MSC 76N15, 76M45

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ГАЗОДИНАМИКИ СТАЦИОНАРНЫХ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Ю.П. Вирченко, Н.Н. Самойлова

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Предлагается общая конструкция построения асимптотических разложений решений системы уравнений газодинамики, которые описывают безвихревые стационарные течения газа.

Ключевые слова: уравнение Навье-Стокса, стационарные задачи, сжимаемость, потенциальное течение, асимптотические разложения.

1. Введение. Как известно [1], полная система дифференциальных уравнений газодинамики (и гидродинамики ньютоновских сжимаемых жидкостей) состоит из уравнения Навье-Стокса

$$\dot{u}_j + (\mathbf{u}, \nabla)u_j = -\frac{\nabla_j P}{\rho} + \nabla_k \mu \left(\nabla_k u_j + \nabla_j u_k - \frac{2}{3}\delta_{jk} \right) + (\nabla, \eta\nabla)u_j\,, \quad j = 1, 2, 3\,; \qquad (1)$$

уравнения непрерывности

$$\dot{\rho} + (\nabla, \rho\mathbf{u}) = 0 \qquad (2)$$

и уравнения переноса тепла

$$\rho c_p \left(\dot{T} + (\mathbf{u}, \nabla)T \right) = (\nabla, \varkappa\nabla)T + \frac{\mu}{2} \left(\nabla_k u_j + \nabla_j u_k - \frac{2}{3}\delta_{jk} \right)^2 + \eta(\nabla, \mathbf{u})^2\,. \qquad (3)$$

Система уравнений (1-3), с физической точки зрения, записана с точностью до второго порядка по градиентам полей $\mathbf{u}$, ρ, T. Она определяет эволюцию во времени t для поля скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $\mathbf{x} \in \Omega$, распределений плотности $\rho(\mathbf{x}, t)$ и температуры $T(\mathbf{x}, t)$ при определенных граничных и начальных условиях, связанных со спецификой физической постановки задачи. Для полной постановки задачи, в этой системе уравнений должны быть заданы коэффициенты вязкости μ и η, давления P, теплоемкости при постоянном давлении c_p и коэффициента теплопроводности $\varkappa$, которые, в общем случае, для каждой пространственно-временной точки, являются функциями от величин ρ и T, которые вычислены в этой точке. Заметим, что транспортные коэффициенты μ, η не зависят от $\mathbf{u}$, что как раз соответствует понятию ньютоновских сплошных сред.

При сформулированных условиях становится осмысленной постановка задачи Коши для системы уравнений (1-3), то есть поиска ее решения при заданных начальных значениях $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0)$, $\rho(\mathbf{x}, 0)$ и $T(\mathbf{x}, 0)$. Однако, в настоящее время, неизвестно разрешима ли задача Коши в сколько-нибудь общей постановке для этой системы уравнений (и даже для более простой системы, например, получаемой при $T = \text{const}$, $\mu = 0$, $(\nabla, \mathbf{u}) = 0$ и $P \sim \rho$, $\eta = \text{const}$). При тех же общих условиях постановки задачи неизвестен также ответ па вопрос: если решение задачи Коши существует, то является ли оно единственным при заданных начальных условиях и глобальным (то есть возможно ли его продолжение на сколь угодно большие отрезки времени)? Само собой разумеется, что в этих условиях совершенно немыслимо ставить вопрос о построении аналитических решений в рамках сколько-нибудь общих условий постановки задачи. Что касается построения решений численным образом, то так как любое конструктивное доказательство существования решения у системы (1-3) и ее упрощений неявно должно содержать алгоритм численной схемы определения решения, и этот алгоритм обязательно должен сходиться, может быть, довольно медленно, то наличие сходящейся численной схемы содержит в себе конструктивное доказательство существования и единственности решения. Отсутствие такого доказательства в настоящее время указывает на то, что численные процедуры, применяемые в газодинамике, не являются математически строго обоснованными.

