

# **ГЕОЛОГИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ**

**ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК**

**КИЇВ — 198**

УДК 551.468.1

## **Анализ устойчивости береговых систем методами теории катастроф**

**В. М. Московкин, Е. А. Ковтун**

В последнее время наблюдается интенсивное развитие методов теории катастроф, стоящей на стыке теорий особенностей гладких отображений, бифуркации и устойчивости динамических систем, а также большой интерес к этим методам со стороны прикладной науки [1, 3, 8, 9]. Катастрофы, возникающие при функционировании различных систем, связывают с внезапными скачками их равновесных состояний, происходящими при непрерывном (гладком) изменении управляющих параметров. Такие скачки обычно происходят при вырождении (исчезновении) некоторых локальных минимумов потенциальной функции рассматриваемой системы. В работе Р. Гилмора [3] подчеркивается, что методы теории катастроф применимы к анализу таких систем, которые описываются градиентными автономными динамическими системами, т. е. системами обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, в правые части которых время явно не входит, причем пра-

вые части таких систем уравнений допускают потенциал. Поэтому многие попытки применения этих методов к областям и проблемам, далеким от математической формализации (без описания рассматриваемого явления с помощью математической модели, подчиняемой вышеуказанным требованиям), часто безосновательны, что неоднократно отмечалось в литературе.

Как нам кажется, целесообразность и перспективность использования методов теории катастроф в области морфодинамики берегов обусловлена как физическим, так и математическим аспектами: 1) по своей физической сути береговые процессы динамичны и сильно подвержены влиянию различных управляющих (в том числе антропогенных) факторов (например, при изменении условий пляжеформирования могут происходить достаточно быстрые переходы пляжа из одного равновесного состояния в другое или полное его исчезновение, что особенно отчетливо наблюдается при изъятии материала из береговой зоны); 2) с точки зрения математики, для прогноза таких катастрофических ситуаций удобно использовать уравнение баланса пляжеобразующего материала, которое является автономным и допускает потенциал.

В настоящее время имеется лишь одна работа (в тезисной форме), посвященная данной проблеме [5]. Согласно ей, а также работам, посвященным оптимальному управлению береговыми системами типа клиф — пляж [6, 7, 10], уравнение баланса пляжеобразующего материала запишем в виде

$$\frac{dW}{dt} = aHf(W) - \varphi(W) + u, \quad (1)$$

где  $W$  — объем пляжеобразующего материала на единицу длины береговой линии,  $m^2$ ;  $a$  — доля пляжеобразующего материала в породах, слагающих берег ( $0 < a < 1$ );  $H$  — высота клифа,  $m$ ;  $f(W)$  — скорость отступления клифа,  $m/год$ ;  $\varphi(W)$  — интенсивность потерь пляжеобразующего материала при его истирании в результате волнового воздействия,  $m^2/год$ ;  $u$  — интенсивность искусственного изъятия ( $u < 0$ ) или подсыпки ( $u > 0$ ) материала,  $m^2/год$  (в качестве  $u$  может рассматриваться также естественное поступление или унос материала вследствие вдольбереговой транспортировки наносов, разрывных или компенсационных течений);  $t$  — время, в годах.

Как видим, правая часть уравнения (1) допускает потенциал ( $\frac{dW}{dt} = -\frac{dU(W)}{dW}$ ;  $U(W)$  — потенциальная функция).

Основные особенности возникающих здесь катастрофических ситуаций рассмотрим на характерном примере при следующих аппроксимационных функциях [4]:

$$f(W) = \frac{V_{\max}}{W_{\text{опт}}} W \left( 2 - \frac{W}{W_{\text{опт}}} \right) \text{ при } 0 \leq W \leq 2W_{\text{опт}},$$

$$f(W) = 0 \text{ при } W > 2W_{\text{опт}};$$

$$\varphi(W) = kW, \text{ где } V_{\max}, W_{\text{опт}}, k = \text{const} > 0.$$

Для уменьшения количества исходных параметров приведем уравнение (1) к безразмерному виду с помощью замен  $W' = \frac{W}{W_{\text{опт}}}$ ,  $t' = kt$ :

$$\frac{dW'}{dt'} = -K_1(W')^2 + (2K_1 - 1)W' + K_2, \quad (2)$$

где  $K_1 = \frac{aHV_{\max}}{kW_{\text{опт}}}$ ,  $K_2 = \frac{u}{kW_{\text{опт}}}$  — безразмерные параметры,  $0 \leq W' \leq 2$ .

