УДК 517.956

МНОГОМЕРНАЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СИНГУЛЯРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

MULTIDIMENSIONAL DIRICHLET'S PROBLEM FOR ONE CLASS SINGULAR HYPERBOLIC EQUALIZATIONS

С.А. Алдашев
S.A. Aldashev

Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Казахстан.
Kazakh National Pedagogical University named after Abai, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: Aldash51@mail.ru

Аннотация. На плоскости было показано, что одна из фундаментальных задач математической физики - изучение колеблющейся струны некорректна, когда краевые условия заданы на всей границе области. Как показано далее, задачи Дирихле некорректна не только для волнового уравнения, но и для общих гиперболических уравнений.

В работах автора изучена задача Дирихле для линейных многомерных гиперболических уравнений, где показаны корректность этой задачи, существенно зависящая от высоты рассматриваемой цилиндрической области.

В данной статье для одного класса сингулярных гиперболических уравнений доказано разрешимость и получен явный вид многомерной задачи Дирихле.

Resume. It has been shown in a plane that one of fundamental problems of Math Physics, i.e. studying the behavior of a hesitating string, is not correct when boundary conditions are given on the whole boundary of the domain. As it is shown below, Dirichlet problem is incorrect not just for a wave equation but for general hyperbolic equations.

In works of author the Dirichlet's problem is studied for linear multidimensional hyperbolic equalizations, where shown correctness of this task, substantially depending on the height of the examined cylindrical area.

In this article for one class of singular hyperbolic equalizations solvability is well-proven and the obvious type of the multidimensional Dirichlet's problem is got.

Ключевые слова: многомерная задача Дирихле, сингулярные гиперболические уравнения, разрешимость, система уравнений.

Key words: multidimensional Dirichlet's problem, singular hyperbolic equalizations, solvability, system of equalizations.

1. Постановка задачи и результат

Пусть D_ε - конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1,\ldots,x_m,t)$ в полупространстве $t>0$, ограниченная конической поверхностью $T_\varepsilon: t=\varphi(r)$, $\varphi(\varepsilon)=\varphi(1)=0$, $\varphi(r)\in C^3((\varepsilon,1))\bigcap C^1([\varepsilon,1])$, $|\varphi'(r)|<1$ и гиперплоскостью $t=0$, где $r=|x|$ - длина вектора $x=(x_1,\ldots,x_m)$, $m\geq 2$, $0<\varepsilon<1$.

Пусть далее S_ε - множество $\{t=0,\ \varepsilon<r<1\}$ точек из E_m.

В области D_ε рассмотрим многомерное сингулярное гиперболическое уравнение

$$Lu\equiv\Delta_x u-u_{tt}+\sum_{i=1}^m a_i(x,t)u_{x_i}+b(x,t)u_t-\frac{\alpha}{t}u_t+c(x,t)u=0, \qquad (1)$$

где Δ_x - оператор Лапласа по переменным $x_1,\ldots,x_m$, а α - действительное число.

Через u_α обозначим решение уравнения (1) при данном α.

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения (1).

Задача D. Найти в области D_ε решение уравнения (1) , удовлетворяющее краевым условиям

$$u_\alpha\Big|_{S_\varepsilon} = \tau(x),\ u_\alpha\Big|_{T_\varepsilon} = \psi(x) \text{ при } \alpha < 1, \qquad (2)$$

$$\frac{u_\alpha}{\ln t}\Big|_{S_\varepsilon} = \tau(x),\ u_\alpha\Big|_{T_\varepsilon} = \psi(x) \text{ при } \alpha = 1, \qquad (3)$$

$$t^{\alpha-1}u_\alpha\Big|_{S_\varepsilon} = \tau(x),\ u_\alpha\Big|_{T_\varepsilon} = \psi(x) \text{ при } \alpha > 1. \qquad (4)$$

Отметим, что эта задача при $\alpha = 0$ изучена в [1-3] .