Остановимся отдельно на задаче поиска стационарных решений системы (1-3), которые не зависят от t и поэтому удовлетворяют этой системе при равенстве в ней производных но t нулю,

$$(\mathbf{u}, \nabla)u_j = -\frac{\nabla_j P}{\rho} + \nabla_k \mu \left(\nabla_k u_j + \nabla_j u_k - \frac{2}{3}\delta_{jk} \right) + (\nabla, \eta \nabla)u_j \,, \quad j = 1, 2, 3\,; \tag{4}$$

$$(\nabla, \rho\mathbf{u}) = 0\,, \tag{5}$$

$$\rho c_p (\mathbf{u}, \nabla)T = (\nabla, \varkappa \nabla)T + \frac{\mu}{2} \left(\nabla_k u_j + \nabla_j u_k - \frac{2}{3}\delta_{jk} \right)^2 + \eta(\nabla, \mathbf{u})^2\,. \tag{6}$$

Эта система, вообще говоря, не имеет единственного решения при заданных граничных условиях для нолей $\mathbf{u}$, ρ, T. Это связано с тем, что стационарные течения в сплошной среде, которые должны описываться решениями этой системы уравнений, всегда содержат вихревую составляющую (с отличными от нуля интегралами от поля $\mathbf{u}$ но некоторым замкнутым контурам). Примером такого положения является решение Бенара (см., например, [1]) в физических условиях стационарного переноса тепла в слое жидкости между двумя параллельными плоскостями с различными температурами на них, когда возникает вихревое конвективное течение в слое жидкости, наряду с существованием формального решения с нулевым нолем $\mathbf{u}$. Можно надеяться на единственность решения краевой задачи для системы (4-6) при исключении вихревой составляющей течения, то есть в условиях, когда поле $\mathbf{u}$ является потенциальным, когда существует скалярное поле $\Psi(\mathbf{x})$ на Ω такое, что $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \nabla\Psi(\mathbf{x})$.

По описанным выше причинам, особое значение в газодинамике приобретают построение асимптотических разложений для нолей $\mathbf{u}$, ρ, T по каким-то параметрам, характеризующим среду и совершаемое ею движение. Это касается как построения решений задачи Коши с фиксированными начальными условиями для системы (1-3), так и стационарных задач – решений системы (4-6) с фиксированными граничными условиями. Неизвестно, являются такие разложения, удовлетворяющие с контролируемой степенью точности системе уравнений по параметру(ам) разложения, сходящимися, так как их сходимость, как раз, и приводила бы к доказательству существования решения. Однако, ввиду их прикладной ценности, они являются самостоятельным объектом математического исследования. В настоящей работе предлагается схема построения асимптотических разложений но малому параметру решений стационарной системы уравнений в том частном случае, когда уравнение (6) исключается из рассмотрения. При этом мы ограничиваемся постоянными коэффициентами μ и η, а в уравнении состояния газа (жидкости) функция $P(\rho)$ ($T = \mathrm{const}$) полагается линейной, то есть

$$P = \nu^2(\rho - \rho_0) + P_0\,,$$

где ν – скорость звука в среде. Таким образом, физически, допустимы только очень малые изменения плотности ρ в процессе движения. Исследуемая система уравнений в этом случае приобретает вид

$$\frac{\nu^2}{\rho}\nabla_k\rho + (\mathbf{u},\nabla)u_k = (\mu+\eta)\Delta u_k + \frac{\mu}{3}\nabla_k(\nabla,\mathbf{u})\,, \tag{7}$$

$$(\nabla\rho,\mathbf{u}) + \rho(\nabla,\mathbf{u}) = 0\,. \tag{8}$$

Ввиду сказанного выше, поле $\mathbf{u}$ предполагается потенциальным. Покажем, что такая постановка задачи является самосогласованной для системы (7), (8), так как в условиях потенциальности поля $\mathbf{u}$ система (7), (8) становится переопределенной. Положим в этой системе уравнений $\mathbf{u} = \nabla\Psi$. Тогда она преобразуется в систему