Будем исследовать устойчивость равновесных состояний (стационарных точек) уравнения (2) и их изменчивость при изменении параметров  $K_1$  и  $K_2$ , которые называются управляющими.

Стационарные точки этого уравнения, в случае когда  $\frac{dW'}{dt'} = 0$ , имеют вид

$$W'_{1,2} = 1 - \frac{1}{2K_1} \pm \frac{\sqrt{(2K_1 - 1)^2 + 4K_1K_2}}{2K_1}. \quad (3)$$

При подсыпке материала ( $K_2 > 0$ ) имеем единственный положительный корень, лежащий в интервале  $0 < W'_1 \leq 2$  ( $W'_2 < 0$ ), причем  $W'_1 = 2$  при  $K_2 = 2$ . При  $W'_1 > 2$ , ввиду того, что  $f(W') = 0$ , получим  $W'_1 = K_2$ . В этой ситуации ( $K_2 > 0$ ) не возникает катастрофических ситуаций, и решение уравнения (2) устойчиво стремится к своему равновесному состоянию ( $\lim_{t' \rightarrow \infty} W'(t') = W'_1$ ).

Гораздо больший интерес представляют ситуации, возникающие при изъятии материала ( $u < 0$ ,  $K_2 < 0$ ), которые хорошо наглядно могут быть представлены при графическом рассмотрении условий пересечения прямой  $W' - K_2$  с параболой  $K_1W'(2 - W')$ . Здесь прямая может иметь два, одно (касание) и ни одного пересечения с параболой, что соответствует наличию двух, одной и ни одной стационарной точки в положительной области ( $W' \geq 0$ ).

Можно показать, что точка  $W'_1 > W'_2$  является устойчивой, а  $W'_2$  — неустойчивой (методом возмущений или с помощью перехода к пределу в аналитическом решении для  $W'(t')$ ). Вырождение (исчезновение) устойчивой стационарной точки  $W'_1 = W'_2 = 1 - \frac{1}{2K_1}$  произойдет при

$$K_2 = -\frac{(2K_1 - 1)^2}{4K_1}, \quad (4)$$

т. е. при касании вышеуказанной прямой с параболой, что эквивалентно равенству нулю дискриминанта соответствующего квадратного уравнения. Эта катастрофическая ситуация будет соответствовать исчезновению пляжа, так как при  $K < -\frac{(2K_1 - 1)^2}{4K_1}$  стационарные точки уравнения (2) исчезают, и неравенство  $\frac{dW'}{dt'} < 0$ , в этом случае, справедливо при любых  $W' \geq 0$ .

Отметим, что стационарные точки уравнения (2) соответствуют экстремумам потенциальной функции  $U(W')$ , и вырождение их (сближение и совпадение) соответствует вырождению минимума потенциальной функции, когда он сближается и совпадает с максимумом потенциальной функции (который соответствует неустойчивой стационарной точке). При вырождении минимума этой функции она терпит перегиб. Здесь  $W'_1 = W'_2$  называется дважды вырожденной критической точкой:  $\frac{dU(W')}{dW'} = \frac{d^2U(W')}{d(W')^2} = 0$ . Поиск условий, при которых возникают такие дважды (или более раз) вырожденные критические точки, является основным предметом исследований теории катастроф. Согласно терминологии этой теории, многообразие катастрофы или поверхность равновесия в нашем случае будет трехмерная поверхность в пространстве переменных  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $W'$ , задаваемая уравнением

$$-K_1(W')^2 + (2K_1 - 1)W' + K_2 = 0. \quad (5)$$

На этой поверхности лежат все стационарные точки уравнения (2). Это многообразие катастрофы с помощью линейного преобразования (которое является гладким, т. е. непрерывным и дифференцируе-

мым, что является существенным моментом теории катастроф) приводится к канонической катастрофе складки ( $\tilde{u}^2 + \tilde{a} = 0$ ), являющейся первой и самой простой из семи элементарных катастроф, хорошо изученных в этой теории. Но для прикладных целей интерес обычно представляют неканонические формы записи многообразий катастроф, в которых явно присутствуют реальные физические параметры процессов.