В дальнейшем нам понадобится связь декартовых координат $x_1,\dots,x_m$ со сферическими $r,\theta_1,\dots,\theta_{m-1},\ t,\ 0 \le \theta_1 < 2\pi, 0 \le \theta_i \le \pi, i = 2,\dots,m-1$.

Пусть $\left\{Y_{n,m}^k(\theta)\right\}$- система линейно независимых сферических функций порядка $n, 1 \le k \le k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2), \theta = (\theta_1,\dots,\theta_{m-1}), W_2^l(S_\varepsilon), l = 0,1,\dots$ - пространства Соболева.

Лемма 1 ([4.c.147]). Пусть $f(r,\theta) \in W_2^l(S_\varepsilon)$. Если $l \ge m-1$, то ряд

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \qquad (5)$$

сходится абсолютно и равномерно.

Лемма 2 [4.c.150]. Для того, чтобы $f(r,\theta) \in W_2^l(S_\varepsilon)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда (5) удовлетворяли неравенствам

$$\left|f_0^1(r)\right| \le C_1,\ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} n^{2l}\left|f_n^k(r)\right|^2 \le C_2,\quad C_1, C_2 = const.$$

Через $\tau_n^k(r)$, $\psi_n^k(r)$, $\tilde{a}_{in}^k(r,t)$, $a_{in}^k(r,t)$, $b_n^k(r,t)$, $c_n^k(r,t)$, ρ_n^k обозначим коэффициенты разложения ряда (5) соответственно функций $\tau(r,\theta)$, $\psi(r,\theta)$, $a_i(r,\theta,t)\rho(\theta)$, $a_i p_i(\theta)\rho$, $p_i = \frac{x_i}{r}$, $b(r,\theta,t)\rho$, $c(r,\theta,t)\rho$, $\rho(\theta)$, $i = 1,\dots,m$.

Введем множество функций

$$M_s^l(S_\varepsilon) = \left\{ f(r,\theta) : f \in W_2^l(S_\varepsilon), \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left(\left\|f_n^k(r)\right\|^2_{C^s([\varepsilon,1])} + \left\|f_n^k(r)\right\|^2_{C^{s+2}((\varepsilon,1))}\right)\cdot\left(\exp 2n^2\right)n^{2l} < \infty,\right.$$
$$\left. l > \frac{3m}{2}, s = 0,1,\dots \right\}.$$

Через H_ε обозначим проекцию области D_ε на плоскость (r,t).

Пусть $p \ge 0$ - наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенствам $\alpha + 2p \ge m-1$, если $\alpha \le 0$ и $2 - \alpha + 2p \ge m-1$, если $\alpha \ge 2$; $q \ge 0$ - наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенствам $2 - \alpha + 2q \ge m-1$, если $0 < \alpha \le 1$ и $\alpha + 2q \ge m-1$, если $1 \le \alpha < 2$; а также s, такое, что $s = \left[-\frac{\alpha}{2}\right]$ если $\alpha \le 0$ и $s = \left[\frac{\alpha}{2} - 1\right]$, если $\alpha \ge 2$, где $[\alpha]$ -целая часть числа α .

Если $a_i(r,\theta,t), b(r,\theta,t), c(r,\theta,t) \in W_2^l(D_\varepsilon)$, $i = 1,2,\dots,m$, $l \ge m-1$, то имеет место

Теорема. Пусть $\tau(r,\theta) \in M_\beta^l(S_\varepsilon)$, $\psi(r,\theta) \in M_{s+1}^l(S_\varepsilon)$, при $\alpha \le 0$ и $\alpha \ge 2$; $\tau(r,\theta)$, $\psi(r,\theta) \in M_{q+1}^l(S_\varepsilon)$ при $0 < \alpha \le 1$ и $1 \le \alpha < 2$, $\beta = \max\{s+1, p\}$. Тогда задача D имеет решение в классе $W_2^l(D_\varepsilon) \cap C^2(D_\varepsilon)$, при $\alpha < 1$ и $W_2^l(D_\varepsilon) \cap C^2(D_\varepsilon) \cap (\overline{D}_\varepsilon \setminus S_\varepsilon)$ при $\alpha \ge 1$, $l \ge$ m-1.