$$\frac{\nu^2}{\rho}\nabla_k\rho + \nabla_m\Psi\nabla_m\nabla_k\Psi = \nabla_k\Big(4\mu/3 + \eta\Big)\Delta\Psi\,, \tag{9}$$

$$(\nabla_m\rho)(\nabla_m\Psi) + \rho\Delta\Psi = 0\,. \tag{10}$$

Здесь и далее мы используем соглашение о применении повторяющихся индексов, принятое в тензорной алгебре. Система уравнений (9),(10) — переопределенная, так как она представляет собой 4 уравнения для двух функций Ψ и ρ. Так как $\nabla_k\rho/\rho = \nabla_k g$, то для самосогласованности системы (9), (10) нужно, чтобы выражение $\nabla_m\Psi\nabla_m\nabla_k\Psi$ являлось градиентом какой-то функции. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$\varepsilon_{jkl}\nabla_k\nabla_m\Psi\nabla_m\nabla_l\Psi \equiv 0\,,$$

где ε_{jkl} – тензорный символ Леви-Чивитта. Выражение в левой части преобразуется к виду

$$\varepsilon_{jkl}\Big(\nabla_k\nabla_m\Psi\Big)\Big(\nabla_m\nabla_l\Psi\Big) + \nabla_m\Psi\nabla_m\Big(\varepsilon_{jkl}\nabla_k\nabla_l\Psi\Big)\,,$$

из которого его тождественное равенство нулю становится очевидным, так как антисимметричный символ Леви-Чивитта сворачивается по индексам k, l с симметричными в обоих слагаемых по этим индексам выражениями.

2. Построение асимптотических разложений. Будем изучать стационарные течения газа в следующих физических условиях. Во-первых, будем предполагать малой в каждой пространственной точке $\mathbf{x}$ абсолютную величину скорости $|\mathbf{u}|$. Кроме того, будем считать малыми все пространственные производные от этих величин. Причем, если ввести малый параметр ε, который является мерой малости указанных физических величин, то мы положим, что $\mathbf{u} \sim \varepsilon$, $\nabla_j u_k \sim \varepsilon^2$, $\nabla_j \rho \sim \varepsilon^2$ (для этого градиента такое положение связано с тем, что в задаче предполагаются малыми отклонения $(\rho - \rho_0)$). Соответственно, вторые производные по пространственным координатам предполагаются пропорциональными ε^3. Тогда, для формулировки системы уравнений, для которой будут строиться асимптотические разложения решений произведем в уравнениях (7), (8) замены $\mathbf{u} \Rightarrow \varepsilon\mathbf{u}$, $\nabla_j u_k \Rightarrow \varepsilon^2 \nabla_j u_k$, $\nabla_j \rho \Rightarrow \varepsilon^2 \nabla_j \rho$ и, соответственно, умножим частные производные второго порядка от ρ и $\mathbf{u}$ на ε^3. Тогда, вводя, вместо ρ функцию $\ln\rho = g$ так, что $\nabla g = \nabla\rho/\rho$ получим исследуемую в дальнейшем систему уравнений

$$(\nabla, \mathbf{u}) + \varepsilon(\nabla g, \mathbf{u}) = 0\,, \tag{11}$$

$$\nu^2 \nabla_k g + \varepsilon(\mathbf{u}, \nabla) u_k = \varepsilon(\mu + \eta)\Delta u_k + \varepsilon\frac{\mu}{3}\nabla_k(\nabla, \mathbf{u})\,, \quad k = 1, 2, 3\,. \tag{12}$$

Для построения асимптотического разложения по степеням параметра ε решений этой системы нужно, чтобы были однозначно разрешимы уравнения нулевого приближения

$$\nabla_k g = 0\,, \qquad g = \mathrm{const}\,; \qquad (\nabla, \mathbf{u}) = 0\,.$$

Отсюда следует, что для однозначности построения конструируемых нами асимптотических разложений необходима потенциальность поля $\mathbf{u} = \nabla\Psi$. В этом случае последнее уравнение принимает вид $\Delta\Psi = 0$, которое однозначно (с точностью до постоянной) разрешимо при заданных граничных условиях для $\nabla\Psi$.