Отображение особых точек (крутизна поверхности  $W'(K_1, K_2)$  в этих точках равняется бесконечности) этого многообразия на плоскость управляющих параметров  $(K_1, K_2)$  называется бифуркационным множеством. Оно описывается урав-

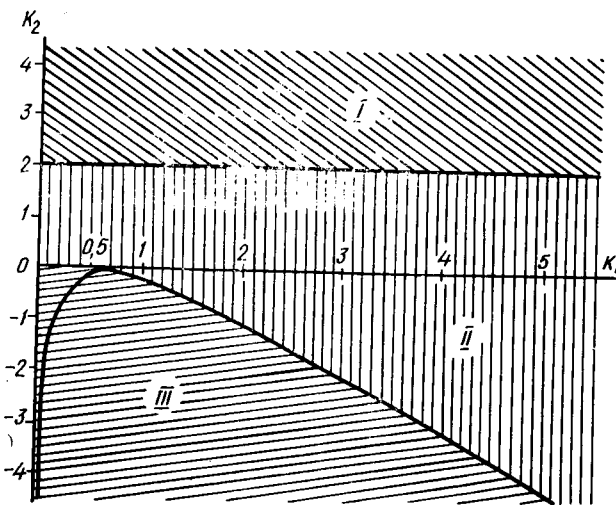


Рис. 1. Классификация физических устойчивых состояний равновесия  $W'_{уст} \geq 0$ . Области существования равновесных состояний: I —  $W'_{уст} = K_2 \geq 2$ ; II —  $W'_{уст} = W'$ , определяемых по формуле (3); III — нулевых,  $W'_{уст} = 0$  (область отсутствия равновесных пляжей)

нением (4), и на нем происходят вырождения стационарных точек (катастрофические ситуации). В нашем случае при изъятии материала ( $K_2 < 0$ ) возникают скачки с кривой складки  $W' = 1 - \frac{1}{2K_1}$  (особое множество, состоящее из особых точек поверхности (5)) на лист (горизонтальную плоскость)  $W' = 0$  (исчезновение пляжа) при переходе через бифуркационное множество (4); в общем случае оно находится из условия дважды вырожденной критической точки:

$$\frac{dU(W')}{dW'} = \frac{d^2U(W')}{d(W')^2} = 0.$$

Ввиду ограничений, наложенных на  $W'$  и  $f(W')$ , поверхность равновесия для нашей задачи состоит из нескольких листов: собственно поверхность (5);  $W' = 0$ ;  $W' = K_2$ .

При подсыпке материала ( $K_2 > 0$ ) и переходе через множество  $K_2 = 2$  происходит непрерывный (но негладкий) переход единственного равновесного состояния с многообразия катастрофы (5) на наклонную плоскость  $W' = K_2$ , т. е. на линии  $W' = 2$  поверхность (5) терпит излом и переходит в наклонную плоскость. Особенности перехода на плоскость  $W' = 0$  рассматривались выше. Сама поверхность (5) является двузначной. На верхнем ее листе лежат устойчивые точки, на нижнем — неустойчивые, в соответствии с выражением (3).

Бифуркационное множество (4) и классификация реальных (физических) устойчивых состояний равновесия  $W'_{уст}$  показаны на рис. 1. Как уже отмечалось, устойчивая точка  $W'$  лежит на верхнем листе поверхности (5), которой соответствует заштрихованная область II на рис. 1. При переходе через линию складки, проекция которой будет являться правой ветвью бифуркационного множества (или сепаратрисы) в область параметров III (рис. 1), где отсутствуют положительные стационарные состояния уравнения (2),  $W'$  начнет уменьшаться до нуля (скачок); достигнув его (плоскости  $W' = 0$ ),  $W'$  будет оставаться и дальше нулевым. При обратном движении из плоскости  $W' = 0$  в область II произойдет скачок с листа  $W' = 0$  на линию складки поверх-

ности (5), и далее (при изменении параметров  $K_1, K_2$ ) точка будет двигаться по верхнему листу поверхности (5) и, лишь перейдя через линию  $K_2 = 2$ , она переключится на движение по наклонной плоскости  $W' = K_2$ .

Проекция линии складки на плоскость  $(W', K_1)$  имеет вид  $W' = 2 - \frac{1}{K_1}$  (рис. 2), а это есть сечение поверхности (5) плоскостью  $K_2 = 0$ .