2. Доказательство теоремы

В сферических координатах $r,\theta_1,...,\theta_{m-1},t$ уравнение (1) имеет вид

$$Lu \equiv u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}\delta u - u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(r,\theta,t)u_{x_i} + b(r,\theta,t)u_t - \frac{\alpha}{t}u_t + c(r,\theta,t)u = 0, \tag{6}$$

где $\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{g_j \sin^{m-j-1}\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}(\sin^{m-j-1}\theta_j \frac{\partial}{\partial\theta_j})$, $g_1 = 1$, $g_j = (\sin\theta_1 ... \sin\theta_{j-1})^2$, $j > 1$.

При этом известно ([4]), что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-2)$, $n = 0,1,...$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных чисел $Y_{n,m}^k(\theta)$, $k = \overline{1,k_n}$.

Так как $u_\alpha \in W_2^l(D_\varepsilon)$, $l \geq m-1$, то в силу леммы 1 она разложима в ряд

$$u_\alpha(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} u_{\alpha,n}^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta). \tag{7}$$

Подставим (7) и (6). Затем полученное выражение умножим на $\rho(\theta) \neq 0$ и проинтегрируем по единичной сфере Γ из E_m. Тогда для $u_{\alpha,n}^k$ получим ряд

$$\begin{gathered}\rho_0^1 u_{\alpha,orr}^1 - \rho_0^1 u_{\alpha,ott}^1 + \left(\frac{m-1}{r}\rho_0^1 + \sum_{i=1}^{m} a_{io}^1\right) + u_{\alpha,or}^1 + b_0^1 u_{\alpha,ot}^1 - \frac{\alpha\rho_0^1}{t}u_{\alpha.ot}^1 + c_0^1 u_{\alpha,0}^1 + \\ + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\rho_n^k u_{\alpha,nrr}^k - \rho_n^k u_{\alpha,ntt}^k + \left(\frac{m-1}{r}\rho_n^k + \sum_{i=1}^{m} a_{in}^k\right)u_{\alpha,nr}^k + b_n^k u_{\alpha,nt}^k - \rho_n^k \frac{\alpha}{t}u_{\alpha,nt}^k + \right. \\ \left. + \left[c_n^k - \lambda_n \frac{\rho_n^k}{r^2}\sum_{i=1}^{m}\left(\tilde{a}_{in-1}^k - n a_{in}^k\right)\right]u_{\alpha,n}^k\right\} = 0.\end{gathered} \tag{8}$$

Здесь мы использовали тот факт, что ([4])

$Y_{o,m}^1(\theta) = const$, $\frac{\partial}{\partial x_i}Y_{n,m}^k(\theta) = \left.\frac{\partial Q_n^k}{\partial x_i}\right|_{r=1} - np_i Y_{n,m}^k(\theta)$, $Q_n^k(x) = r^n Y_{n,m}^k(\theta)$ — гармоническая функция от x, причем $\left.\frac{\partial Q_n^k}{\partial x_i}\right|_{r=1}$ есть m - мерная сферическая функция $Y_{n-1,m}^k(\theta)$ порядка $n-1$.

