МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК517.958

О НОВОМ ПОДХОДЕ К МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ОПИСАНИЮ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЖИДКОСТИ И УПРУГОГО ГРУНТА

A NEW APPROACH TO THE MATHEMATICAL DESCRIPTION OF INTERACTION BETWEEN THE LIQUID AND ELASTIC GROUND

О.А. Гальцева, О.В. Гальцев
O.A. Galtseva, O.V. Galtsev

Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85
Belgorod National Research University, 85 Pobedy St, Belgorod, 308015, Russia

E-mail: galtseva@bsu.edu.ru

Аннотация. С использованием самых современных методов усреднения получены корректные математические модели вытеснения нефти водой в упругих горных породах на макроскопическом уровне с учетом и без учета поверхностного натяжения на границе контакта воды и нефти. Все полученные математические модели основываются на классических уравнениях механики сплошных сред.

Resume. By using the most modern methods of homogenization were obtained the correct mathematical model of oil-by-water displacement in elastic rocks at the microscopic level with and without the surface tension at the interface of water and oil. All received mathematical models based on the classical equations of continuum mechanics.

Ключевые слова: гидродинамическое моделирование, флюидопотоки, усреднение разномасштабных процессов.
Key words: hydrodynamic modeling, fluid flows, multiscale homogenization processes.

Введение

Несмотря на то, что на текущий момент существует ряд математических моделей описания процесса жидкостно-структурного взаимодействия, все еще требуется их уточнение.

Так часто рассматриваются математические модели, описывающие совместное движение несмешивающихся жидкостей в пористой среде с помощью закона Дарси. Среди таких моделей наиболее правдоподобной считается задача Маскета [6]. Она описывает фильтрацию двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей различной вязкости и плотности в области Ω, состоящей из $\Omega^+(t)$ и $\Omega^-(t)$, и некоторой неизвестной (свободной) границы $\Gamma(t)$. Движение первой жидкости в $\Omega^+(t)$ с постоянной вязкостью μ^+ и постоянной плотностью ρ^+ описывается системой фильтрации

$$\mathrm{v}^+ = \frac{\mathrm{k}}{\mu^+}(-\nabla \mathrm{p}^+ + \rho^+\mathrm{g}),\ \nabla\cdot\mathrm{v}^+ = 0,\ \mathrm{x}\in\Omega^+(\mathrm{t}),\ \mathrm{t}>0, \tag{1}$$

для макроскопической скорости $\mathbf{v}^+$ и макроскопического давления p^+первой жидкости. Соответственно, движение второй жидкости в области $\Omega^-(t)$ с постоянной вязкостью μ^- и плотностью ρ^- можно описать похожей системой

$$v^- = \frac{k}{\mu^-}(-\nabla p^- + \rho^- g),\ \nabla \cdot v^- = 0,\ x \in \Omega^-(t),\ t > 0, \tag{2}$$

для макроскопической скрости v^-и давления p^- второй жидкости.

На общей свободной границе $\Gamma(t) = \partial\Omega^+(t) \cap \partial\Omega^-(t)$ давление и нормальные скорости непрерывны:

$$p^+ = p^-,\ x \in \Gamma(t),\ t > 0, \tag{3}$$

$$v^+ \cdot n = v^- \cdot n = V_n,\ x \in \Gamma(\tau),\ t > 0, \tag{4}$$

где n есть единичный нормальный вектор к границе$\Gamma(t)$ в точке $x \in \Gamma(t)$, а V_n– нормальная скорость к границе $\Gamma(t)$ в точке $x \in \Gamma(t)$.

Предположим для упрощения, что область Ω имеет форму прямоугольника $\{-L < x_1 < L, -L < x_2 < L\}$. Тогда задача дополняется начальными и граничными условиями

$$v_2 = 0,\ x \in S^0,\ t > 0, \tag{5}$$

где $S^0 = \{x: x_1 = \pm L\}$,

$$p = p_0^{\pm},\ x \in S^{\pm},\ t > 0, \tag{6}$$

где $S^{\pm} = \{x: x_2 = \pm L\}$, $p_0^{\pm} = \mathrm{const}$,

$$\Gamma(0) = \Gamma_0. \tag{7}$$

Задачу легко сформулировать, но почти невозможно решить и очень мало известно о классических и о слабых решениях. Есть только несколько результатов по классической разрешимости локальной во времени или глобальной во времени, но нет абсолютно никакого результата по слабой разрешимости (см. [7], [8], [9]).