Возможны три типа сечений поверхности равновесия (5) плоскостями  $K_2 = \text{const} \neq 0$ : 1)  $K_2 > 2$ ; 2)  $0 < K_2 < 2$ ; 3)  $K_2 < 0$ . Наибольший интерес представляет третий случай, где происходят катастрофические ситуации, причем физиче-

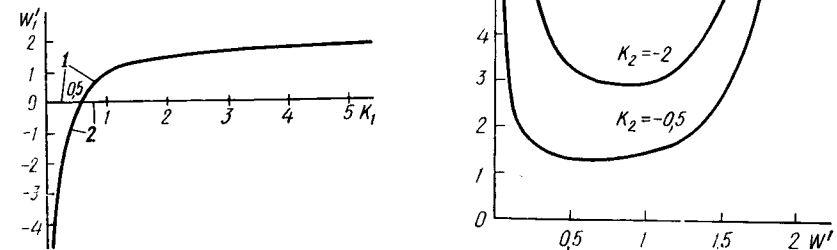


Рис. 2. Проекция линии складки на плоскость  $(W', K_1)$

I — пересечение с верхним листом поверхности равновесия (5) (отрезок оси  $K_1$ :  $[0; 0,5]$  и положительная область кривой  $W' = 2 - \frac{1}{K_1} \geq 0$ ); 2 — пересечение с нижним листом поверхности равновесия (5) (отрезок оси  $K_1$ :  $[0,5; \infty]$  и отрицательная область кривой  $W' = 2 - \frac{1}{K_1} < 0$ )

Рис. 3. Сечения поверхности равновесия (5) плоскостями  $K_2 = \text{const} < 0$

ская область здесь соответствует условию  $0 \leq W' \leq 2$  (рис. 3). Эти сечения описываются уравнением

$$K_1 = \frac{K_2 - W'}{W'(W' - 2)}. \quad (6)$$

Минимум этой функции достигается при  $W'_1 = K_2 + \sqrt{K_2^2 - 2K_2}$  и равен

$$(K_1)_{\text{мин}} = - \frac{1}{2(\sqrt{K_2^2 - 2K_2} + K_2 - 1)} > 0. \quad (7)$$

Выражение (7) является другой записью бифуркационного множества (4), а  $W'_1$  — другой записью выражения (3). Отчетливо видно возникновение двух стационарных точек (большая устойчивая) при  $K_1 > (K_1)_{\text{мин}}$ . Анализ показывает, что при заданной интенсивности изъятия материала ( $K_2 < 0$ ) существует область параметра  $K_1$  ( $0 < K_1 < (K_1)_{\text{мин}}$ ), в которой отсутствуют стационарные точки и где не формируется пляж. Увеличение  $K_1$  от нуля до его критического значения (7) может быть связано с увеличением высоты клифа  $H$  или с уменьшением интенсивности истирания материала при  $a, V_{\text{макс}}, W_{\text{опт}} = \text{const}$ , и, например, при достижении критической высоты  $H_{\text{кр}}$ , соответствующей  $(K_1)_{\text{мин}}$ , начинает формироваться стабильный пляж.

В природе часто имеет место ситуация, когда при отступании клифов высота их увеличивается, и тогда при достижении  $H = H_{\text{кр}}$  начинает формироваться устойчивый пляж (при этом чем больше  $H > H_{\text{кр}}$ , тем больший по объему пляж формируется). Это согласуется с выводами работы [4].

Для графического построения поверхности равновесия будем использовать функцию  $W'(K_1, K_2)$ , описываемую уравнением (3). Основ-

ная программа SURFACE табулирует функцию (3) и вызывает разработанный нами стандартный модуль MOUNT, который осуществляет вызов подпрограмм Графора [2] для изображения центральной проекции поверхности  $W'(K_1, K_2)$  на прямоугольной сетке. Ввиду того, что подпрограммы Графора могут быть использованы для графического изображения только непрерывных однозначных функций, каждый лист