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\rho_0^1 u_{\alpha,orr}^1 - \rho_0^1 u_{\alpha,ott}^1 + \frac{m-1}{r}\rho_0^1 u_{\alpha,or}^1 - \frac{\alpha}{t}\rho_0^1 u_{\alpha,ot}^1 = 0, \tag{9}$$

$$\begin{gathered}\rho_1^k u_{\alpha,1rr}^k - \rho_1^k u_{\alpha,1tt}^1 + \frac{m-1}{r}\rho_1^k u_{\alpha,1r}^k - \frac{\alpha}{t}\rho_1^k u_{\alpha,1t}^k + \frac{\lambda_1}{r^2}\rho_1^k u_{\alpha,1}^k = \\ = -\frac{1}{k_1}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{io}^1 u_{\alpha,or}^1 + b_o^1 u_{\alpha,ot}^1 + c_o^1 u_{\alpha,o}^1\right), n = 1, k = \overline{1,k_n},\end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{gathered}\rho_n^k u_{\alpha,nrr}^k - \rho_n^k u_{\alpha,ntt}^k + \frac{m-1}{r}\rho_n^k u_{\alpha,nr}^k - \frac{\alpha}{t}\rho_n^k u_{\alpha,nt}^k + \frac{\lambda_n}{r^2}\rho_n^k u_{\alpha,n}^k = -\frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{k_{n-1}}\left\{\sum_{i=1}^{m} a_{in-1}^k u_{\alpha,n-1r}^k + b_{n-1}^k u_{\alpha,n-1t}^k + \right. \\ \left. + \left[c_{n-1}^k + \sum_{i=1}^{m}\left(\tilde{a}_{in-2}^k - (n-1)a_{in-1}^k\right)\right]u_{\alpha,n-1}^k\right\}, k = \overline{1,k_n}, n = 2,3,... \ .\end{gathered} \tag{11}$$

Нетрудно показать, что если $\{u_{\alpha,n}^k\}$, $k = \overline{1,k_n}$, $n = 0,1,2,...$ —решение системы (9)—(11), то оно является и решением уравнения (8).

Далее из краевых условий (2)-(4) для функций $u_{\alpha,n}^k(r,t)$ с учетом леммы 1 будем иметь

$$u_{\alpha,o}^{1}(r,o)=\tau_{o}^{1}(r),\ u_{\alpha,o}^{1}(r,\varphi(r))=\psi_{o}^{1}(r),\ \alpha<1, \tag{12}$$

$$u_{\alpha,n}^{k}(r,o)=\tau_{n}^{k}(r), u_{\alpha,n}^{k}(r,\varphi(r))=\psi_{n}^{k}(r), k=\overline{1,k_n}, n=1,2,\ldots,\ \alpha<1, \tag{13}$$

$$\left.\frac{u_{\alpha,n}^{k}}{\ln t}\right|_{t=0}=\tau_{n}^{k}(r), u_{\alpha,n}^{k}(r,\varphi(r))=\psi_{n}^{k}(r), k=\overline{1,k_n}, n=0,1,2,\ldots,\ \alpha=1, \tag{14}$$

$$\left.t^{\alpha-1}u_{\alpha,n}^{k}\right|_{t=0}=\tau_{n}^{k}(r), u_{\alpha,n}^{k}(r,\varphi(r))=\psi_{n}^{k}(r), k=\overline{1,k_n}, n=0,1,2,\ldots,\ \alpha>1. \tag{15}$$

Таким образом, задача D сведена к системе задач Дирихле в области H_ε для уравнений (9)-(11).
Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (9)-(11) можно представить в виде

$$L_\alpha u_{\alpha,n}^{k}\equiv u_{\alpha,nrr}^{k}-u_{\alpha,ntt}^{k}+\frac{m-1}{r}u_{\alpha,nr}^{k}-\frac{\alpha}{t}u_{\alpha,nt}^{k}+\frac{\lambda_n}{r^2}u_{\alpha,n}^{k}=f_{\alpha.n}^{k}(r,t),\ k=\overline{1,k_n}, n=0,1,\ldots, \tag{16}$$

где $f_{\alpha.n}^{k}(r,t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $f_{\alpha,0}^{1}(r,t)\equiv 0$.