В отличие от модели Маскета, теоретические вопросы и численная реализация модели Бакли-Леверетта [10] развиты очень хорошо, [12]. Структура этой модели более сложная. Она не связана с границей раздела двух жидкостей и содержит множество констант и функций, требующих экспериментальных определений. В простейшем варианте модель постулирует следующие законы Дарси для скорости и давления жидкостей ($v^{\pm}$ и $p^{\pm}$ соответственно):

$$v^+ = \frac{k^+(s)}{\mu^+}(-\nabla p^+ + \rho^+ g),\ v^- = \frac{k^-(s)}{\mu^-}(-\nabla p^- + \rho^- g) \tag{8}$$

и уравнения неразрывности

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot v^+ = 0,\ -\frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot v^- = 0 \tag{9}$$

в области Ω при $t > 0$. Здесь S – это концентрация интрузивной жидкости.

Описанная система замыкается уравнением состояния

$$p^+ - p^- = P_c(s),\ y \in \Omega,\ t > 0. \tag{10}$$

Соответствующие фазовые проницаемости k^+, k^- и капиллярное давление $P_c(s)$ необходимо определить экспериментально из дополнительных соображений. Уравнения (8)–(10) носят феноменологический характер, так как не получены строго из принятых физических законов. Более того, последняя публикация [13] показывает, что искусственная диффузия за счет капиллярного давления предполагает миграцию второй жидкости против потока первой. Эти факты вызывают большие сомнения в применимости модели Баклея-Леверетта.

Р. Барридж, Дж. Б. Келлер [2] и Е. Санчез-Паленсиа [3]были первыми, кто показал, что математические модели для фильтрации и акустики должны быть получены, строго опираясь на микроструктуру среды.

Для этого нужно:

1. описать физический процесс на микроскопическом уровне;
2. определить весь набор малых параметров;
3. вывести макроскопическую модель как асимптотический предел микроскопической.

Различные частные случаи точных моделей фильтрации и сейсмоакустики интенсивно исследовались многими авторами: Нгуетсенг [14], Бьюкенен, Гилберт [10], Леви [15]. Наиболее подробно такие точные модели были изучены Мейрмановым [16]–[19]. Он предложил иную модификацию модели Маскета, как асимптотический предел соответствующей краевой задачи на микроскопическом уровне для двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей в порах упругого тела.

Эта схема реализована для специальной двумерной геометрии, когда поровое пространство является объединением непересекающихся прямоугольных капилляров в абсолютно твердом скелет. Хорошо известно [1], что система фильтрации Дарси – это строгое усреднение уравнения системы уравнений Стокса. Таким образом, можно ожидать, что строгое усреднение соответствующей краевой задачи для двух различных вязких жидкостей приведет к задаче Маскета. Так и есть, формальный предел этой микроскопической модели есть задача Маскета (6).

Далее мы предлагаем точную математическую модель совместного движения двух жидкостей и упругого тела на микроскопическом уровне, которая, путем усреднения, приведет к усредненной модели фильтрации жидкости.

Микроскопическая математическая модель движения двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей без учета поверхностного натяжения на свободной границе

При совместной фильтрации двух различных несмешивающихся несжимаемых жидкостей в упругом скелете естественно отталкиваться от аналогичного процесса в абсолютно твердом скелете [4]. А именно, если в начальный момент времени они были разделены границей $\Gamma_0 = \Gamma(0)$, то и в последующие моменты времени жидкости будут разделены изменяемой во времени неизвестной границей $\Gamma(t)$. Как и в случае абсолютно твердого скелета, на границе раздела двух жидкостей скорости жидкостей и их нормальные напряжения будут непрерывны. При этом сама свободная граница является материальной поверхностью. То есть во все время движения она состоит из одних и тех же частиц.