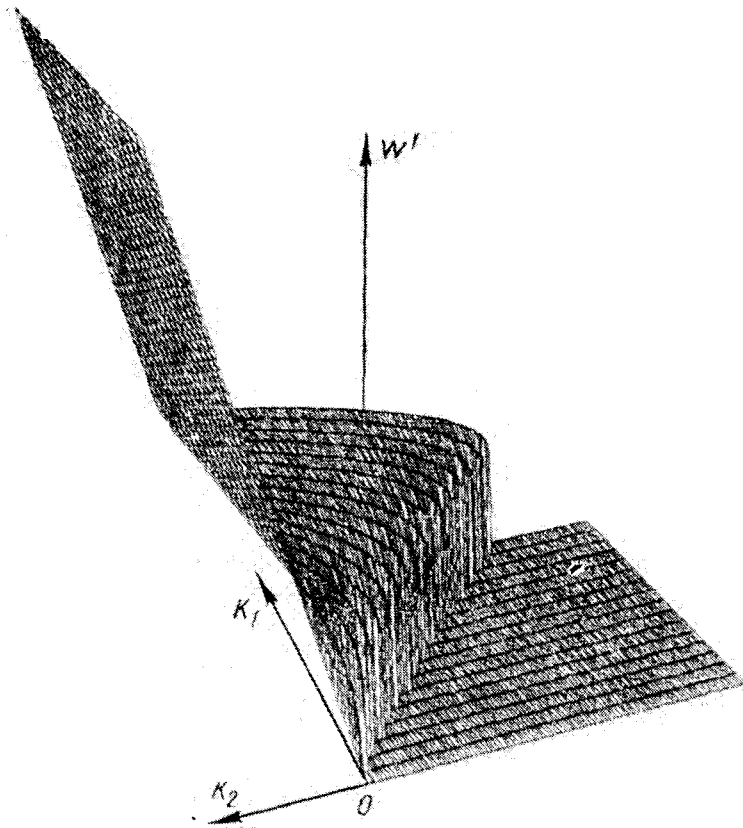


Рис. 4. Центральная проекция верхнего листа поверхности равновесия, задаваемой уравнением (3) или (5)

неоднозначной поверхности должен графически реализовываться отдельно. В нашем случае катастрофические ситуации связаны с верхним листом поверхности (3) (знак плюс в этом выражении), поэтому нижний лист поверхности для показа этих ситуаций не нужен.

Расчетная область параметров:  $0 \leq K_1 \leq 8$ ,  $-10 \leq K_2 \leq 6$ ; координата точки зрения на изображаемый объект относительно центра этого прямоугольника:  $(K_1, K_2, W') = (-80, 40, 20)$ ; шаги по  $K_1$  и  $K_2$ :  $\Delta K_1 = 0,5$ ;  $\Delta K_2 = 0,1$ .

Поверхность равновесия, построенная на графопостроителе ЕС-7052, показана на рис. 4 (ЭВМЕС-1060, язык ПЛ-1). Это устройство для построения данного графического изображения затрачивает около 1 ч времени. Комплексные и отрицательные значения  $W'$  заставляли, что соответствует области III на рис. 1, а на рис. 4 — области горизонтальной плоскости  $W' = 0$ , ограниченной верхней ветвью бифуркационного множества, отрицательной полуосью  $K_2$  и отрезком оси  $K_1$  ( $0 < K_1 < 0,5$ ). Вертикальная плоскость на рис. 4 соответствует скачкам (катастрофе) с кривой складки — проекция которой на плоскость  $(K_1, K_2)$  является верхней ветвью бифуркационного множества — на горизонтальную плоскость  $W' = 0$ . Эти катастрофические скачки как раз и соответствуют критическим ситуациям исчезновения пляжа, когда  $\lim_{t' \rightarrow \infty} W'(t') = 0$ .

Описанный выше переход через множество  $K_2 = 2$  с поверхности равновесия (3) на наклонную плоскость  $W' = K_2$  отображен на рис. 4.

С практической точки зрения важен вопрос оценки времени скачков, которому обычно мало уделяется внимания в методах теории катастроф. В нашем случае это время соответствует времени перехода из устойчивого ненулевого состояния  $W'_1 > 0$  в нулевое  $W' = 0$ . Здесь возможны два варианта расчетов. Первый соответствует ситуации отсутствия стационарных значений объемов материала  $K_2 < -\frac{(2K_1 - 1)^2}{4K_1}$ ,

и тогда время исчезновения пляжа определяется по формуле

$$t'_{\text{исч}} = \frac{2}{A} \left[ \arctg \left( \frac{2K_1 W'_0 - (2K_1 - 1)}{A} \right) - \arctg \left( \frac{1 - 2K_1}{A} \right) \right], \quad (8)$$

где  $A = \sqrt{4K_1 |K_2| - (2K_1 - 1)^2}$ , причем при условии (4)

$$t'_{\text{исч}} = \frac{4K_1 W'_0}{(1 - 2K_1)(2K_1 W'_0 + 1 - 2K_1)}. \quad (9)$$

Взяв характерные параметры для условий Новороссийского геологического района [4] ( $a = 0,3$ ;  $W_{\text{опт}} = 0,5 \text{ м}^2$ ;  $V_{\text{макс}} = 0,01 \text{ м/год}$ ,  $k = 0,1 \text{ год}^{-1}$ ) и варьируя параметры  $H$ ,  $u$ ,  $W_0$  (в пределах:  $10 \leq H \leq 100 \text{ м}$ ;  $-1,5 \leq u \leq -0,1 \text{ м}^2/\text{год}$ ;  $0,25 \leq W_0 \leq 0,5 \text{ м}^2$ ), получим по формуле (8), что времена исчезновения пляжа не превышают 5 лет. Здесь при увеличении интенсивности изъятия время исчезновения пляжа резко сокращается, а при увеличении  $W_0$  и  $H$  оно увеличивается.

