). \tag{3}$$

Таким образом, у глобально-обратимой системы, каждое ее движение можно обратить, проходя траекторию в обратном направлении, посредством подходящего преобразования координат в конечном состоянии в момент времени t. При этом, по прошествии времени t, система вернется в исходное состояние. Оказывается, что классы локально-обратимых и глобально-обратимых систем совпадают.

Теорема 1. Для того чтобы система (1) была глобально обратимой, необходимо и достаточно, чтобы она была обратимой локально.

Доказательство теоремы было нами представлено в работах [1], [2].

Таким образом, мы приходим к единому понятию обратимой системы, которая обладает свойствами, даваемыми обоими определениями. При этом каждому отображению F обратимой системы сопоставляется некоторая инволюция V. Из (2) следует, что в терминах инволюции V свойство обратимости формулируется как свойство отображения F:

$$W(X)F(X) = -F(V(X)),\ W(X) = \frac{\partial V}{\partial X}. \tag{4}$$

Свойство обратимости системы не зависит от выбора координатной системы, на основе которой описывается динамика, то есть всякая система, которая получается из (1) биекцией $S: R^n \to R^n$, также является обратимой в смысле данных определений 1 и 2.

Сигнатура инволюций пространства R^n

Классификация обратимых систем, естественным образом, основана на описании класса возможных связанных с каждой из них инволюций V. Общую классификацию инволюций удается дать для *аналитических* динамических систем, у которых отображение F в координатной записи представляется аналитическими функциями по каждой из координат. В этом случае естественно ограничиться классом аналитических инволюций $\mathbf{V}$. Для таких инволюций справедливы следующие утверждения.

Теорема 2. Если инволюция $\mathbf{V}$ аналитическая, то:

1) она имеет, по крайней мере, одну неподвижную точку $\mathbf{X}_* \in \mathbf{R}^n$;

2) в неподвижной точке матрица $\mathbf{W}(\mathbf{X}_*) = (\partial \mathbf{V}/\partial \mathbf{X})_{\mathbf{X}_*}$ обладает свойством $\mathbf{W}^2(\mathbf{X}_*) = \mathbf{1}$, и поэтому она имеет полный набор собственных векторов и все ее собственные числа равны ±1;

3) число $\mathbf{m}$ собственных чисел, равных -1 не зависит от выбора неподвижной точки $\mathbf{X}_*$.

Доказательства утверждений можно найти в работе [2].

Таким образом, число $\mathbf{m}$, которое мы называем *сигнатурой*, является характеристикой инволюции $\mathbf{V}$.

Теорема 3. Класс аналитических инволюций $\mathbf{V}$ с сигнатурой, равной m, описывается формулой $\mathbf{V}(\mathbf{X}) = \mathbf{W}\mathbf{X} + \mathbf{A}$, где $\mathbf{A}$ - постоянный вектор, матрица $\mathbf{W}$ не зависит от $\mathbf{X}$, обладает свойством $\mathbf{W}^2 = \mathbf{1}$, $\mathbf{W}\mathbf{A} = -\mathbf{A}$ и имеет ровно m собственных чисел, равных (-1).

3. Классификация аналитических невырожденных обратимых систем. Следствием теорем 1 и 2 является то, что необходимое и достаточное условие для обратимости системы (1) с отображением $\mathbf{F}$ записывается в виде следующего уравнения

$$\mathbf{W}\mathbf{F}(\mathbf{X}) = -\mathbf{F}(\mathbf{W}\mathbf{X} + \mathbf{A}), \tag{5}$$

которому должно удовлетворять это отображение. Следовательно, решение проблемы распознавания обратимости для аналитической динамической системы состоит в отыскании матрицы $\mathbf{W}$ и вектора $\mathbf{A}$. Например, полагая $\mathbf{X} = 0$, получаем уравнение $\mathbf{W}\mathbf{F}(0) = -\mathbf{F}(\mathbf{A})$, которое посредством отображения $\mathbf{F}^{-1}$ преобразуется в выражение для вектора $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = -\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{W}\mathbf{F}(0)). \tag{6}$$

Если, кроме того, определена неподвижная точка $\mathbf{X}_*$, то матрица $\mathbf{W}$ подчинена дополнительному условию $\mathbf{X}_* = \mathbf{W}\mathbf{X}_* + \mathbf{A}$, связывающему ее с известным вектором $\mathbf{A}$.

Введем матрицу $\mathbf{G}(\mathbf{X})$:

$$\mathbf{G}(\mathbf{X}) = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}}.$$

Тогда при разложении уравнения (5) по степеням $(\mathbf{X} - \mathbf{X}_*)$ в первом неисчезающем приближении получаем

$$\mathbf{W}\mathbf{G}(\mathbf{X}_*) + \mathbf{G}(\mathbf{X}_*)\mathbf{W} = 0. \tag{7}$$

Оно получается на основе разложений

$$\mathbf{F}(\mathbf{WX}+\mathbf{A}) = \mathbf{G}(\mathbf{WX}_* + \mathbf{A})\mathbf{W}(\mathbf{X}-\mathbf{X}_*) + \ldots,\ \mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{W}\mathbf{G}(\mathbf{X}_*)(\mathbf{X}-\mathbf{X}_*) + \ldots$$

Уравнение (7) позволяет говорить, что сигнатура матрицы $\mathbf{W}$ должна равняться $\mathbf{n}/2$. Во-первых, из этого уравнения следует, что $\det(\mathbf{W}\mathbf{G}(\mathbf{X}_*)) = (-1)^{\mathbf{n}} \det(\mathbf{G}(\mathbf{X}_*)\mathbf{W})$, и поэтому $\mathbf{n}$ – четное. Во-вторых, $\mathrm{Sp}(\mathbf{W}\mathbf{G}(\mathbf{X}_*)) = -\mathrm{Sp}(\mathbf{G}(\mathbf{X}_*)\mathbf{W})$, а это означает, что $\mathrm{Sp}(\mathbf{W}\mathbf{G}(\mathbf{X}_*)) = 0)$.