Производя замену поля $\mathbf{u}$ на $\nabla\Psi$ в уравнения (11), (12) или, что то же самое, вводя параметр ε в уравнения (9), (10) получим исходную систему уравнений для построения асимптотических разложений решений системы (7), (8):

$$\varepsilon(\nabla g, \nabla\Psi) + \Delta\Psi = 0\,, \tag{13}$$

$$\varkappa\nabla_k g + \varepsilon(\nabla\Psi, \nabla)\nabla_k\Psi = \varepsilon\Big(4\mu/3 + \eta\Big)\nabla_k\Delta\Psi\,, \quad k = 1, 2, 3\,. \tag{14}$$

Заметим, что для плотности ρ (и, соответственно, для функции g) граничные условия не задаются. Ее достаточно задать хотя бы в одной пространственной точке. Это тесно связано с тем, что исходная система уравнений содержит только частные производные первого порядка от ρ.

Наконец, укажем, что в совокупность граничных условий для поля скоростей $\mathbf{u}$ нужно обязательно включить условие непротекания газа (жидкости) через границу области Ω.[1)] С точки зрения потенциала Ψ это означает, что нормальная по отношению к границе производная от него должна обращаться на границе $\partial\Omega$. Однако, это условие не

[1]Мыслимы постановки задачи с полупроницаемой границей, где придется отказаться от этого условия.

означает, что решение уравнения $\Delta\Psi = 0$ сведется к постоянной, так как такое положение имеет место, главным образом, для компактных областей Ω, в которых строиться решение.

Выясним теперь, наконец, структуру асимптотических разложений решений. Докажем следующее утверждение.

Теорема. *Асимптотические степенные ряды для потенциала Ψ и плотности ρ вида*

$$\Psi = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k}\Psi^{(2k)}\,, \tag{15}$$

$$g = g_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{2k-1} g^{(2k-1)} \tag{16}$$

удовлетворяют системе уравнений (13), (14) и заданным граничным условиям краевой задачи, если $\Psi^{(0)}$ удовлетворяет этим же граничным условиям и уравнению $\Delta\Psi^{(0)} = 0$, а $g^{(0)} = const$.

При определении каждого приближения $\Psi^{(2k)}$, $g^{(2k-1)}$ порядка $k \in \mathbb{N}$ сначала вычисляется градиент $\nabla g^{(2k-1)}$ по формуле

$$\nu^2\nabla_m g^{(2k-1)} = -\sum_{l=0}^{k-1}\big(\nabla\Psi^{(2(k-l-1))},\nabla\big)\nabla_m\Psi^{(2l)} + \big(4\mu/3+\eta\big)\nabla_m\Delta\Psi^{(2(k-1))}\,, \qquad m = 1,2,3\,, \tag{17}$$

а затем находится решение неоднородного уравнения

$$\Delta\Psi^{(2k)} = Q_k(\nabla g^{(l)}, \nabla\Psi^{(m)})$$

с нулевыми граничными условиями, в котором правая часть полностью определяется приближениями $\Psi^{(2(l-1))}, g^{(2l-1)}$, $l = 1 \div k$.

□ Доказательство производится непосредственной подстановкой (15), (16) в уравнения (13), (14) и балансом по степеням параметра ε. Из уравнения (13) получаем

$$(\nabla g, \nabla\Psi) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\varepsilon^{2m+2l-1}(\nabla g^{(2m-1)}, \nabla\Psi^{(2l)}) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{2k-1}\sum_{l=0}^{k-1}(\nabla g^{2(k-l)-1}, \nabla\Psi^{(2l)})\,,$$

$$\Delta\Psi^{(2k)} + \sum_{l=0}^{k-1}(\nabla g^{2(k-l)-1}, \nabla\Psi^{(2l)}) = 0\,,$$

где в правую часть входят только функции $g^{(2l+1)}$ и $\Psi^{(2l)}$ с $l = 0 \div (k-1)$.