Пусть Ω_f и Ω_s соответственно область занятая поровым пространством и твердым скелетом и $\Omega_f^+(t)$ и $\Omega_f^-(t)$ есть подобласти Ω_f, занятые соответственно более плотной и менее плотной жидкостью.

Если μ^+, ρ_f^+ и μ^-, ρ_f^- соответственно вязкость и плотность воды и нефти, то движение жидкостей в областях $\Omega_f^{\pm}(t)$ описывается системой уравнений Стокса

$$\nabla \cdot (\alpha_{\mu^\pm}\, \mathbb{D}(x, v^{\pm}) - p_f^{\pm}\, \mathbb{I}) + \rho_f^{\pm} F = 0, \tag{11}$$

$$\nabla \cdot v^{\pm} = 0 \tag{12}$$

для скорости $v^{\pm}$ жидкостей и давления p.

На свободной границе $\Gamma(t)$ непрерывны скорости жидкостей и нормальные напряжения

$$v^+ = v^-, \tag{13}$$

$$(\alpha_{\mu^+}\,\mathbb{D}(x,v^+) - p_f^+\,\mathbb{I})\cdot n = (\alpha_{\mu^-}\,\mathbb{D}(x,v^-) - p_f^-\,\mathbb{I})\cdot n, \tag{14}$$

где **n** - вектор нормали к свободной границе.

Условие материальности границы раздела $\Gamma(t)$ позволяет рассматривать совместное движение двух жидкостей как движение одной неоднородной жидкости с переменной плотностью и вязкостью, которые не изменяются вдоль траекторий частиц. Дифференциальные уравнения такого движения имеют вид

$$\nabla\cdot(\alpha_\mu\,\mathbb{D}(x,v) - p_f\,\mathbb{I}) + \rho_f F = 0, \tag{15}$$

$$\nabla\cdot v = 0, \tag{16}$$

$$\frac{d\alpha_\mu}{dt} \equiv \frac{\partial\alpha_\mu}{\partial t} + v\cdot\nabla\alpha_\mu = 0,\quad \frac{d\rho_f}{dt} = 0, \tag{17}$$

$$\alpha_\mu(x,0) = \alpha_{\mu^\pm} \text{ в } \Omega_f^\pm(0), \tag{18}$$

$$\rho_f(x,0) = \rho_f^\pm \text{ в } \Omega_f^\pm(0), \tag{19}$$

где $v = v^\pm$, $\rho_f = \rho_f^\pm$, $p_f = p_f^\pm$ в $\Omega_f^\pm$.

В твердом скелете перемещение среды описываются уравнениями Ламе

$$\nabla\cdot(\alpha_\lambda\,\mathbb{D}(x,w_s) - p_s\,\mathbb{I}) + \rho_s F = 0, \tag{20}$$

$$\nabla\cdot w_s = 0. \tag{21}$$

На границе S «твердый скелет–поровое пространство» выполнены обычные условия непрерывности вектора скорости сплошной среды и нормальных напряжений

$$\frac{\partial w_s}{\partial t} = v, \tag{22}$$

$$(\alpha_\lambda\,\mathbb{D}(x,w_s) - p_s\,\mathbb{I})\cdot n = (\alpha_\mu\,\mathbb{D}(x,v) - p_f\,\mathbb{I})\cdot n. \tag{23}$$

Данная постановка является обобщенной, поскольку она позволяет записать уравнений движения в виде интегральных тождеств, которые не включают понятие свободной границы (границы раздела) между двумя жидкостями.