Теперь приведем некоторые свойства оператора L_α, которые необходимы для исследования задачи Дирихле.

1. Если u_α - решение уравнения $L_\alpha u_\alpha=0$, то функция

$$u_{2-\alpha}=t^{\alpha-1}u_\alpha \tag{17}$$

является решением уравнения $L_{2-\alpha}u=0$.

2. Оператор L_α - обладает свойством

$$L_\alpha u_\alpha=t^{1-\alpha}L_{2-\alpha}\left(t^{\alpha-1}u_\alpha\right). \tag{18}$$

Указанные свойства устанавливаются аналогично тому, как они были доказаны для уравнения Эйлера-Дарбу-Пуассона ([5])

$$\Delta_x u-u_{tt}-\frac{\alpha}{t}u_t=0. \tag{19}$$

Наряду с уравнением (16) рассмотрим уравнение

$$L_0 u_{0,n}^{k}\equiv u_{0,nrr}^{k}-u_{0,ntt}^{k}+\frac{m-1}{r}u_{0,nr}^{k}+\frac{\lambda_n}{r^2}u_{0,n}^{k}=f_{0,n}^{k}(r,t),\ k=\overline{1,k_n}, n=0,1,\ldots \tag{20}$$

Имеет место следующая функциональная связь между решениями задачи Коши для уравнений (16) и (20).

Утверждение 1. Если $u_{0,n}^{2,k}(r,t)$,-решение задачи Коши для уравнения (20), удовлетворяющее условию $u_{0,n}^{2,k}(r,0)=0$, $\frac{\partial}{\partial t}u_{0,n}^{2,k}(r,0)=g(r)$, то функция

$$u_{\alpha,n}^{2,k}(r,t)=\gamma_{-\alpha}t^{-\alpha}\int_0^1 u_{0,n}^{2,k}(r,\xi t)\xi\left(1-\xi^2\right)^{-\frac{\alpha}{2}-1}d\xi\equiv\gamma_{-\alpha}\Gamma(-\frac{\alpha}{2})D_{ot^2}^{\frac{\alpha}{2}}u_{0,n}^{2,k}(r,t) \tag{21}$$

при $\alpha<0$ будет решением уравнение (16), удовлетворяющее условию

$$u_{\alpha,n}^{2,k}(r,0)=0,\ \lim_{t\to 0}t^{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}u_{\alpha,n}^{2,k}=g(r). \tag{22}$$

Если же $0<\alpha<1$, то функция

$$u_{\alpha,n}^{2,k}(r,t)=\gamma_{2-k+2q}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{q}\left[t^{1-\alpha+2q}\int_0^1 u_{0,n}^{1,k}(r,\xi t)\xi\left(1-\xi^2\right)^{q-\frac{\alpha}{2}}d\xi\right]\equiv$$
$$\gamma_{2-\alpha+2q}2^{q-1}\Gamma(q-\frac{\alpha}{2}+1)D_{ot^2}^{\frac{\alpha}{2}-1}\left(\frac{u_{0,n}^{1,k}(r,t)}{t}\right) \tag{23}$$

является решением уравнение (16) с начальными данными (22), где $\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\gamma_\alpha = 2\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$, $\Gamma(z)$-Гамма-функция, D_{ot}^{α}-оператор Римана – Лиувилля, а $u_{0,n}^{1,k}(r,t)$- решение уравнения (20) с начальным условием

$$u_{0,n}^{1,k}(r,0)=\frac{g(r)}{(1-\alpha)(3-\alpha)...(2q+1-\alpha)},\ \frac{\partial}{\partial t}u_{0,n}^{1,k}(r,0)=0.$$

При этом функции $f_{\alpha,n}^{k}(r,t)$ и $f_{0,n}^{k}(r,t)$ связаны по формуле (21), при $\alpha<0$, и по формуле (23) при $0<\alpha<1$.

Справедливость утверждения устанавливается аналогичным образом, как это доказано для уравнений (19) и многомерного волнового уравнения в [6,7].