Из уравнения (14) имеем

$$\nu^2\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{2k+1}\nabla_m g^{(2k+1)} + \varepsilon\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{2k}\sum_{l=0}^{k}(\nabla\Psi^{(k-l)}, \nabla)\nabla_m\Psi^{(l)} = \varepsilon\big(4\mu/3+\eta\big)\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{2k}\nabla_m\Delta\Psi^{(2k)}\,,$$

так, что степенной баланс приводит к формуле (17), в правую часть которой входят только функции $g^{(2l-1)}$ и $\Psi^{(2(l-1))}$ с $l = 1 \div k$. ■

3. Пример. В заключение рассмотрим точно решаемый пример, который несколько проясняет смысл построенных асимптотических разложений. Рассмотрим одномерное течение (например но трубе без трения о стенки и с перепадом давления на концах трубы) так, что скорость течения $\mathbf{u}$ заменяется на u, которая является функцией только одной координаты x. Тогда уравнения (11), (12) при $\varepsilon = 1$ запишутся в виде

$$uu' + \nu^2 g' = (4\mu/3\mu + \eta)u'' \,, \quad g'u + u' = 0 \,.$$

Из второго уравнения имеем $u'/u = -g'$ или, после интегрирования, $u = u_0\rho_0/\rho$. Подстановка в первое уравнение приводит к уравнению

$$uu' - \nu^2 \frac{u'}{u} = (4\mu/3 + \eta)u'' \,,$$

которое решается в квадратурах

$$\frac{u^2}{2} - \nu^2 \ln\, u + c = (4\mu/3 + \eta)u' \,,$$

где c – постоянная интегрирования, которая может быть как положительной, так и отрицательной,

$$(4\mu/3 + \eta) \int_{u_0}^{u} \frac{du}{u^2/2 - \nu^2 \ln\, u + c} = x \,.$$

Если ввести в уравнения малый параметр ε, как это сделано в (11), (12), то

$$\frac{u'}{u} + \varepsilon g' = 0 \tag{18}$$

$$\varepsilon uu' + \nu^2 g' = \varepsilon(4\mu/3 + \eta)u'' \,, \tag{19}$$

и, следовательно, квадратура заменится на следующую

$$(4\mu/3 + \eta) \int_{u_0}^{u} \frac{du}{u^2/2 - (\nu^2/\varepsilon^2) \ln\, u + c} = x \,,$$

которая не допускает разложения но степеням малого параметра. Однако, если действовать напрямую, то есть строить ряд но степеням ε исходя из уравнений (18), (19), то получим особое решение, которое не содержится в квадратуре, ввиду обращения в нуль знаменателя. Оно в нулевом приближении но ε дает $u' = 0$, $u = u_0$, $g' = 0$, а все последующие приближения, как легко проверить, равны нулю.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика / М.: Наука, 1986.
2. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости / М.: Мир. 1967. – 310 с.

3. Хаппель Дж., Бреннер Х. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса / М.: Мир, 1976. (пер. с англ. Happel J., Brenner H. Low Reynolds Namber Hydrodynamics /Prentice-Hall: Englewood Cliffs, 1965).
4. Найфе А. Введение в методы возмущений / М.: Мир. 1984. – 535 с.

ASYMPTOTIC EXPANSIONS OF GAS-DYNAMICS EQUATIONS SOLUTIONS OF STATIONARY POTENTIAL FLOWS

Yu.P. Virchenko, N.N. Samoilova

Belgorod State University,
Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.com

Abstract. It is proposed the general construction of asymptotic expansions of gas-dynamics equations solutions which describe stationary vortex-free flows.

Key words: Navier-Stokes equation, stationary problems, compressibility, potential flow, asymptotic expansion.