В самом деле, достаточно определить w_f и w как

$$\frac{\partial w_f}{\partial t} = v,\quad w = w_f \text{ в } \Omega_f,\qquad w = w_s \text{ в } \Omega_s,$$

умножить уравнения (15) и (20) на произвольную гладкую функцию φ и проинтегрировать результат по частям соответственно по Ω_f и Ω_s и полученный результат сложить:

$$\int_\Omega\left(\left(\chi^\varepsilon\alpha_\mu\,\mathbb{D}\left(x,\frac{\partial w}{\partial t}\right) + (1-\chi^\varepsilon)\alpha_\lambda\,\mathbb{D}(x,w) - p\,\mathbb{I}\right):\mathbb{D}(x,\varphi) - \rho F\cdot\varphi\right)dx = 0. \tag{24}$$

Здесь $\rho = \rho_f\chi^\varepsilon + \rho_s(1-\chi^\varepsilon)$, $p = p_f\chi^\varepsilon + p_s(1-\chi^\varepsilon)$. Интегралы по границе S «твердый скелет-поровое пространство» пропали в силу краевых условий (22) и (23).

Дифференциальная форма уравнения (24) имеет вид

$$\nabla\cdot(\chi^\varepsilon\alpha_\mu\,\mathbb{D}(x,\frac{\partial w}{\partial t}) + (1-\chi^\varepsilon)\alpha_\lambda\,\mathbb{D}(x,w) - p\,\mathbb{I}) + \rho F = 0. \tag{25}$$

Уравнение движения (25) дополняется уравнением неразрывности

$$\nabla\cdot w = 0, \tag{26}$$

которое очевидным образом следует из (16) и (21), и транспортными уравнениями

$$\frac{d\alpha_\mu}{dt} = 0,\quad \alpha_\mu(x,0) = \alpha_{\mu^\pm} \text{ в } \Omega_f^\pm(0),\ \alpha_\mu(x,0) = 0 \text{ в } \Omega_s, \tag{27}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = 0,\quad \rho(x,0) = \rho_f^\pm \text{ в } \Omega_f^\pm(0),\ \rho(x,0) = \rho_s \text{ в } \Omega_s. \tag{28}$$

Именно такое представление уравнений движения делает возможным усреднение (предельный переход) при стремлении малого параметра ε к нулю.

Микроскопическая математическая модель движения двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей с учетом поверхностного натяжения на свободной границе

Классическая постановка движения двух несмешивающихся несжимаемых вязких жидкостей с учетом поверхностного натяжения предполагает наличие свободной границы (границы раздела), отделяющей эти жидкости. На свободной границе скорости жидкостей непрерывны (совпадают), а скачок нормальных напряжений пропорционален кривизне свободной границы. Именно в такой постановке вывод усредненных (приближенных) уравнений невозможен, поскольку нам не неизвестны какие-либо результаты об эквивалентной записи этой задачи в форме соответствующих интегральных уравнений, не включающих понятие границы раздела двух жидкостей (свободной границы). А наш метод вывода макроскопических уравнений основан именно на эквивалентной формулировке задачи в виде интегральных уравнений.

С другой стороны, есть работы (см. например [19]) в которых показывается, что исходную задачу со свободной границей можно аппроксимировать семейством задач зависящих от малого параметра δ (приближение фазового поля) не содержащих понятия границы раздела жидкостей, так что при стремлении этого параметра к нулю соответствующие решения сходятся к решению исходной задачи. Соответствующие уравнения фазового поля имеют достаточно сложную структуру. Для наших целей эту систему можно упростить до одного транспортного уравнения. А именно, вводится фазовая функция φ^{δ}, такая что

$$\frac{d\varphi^{\delta}}{dt} = 0, \quad \varphi^{\delta}(x,0) = \varphi_0^{\delta}(x). \tag{29}$$

Выбором достаточно гладкой начальной функции φ_0^{δ} можно добиться того, чтобы $-1 \le \varphi^{\delta} \le 1$, $\varphi^{\delta} = 1$ при $\mathrm{dist}(\mathbf{x}, \Gamma(t)) > \delta$ в Ω_f^+ и $\varphi^{\delta} = -1$ при $\mathrm{dist}(\mathbf{x}, \Gamma(t)) > \delta$ в Ω_f^-. Мы не обсуждаем значения начальной функции φ_0^{δ} в твердом скелете Ω_s, поскольку это не так важно и не влияет на конечный результат.