Теперь переходим к решению задачи Дирихле для уравнения (16).

1) Случай $\alpha<1$. Сначала решим задачу (9), (12). Ее решение будем искать в виде $u_{\alpha,0}^{1}=u_{\alpha,0}^{1,1}+u_{\alpha,0}^{2,1}$, где $u_{\alpha,0}^{1,1}(r,t)$- решение задачи Коши для уравнения (9) с данными

$$u_{\alpha,0}^{1,1}(r,0)=\tau_0^1(r),\ \frac{\partial}{\partial t}u_{\alpha,0}^{1,1}(r,0)=0, \tag{24}$$

а $u_{\alpha,0}^{2,1}(r,t)$- решение задачи Дирихле для уравнения (9) с условием

$$u_{\alpha,0}^{2,1}(r,t)=0,\ u_{\alpha,0}^{2,1}(r,\varphi(r))=\psi_0^1(r)-u_{\alpha,0}^{1,1}(r,\varphi(r)),\ \varepsilon<r<1. \tag{25}$$

Пусть $\mathrm{u}_{\alpha,1}(x,t)$- решение задачи Коши для (19) с данными

$$\mathrm{u}_{\alpha,1}(x,0)=\tau(x),\ \frac{\partial}{\partial t}u_{\alpha,1}(x,0)=0.$$

Тогда и силу леммы 1 и $u\in W_2^l(D_\varepsilon)$, $l\geq m-1$ нетрудно найти решение задачи (19), (24) $u_{\alpha,0}^{1,1}(r,t)$ в виде (7).

Учитывая формулы (21), (23) а также обратимость оператора D_{ot}^{α} ([5]) задача (19),(25) сводится к задаче Дирихле для уравнения $L_0u_{0,0}^{2,1}=0$ с условием $u_{0.0}^{2,1}(r,0)=0,\ u_{0,0}^{2,1}(r,\varphi(r))=\overline{\psi}_0^{\,1}(r)$. Она однозначно разрешима в классе $C(\overline{H}_\varepsilon)\cap C(H_\varepsilon)$ ([3]).

Далее, решив задачу (10), (13) $(n=1)$, а затем (11), (13) $n=2,3,...$, найдем все $u_{\alpha,n}^{k}(r,t)=0$, $k=\overline{1,k_n}$, $n=0,1,...$.

2) Случай $\alpha=1$. Сначала решим задачу (9), (14), при $n=0$, $k=1$ и ее решение будем искать в виде $u_{1,0}^{1}=u_{1,0}^{1,1}+u_{1,0}^{2,1}$, где $u_{1,0}^{2,1}(r,t)$- решение уравнения (9) с данными $\lim\limits_{t\to 0}\frac{u_{1,0}^{2,1}}{\ln t}=\tau_{1,0}^{1}(r)$, а $u_{1,0}^{1,1}(r,t)$- решение краевой задачи для (9) с условием

$$\frac{\partial}{\partial t}u_{1,0}^{1,1}(r,0)=0,\ u_{1,0}^{1,1}(r,\varphi(r))=\psi_0^1(r)-u_{1,0}^{2,1}(r,\varphi(r)),\ \varepsilon<r<1. \tag{26}$$

Пусть $\mathrm{u}_{1,2}(x,t)$- решение уравнения (19) с данными $\lim\limits_{t\to 0}\frac{u_{1,2}}{\ln t}=\tau(x)$ из [8]. Тогда в силу леммы 1 и $u_\alpha\in W_2^l(D_\varepsilon)$, $l\geq m-1$, нетрудно найти $u_{1.0}^{2,1}(r,t)$ в виде (7).