Тот факт, что сигнатура равна $\mathbf{n}/2$, следует из следующих рассуждений. Пусть $\{\lambda_{\mathrm{j}}\}$ - спектр матрицы $\mathbf{G}(\mathbf{X}_*)$, которая является матрицей скалярного типа, если система находится в общем положении (не обладает дополнительными симметриями) в пространстве всех обратимых систем с фиксированной размерностью. Тогда $\{\mathbf{e}_{\mathrm{j}}\}$ - соответствующие собственные векторы. Из уравнения (7) получаем

$$\lambda_{\mathrm{j}}\mathbf{We}_{\mathrm{j}} + \mathbf{G}(\mathbf{X}_*)\mathbf{We}_{\mathrm{j}} = 0.$$

Следовательно, образ $\mathbf{We}_{\mathrm{j}}$ является собственным вектором с собственным значением $(-\lambda_{\mathrm{j}})$. Тогда спектр $\{\lambda_{\mathrm{j}}\}$ симметричен.

Более того, так как $\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{X}_*)$ существует, то спектральное разложение симметрично, ввиду того, что имеется взаимнооднозначное соответствие между множествами $\{\mathbf{e}_{\mathrm{j}}\}$ и $\{\mathbf{G}(\mathbf{X}_*)\mathbf{e}_{\mathrm{j}}\}$. При этом матрица $\mathbf{W}$ определяется однозначно, если спектр матрицы $\mathbf{G}(\mathbf{X}_*)$ невырожденный, так как она отображает каждый собственный вектор $\mathbf{e}_{\mathrm{j}}$ на собственный вектор $\mathbf{e}_{\mathrm{j}'}$ с собственным значением $(-\lambda_{\mathrm{j}})$.

Далее, после нахождения матрицы $\mathbf{W}$ и вектора $\mathbf{A}$, проверка наличия обратимости у заданной системы производится посредством разложения по степеням $(\mathbf{X}-\mathbf{X}_*)$ уравнения (5). Тогда в каждом порядке разложения получаем уравнения, которым обязаны удовлетворять коэффициенты. Если $\mathbf{F}$ полиномиальное, то такая проверка обрывается на каком-то шаге вычислений и, на этом пути, можно получить окончательный ответ на вопрос: является ли заданная система обратимой.

Теоремы 1-3 позволяют утверждать, что каждая обратимая система приводится некоторой биекцией пространства $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ к *каноническому виду* - к таким координатам $\mathbf{X} \equiv \langle \mathbf{P}, \mathbf{Q} \rangle$, в которых матрица $\mathbf{W}$ диагональна. В этом случае динамическая система представляется в виде

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{A}(\mathbf{P},\mathbf{Q}) \quad \dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{B}(\mathbf{P},\mathbf{Q}), \tag{8}$$

где размерность векторов $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ равна соответственно $\mathbf{m}$ и $(\mathbf{n}-\mathbf{m})$ и отображения A и B обладают свойствами $\mathsf{A}(-\mathbf{P},\mathbf{Q})=\mathsf{A}(\mathbf{P},\mathbf{Q})$, $\mathsf{B}(-\mathbf{P},\mathbf{Q})=-\mathsf{B}(\mathbf{P},\mathbf{Q})$. При этом $\mathbf{n}\geq\mathbf{m}\geq 1$.

Заметим, что гамильтоновы системы механики, которые имеют четную размерность $\mathbf{n}$ и определяются гамильтонианом $\mathsf{H}(\mathbf{P},\mathbf{Q})$:

$$\dot{\mathbf{P}}=-\frac{\partial\mathsf{H}}{\partial\mathbf{Q}},\quad \dot{\mathbf{Q}}=\frac{\partial\mathsf{H}}{\partial\mathbf{P}},$$

где $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ - векторы размерности $\mathbf{n}$. Если гамильтониан является четной функцией относительно $\mathbf{P}$, то они являются обратимыми. В указанном выше каноническом виде гамильтоновы системы имеют диагональную матрицу $\mathbf{W}$ с сигнатурой, равной $\mathbf{n}/2$.

Список литературы

1. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. 2015. О понятии обратимости динамических систем. Научные ведомости Белгородского государственного университета. серия: Математика.Физика, 5(202), 38: 138-147.

Virchenko Yu.P., Subbotin A.V. 2015. Concept of dynamic systems reversibility. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics, 5(202), 38: 138- 147.

2. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. 2015. Обратимые в широком смысле динамические системы. Научные ведомости Белгородского государственного университета. серия: Математика. Физика, 11(208), 39: 89-96.

Virchenko Yu.P., Subbotin A.V. 2015. Reversible systems in wide sense. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics, 11(208), 39: 89-96.