Таким образом соответствующая аппроксимация уравнений движения имеет следующий вид

$$\nabla \cdot \Big(\chi^{\varepsilon}\,\big(\alpha_{\mu}\,\mathbb{D}(x, \frac{\partial w}{\partial t}) + \delta\sigma\mathbb{P}_0\big) + (1-\chi^{\varepsilon})\alpha_{\lambda}\,\mathbb{D}(x, w) - p\,\mathbb{I}\Big) + \rho F = 0, \tag{30}$$

где σ - коэффициент поверхностного натяжения,

$$\mathbb{P}_0 = |\nabla\varphi^{\delta}|^2\mathbb{I} - \nabla\varphi^{\delta} \otimes \nabla\varphi^{\delta},$$

$$\alpha_{\mu} = \alpha_{\mu^+}\Big(\frac{1+\varphi^{\delta}}{2}\Big) + \alpha_{\mu^-}\Big(\frac{1-\varphi^{\delta}}{2}\Big),$$

$$\rho = \rho_s(1-\chi^{\varepsilon}) + \chi^{\varepsilon}\Big(\rho_f^+\Big(\frac{1+\varphi^{\delta}}{2}\Big) + \rho_f^-\Big(\frac{1-\varphi^{\delta}}{2}\Big)\Big).$$

Эти уравнения, дополненные транспортным уравнением (29) для фазовой функции и уравнением неразрывности

$$\nabla \cdot w = 0, \tag{31}$$

описывают физическое приближение движения двух различных несмешивающихся несжимаемых жидкостей с границей раздела, на которой присутствует поверхностное натяжение.

Формальный предел при $\delta \to 0$ согласно [19] приводит к появлению свободной границы $\Gamma(t)$, разделяющей области $\Omega_f^+(t)$ и $\Omega_f^-(t)$ в Ω_f, занятые соответственно первой и второй жидкостью, в которых скорости $v^{\pm}$ и давления $p_f^{\pm}$ удовлетворяют уравнениям (11) и (12) и краевым условиям (13) и

$$(\alpha_{\mu^+}\,\mathbb{D}(x,v^+) - p_f^+\,\mathbb{I})\cdot n - (\alpha_{\mu^-}\,\mathbb{D}(x,v^-) - p_f^-\,\mathbb{I})\cdot n = \sigma\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)n. \qquad (32)$$

Здесь n-вектор единичной нормали к поверхности $\Gamma(t)$, σ-коэффициент поверхностного натяжения и R_1 и R_2-главные радиусы кривизны поверхности $\Gamma(t)$. Будем считать R_i, $i = 1,2$, положительным, если нормаль к поверхности совпадает с нормалью к кривой, лежащей на пересечении поверхности и соответствующего нормального сечения. Грубо говоря, если поверхность выпуклая, и вода находится под этой поверхностью (локально), то радиусы кривизны положительны.

В области Ω_s перемещения упругого скелета w_s и давление p_s удовлетворяют уравнениям Ламе (20) и (21), а на границе S раздела «поровое пространство–упругий скелет» выполнены условия (22) и (23).

Таким образом, единственное отличие сформулированной задачи (11)-(13), (20)-(23), (32) о вытеснении нефти водой в упругом твердом скелете с учетом поверхностного натяжения на границе раздела жидкостей от аналогичной задачи (11)-(14), (20)-(23), в которой не учитывается поверхностное натяжение на границе раздела, заключается в краевом условии (32), которое при отсутствии поверхностного натяжения ($\sigma = 0$) совпадает с краевым условием (14).

Заключение

В настоящей работе проанализированы подходы к описанию совместного движения жидкостей и упругого скелета грунта, как на микроскопическом, так и на макроскопическом уровнях. Опираясь на постулаты о строгом описании рассматриваемых физических процессов, предложены микроскопические математические модели фильтрации жидкостей как без учета сил поверхностного натяжения, так и без них. Основу этих моделей составляют уравнения Стокса вязкой жидкости. При этом сами уравнения могут быть как стационарными, так и нестационарными, и описывать как сжимаемую, так и несжимаемую жидкость. Отличие этих моделей только в одном условии на свободной поверхности. В одной модели предел нормальных напряжений на этой границе со стороны воды равен пределу нормальных напряжений со стороны нефти. В другой модели разность пределов нормальных напряжений в данной точке пропорциональна средней кривизне свободной границы в этой точке.