Во втором варианте ( $K_2 > -\frac{(2K_1 - 1)^2}{4K_1}$ ) существуют два положительных стационарных состояния (3). Но в случае, если начальный объем материала  $W'_0$  находится ниже неустойчивого состояния ( $W'_0 < W'_2$ ), происходит исчезновение пляжа. Время этого исчезновения находим по формуле

$$t'_{\text{исч}} = \frac{1}{K_1(W'_1 - W'_2)} \ln \left[ \frac{W'_1(W'_0 - W'_2)}{W'_2(W'_0 - W'_1)} \right]. \quad (10)$$

Отметим, что формулы (8–10) получены на основе решения обыкновенного дифференциального уравнения (2).

Если в природе первый вариант возникает при изменении параметров  $H$ ,  $k$  и других, то второй вариант может соответствовать случаям, когда происходят срывы устойчивых траекторий, связанные с флуктуацией объема материала.

Пусть  $H = 100 \text{ м}$ ,  $u = -0,25 \text{ м}^2/\text{год}$  (остальные параметры прежние), тогда  $W'_1 = 1$  ( $W_1 = 0,5 \text{ м}^2$ ),  $W'_2 = 0,8333$  ( $W_2 = 0,4166 \text{ м}^2$ ). Здесь при уменьшении  $W_0$  от  $0,39 \text{ м}^2$  до нуля, согласно расчетам по формуле (10), наблюдается нелинейный спад времени  $t'_{\text{исч}}$  от 14,34 лет до нуля.

Изложенные в работе подходы к изучению устойчивости береговых систем клиф — пляж могут широко использоваться при учете более сложных функций  $f(W)$  и  $\varphi(W)$ , причем в ряде случаев нелинейных функций  $f(W)$ ,  $\varphi(W)$  может наблюдаться до трех стационарных точек (в области  $W \geq 0$ ), что будет соответствовать второй по счету (по классификации элементарных катастроф) катастрофе сборки.

#### Summary

Stability of equilibrium states of the coastal cliff-beach systems is analyzed by the catastrophe theory methods. Catastrophes in such systems depend on sudden jumps of their equilibrium states induced by continuous change of manipulated variables. A concrete model has been used to show a possibility of the fold catastrophe appearance with representation of central projection of the equilibrium surface on the basis of computer-aided graphics.

1. Арнольд В. И. Теория катастроф.— М. : МГУ, 1983.—80 с.
2. Баяковский Ю. М., Галактионов В. А., Михайлова Т. Н. Графор. Графическое расширение фортрана.— М. : Наука, 1985.—288 с.
3. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф.— М. : Мир, 1984.—350 с.
4. Есин Н. В., Савин М. Т., Жиляев А. П. Абразионный процесс на морском берегу.— Л. : Гидрометеониздат, 1980.—200 с.
5. Московкин В. М. Анализ равновесных состояний береговых систем методами теории катастроф // Круговорот вещества и энергии в водоемах. Метеорология и климат. Геолитодинамика, осадкообразование: Материалы докл. к VI Всесоюз. лимнол. совещ. (Лиственичное-на-Байкале, 4—6 сент. 1985 г.)—Иркутск, 1985.— Вып. 5.— С. 58—59.
6. Московкин В. М., Есин Н. В. Оптимальное управление абразионным процессом // Докл. АН СССР.— 1985.— Т. 284, № 3.— С. 731—734.
7. Московкин В. М., Есин Н. В. К теории оптимального управления береговыми процессами // Вод. ресурсы.— 1986.— № 4.— С. 172—175.
8. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения.— М. : Мир, 1980.—607 с.
9. Томпсон Дж. М. Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике.— М. : Мир, 1985.—254 с.
10. Trofimov A. M., Moskovkin V. M. Optimal control over geomorphological systems // Ztschr. Geomorphologie.— 1985.— Vol. 29, N 3.— P. 257—263.

ВНИИ по охране вод,  
Харьков

Статья поступила  
18.02.87