Аналогично случаю $\alpha<1$ задача (9), (26) сводится к краевой задаче для уравнения $L_0u_{0,0}^{1,1}=0$ с данными $\frac{\partial}{\partial t}u_{0,0}^{1,1}(r.0)=0$, $u_{0,0}^{1,1}(r,\varphi(r))=\overline{\psi}_0^{\,1}(r)$, которая в свою очередь решается единственным образом, как и задача (7), (8) в [2].

Аналогично решаются задачи (10), (14) $(n=1)$ и (11), (14) $(n=2,3,\ldots)$. Следовательно, найдены все $u_{1,n}^{k}(r,t)$, $k=\overline{1,k_n}$, $n=0,1,\ldots$.

В силу свойства (18) оператора L_α, а также с учетом формулы (17) задача (16), (15) сводится к исследованному случаю $\alpha<1$.

Таким образом, показано, что

$$\int_{\Gamma}\rho(\theta)Lud\Gamma=0. \qquad (27)$$

Пусть $f(\mathrm{r},\theta,\mathrm{t})=R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r)$-плотна в $L_2(t+\varepsilon,1-t)$, $\rho(\theta)\in C^{\infty}(\Gamma)$- плотна в $L_2(\Gamma)$, а $\mathrm{T(t)}$- плотна в $L_2(0,(1-\varepsilon)/2)$. Тогда $f(\tau,\theta,t)$-плотна в $L_2(D_\varepsilon)$.

Отсюда и из (27) следует, что

$$\int_{D_\varepsilon} f(r,\theta,t)LudD_\varepsilon=0 \text{ и } Lu=0,\ \forall(r,\theta,t)\in D_\varepsilon.$$

Учитывая лемму 2, ограничения на заданные функции $\tau(r,\theta)$, $\psi(r,\theta)$ и на коэффициенты уравнения (1) можно показать аналогично тому, как это было доказано в [2], что полученное решение $u(r,\theta,t)$ задачи D в виде (7) принадлежит искомому классу.

Список литературы
References

1. Aldashev S.A. 1995. On the correctness of Dirichlet problem for multimeasural wave equation and equation of Lavrentiv- Bitsadze. Reports of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, No1 :35-37.

2. Алдашев С.А. 1996. О корректности задач Дирихле для многомерных волнового уравнения и уравнения Лаврентьева- Бицадзе. Укр. Мат. журн., 48(5) : 701-705.

Aldashev S.A. 1996. Oh Dirichlet correctness task mnogomernix volnovogo equation and the equation Lavrenteva- Bïcadze. Ukrainian . Matt . Zh ., 48 (5): 701-705. (in Russ).

3. Алдашев С.А.2014. Коорректность задач Дирихле и Пуанкаре в многомерной области для волнового уравнения. Укр. Мат. Журн., 6(10): 1414-1419.

Aldashev S.A. 2014. Correctness of Dirichlet and Poincare problems in a multidimensional area for wave equalization. Ukrainian math journal., 6(10) : 1414-1419. (in Russ).

4. Михлин С.Г. 1962. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнение. М., Физматгиз, 254.

Mikhlin S.G. 1962. Multidimensijnal singular integrals and integral equations. M.: Physmathgiz., 254 (in Russ).

5. Weinstein A. 1954. On the wave equation and the equation of Euler- Poisson. The Fifth Symposium in applied Math. MCGraw. Hill . New York : 137-147.

6. Терсенов С. А. 1973. Введение в теорию уравнений, выраждающихся на границе. Новосибирск:, НГУ, 94 с.

Tersenov S.A. 1973. Introduction to the theory of equations confluent on the boundary, Novosibirsk , NGU, 94 (in Russ).

7. Алдашев С. А. 1994. Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. Алматы, Гылым, 170.

Aldashev S.A. 1994. Boundary value problems for multidimensional hyperbolic and mixed equations. Almaty, Gylym, 170 (in Russ).

8. Blum E.K. 1954. The Euler - Poisson - Darbux equation in the exceptional cases. Proc. Amer . Math Soc., 5(4) : 511-520.