Работа поддержана грантом Российского научного фонда №14-17-00556 «Математическое моделирование флюидопотоков в нефтяных резервуарах с учетом разномасштабных свойств пласта-коллектора».

Список литературы

1. Terzaghi K. 1923. Die Berechnung der Durchlassigkeits ziffer des Tones aus dem Verlauf der hydrodynamischen Spannung ser cheinungen, Sitzungberichte. Akademie der Wissenschaften, Wien Mathematiesch-Natur wissenschaftliche Klasse: 104–124.
2. Burridge R., Keller J.B. 1981. Poroelasticity equations derived from microstructure. Journal of Acoustic Society, 70(4): 1140–1146.
3. Sanchez-Palencia E. 1980. Non-Homogeneous Media and Vibration Theory: Lecture Notes in Physics. B., Springer, 129.

4. Гальцев О.В., Гальцева О.А. 2015. Математическое моделирование процесса фильтрации жидкостей в пористой среде различной геометрии. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика, 41(23): 116–127.

5. Galtsev O.V., Galtseva O.A. 2015. Mathematical modeling of a filtration process of fluids in porous media of different geometries. Scientific statements of Belgorod State University. Series: Mathematics. Physics, 41(23): 116–127.

6. Muskat M. 1934. Two-fluid system in porous media. The encroachment of water into an oil sand. Physics, 5: 250–264.

7. Fahuai Yi. 2003. Global classical solution of Muskat free boundary problem. Journal of Mathematical Analysis and its Application, 288: 442–461.

8. Radkevich E. 1995. On the spectrum of the pencil in the Verigin-Muskat problem. Sbornik: Mathematics, 80(1): 33–74.

9. Siegel M., Caflish R.E., Howison S. 2004. Global existence, singular solutions, and ill-posedness for the Muskat problem. Common on Pure and Applied Mathematics, 57 : 1–38.

10. Buckley S.E., Leverett M.C. 1942. Mechanism of fluid displacements in sands. Transactions of the AIME, 146: 107–116.

11. Antontsev S.N., Kazhikhov A.V., Monakhov V.N. 1990. Boundary Value Problems in Mechanics of Nonhomogeneous Fluids. Studies in Mathematics and its Applications. North-Holland Publishing Company, 309.

12. Antontsev S., Amaziane B., Pankratov L. 2012. Time of complete displacement of an immiscible compressible fluid by water in porous media: Application to gas migration in a deep nuclear waste repository. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 13: 2144–2153.

13. Meirmanov A., Shmarev S. A. 2014. Compactness lemma of Aubin type and its application to a class of degenerate parabolic equations. Electronic Journal of Differential Equations, 2014(227) : 1–13.

14. Nguetseng G. 1990. Asymptotic analysis for a stiff variational problem arising in mechanics. SIAM Journal of Mathematical Analysis, 21: 1394–1414.

15. Levy T. 1987. Fluids in porous media and suspensions. In Homogenization Techniques for Composite Media, Lecture Notes In Physics. B., Springer, 276.

16. Meirmanov A. 2007. Nguetseng's two-scale convergence method for filtration and seismic acoustic problems in elastic porous media. Siberian Mathematical Journal, 48(3): 519–538.

17. Meirmanov A. 2011. The Muskat problem for a viscoelastic filtration. Interfaces and Free Boundaries, 13 (4): 463–484.

18. Meirmanov A. 2014. Mathematical models for poroelastic flows. Paris: Atlantis Press.

19. Meirmanov A., Zimin R., Shiyapov K. 2015. The Muskat problem at the microscopic level for a single capillary, submitted for publication to "Baundary Value Problems", 71.

20. Старовойтов В.Н. 1994. Модель движения двухкомпонентной жидкости с учетом капиллярных сил. ПМТФ, 35(6): 85–92.

Starovoytov V.N. 1994. Model two-component fluid motion based on capillary forces. PMTF, 35(6): 85-92.