MSC 30E05

# БЛОЧНЫЕ МАТРИЦЫ ЯКОБИ И МАТРИЧНАЯ ПРОБЛЕМА МОМЕНТОВ ГАМБУРГЕРА

**Ю.М. Дюкарев**

Белгородский государственный аграрный университет им. В.Я. Горина,
ул. Вавилова, 1, п. Майский, Белгород, 308503, Россия,
e-mail: yu.dyukarev@karazin.ua

**Аннотация.** Блочной матрице Якоби соответствуют ортогональные матричные многочлены. В статье получены явные формулы, выражающие ортогональные многочлены через матричные моменты. Доказано, что дефектные числа матрицы Якоби совпадают с рангами радиусов предельных матричных кругов Вейля.

**Ключевые слова:** блочные матрицы Якоби, проблема моментов, ортогональные многочлены, дефектные числа симметрических операторов.

**1. Введение.** Пусть даны целые числа $m, n \geq 1$. Линейное пространство $m$-мерных комплексных столбцов $x = \mathrm{col}\big(x_1, x_2, \ldots, x_m\big)$ со скалярным произведением $(x, y) = \sum\limits_{j=1}^{m} \bar{x}_i y_j$ обозначим через $\mathbb{C}^m$. Через $\mathbb{C}^{m\times n}$ обозначим множество комплексных матриц с $m$ строками и $n$ столбцами. Пусть $\mathbb{C}_H^{m\times m} = \big\{A \in \mathbb{C}^{m\times m} : (Ax, y) = (x, Ay),\ \ \forall x, y \in \mathbb{C}^m\big\}$ обозначает множество эрмитовых матриц. Эрмитова матрица $A \in \mathbb{C}_H^{m\times m}$ называется неотрицательной, если $(x, Ax) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{C}^m$. Через $\mathbb{C}_{\geq}^{m\times m}$ обозначим множество неотрицательных матриц $m$-го порядка. Неотрицательная матрица $A \in \mathbb{C}_{\geq}^{m\times m}$ называется положительной, если $(x, Ax) > 0$ для всех ненулевых векторов $x \in \mathbb{C}^m$. Через $\mathbb{C}_{>}^{m\times m}$ обозначим множество положительных матриц $m$-го порядка. Единичную матрицу $m$-го порядка обозначим через $I_m$, а нулевую матрицу с $m$ строками и $n$ столбцами обозначим через $0_{m\times n}$. Для упрощения записи мы часто будем опускать индексы у матриц $I_m$ и $0_{m\times n}$, если эти индексы легко определяются из контекста. Для матриц $A, B \in \mathbb{C}_H^{m\times m}$ запись $A > B$ (соотв. $A \geq B$) обозначает, что $A - B \in \mathbb{C}_{>}^{m\times m}$ (соотв. $A - B \in \mathbb{C}_{\geq}^{m\times m}$).

Введем обозначения для числовых множеств $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z > 0\}$, $\mathbb{C}_- = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z < 0\}$.

Через $\mathfrak{B}$ обозначим $\sigma$-алгебру борелевских подмножеств множества вещественных чисел $\mathbb{R}$. Отображение $\sigma : \mathfrak{B} \to \mathbb{C}_{\geq}^{m\times m}$ называется неотрицательной матричной мерой, если

$$\sigma\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma(A_j)$$

для любой бесконечной последовательности $(A_j)_{j=1}^{\infty}$ попарно не пересекающихся борелевских подмножеств из $\mathbb{R}$.

В статье [1] были введены бесконечные матрицы Якоби

$$\mathbf{J}_m = \begin{pmatrix} A^{(0)} & B^{(0)} & 0 & 0 & \dots \\ B^{(0)^*} & A^{(1)} & B^{(1)} & 0 & \dots \\ 0 & B^{(1)^*} & A^{(2)} & B^{(2)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Здесь эрмитовы матрицы $A_j \in \mathbb{C}_H^{m\times m}$ и невырожденные матрицы $B_j \in \mathbb{C}^{m\times m}$.

Через $\ell^2(\mathbb{C}^m)$ обозначим гильбертово пространство бесконечных вектор-колонок

$$u = \mathrm{col}\,(u_0, u_1, u_2, \dots), \quad u_k \in \mathbb{C}^m, \quad \sum_{k=0}^{\infty} u_k^* u_k < +\infty .$$

Пусть $\ell_0^2(\mathbb{C}^m)$ обозначает незамкнутое подпространство в $\ell^2(\mathbb{C}^m)$, состоящее из финитных векторов.

С помощью матрицы Якоби (1) определим операцию $l : \ell_0^2(\mathbb{C}^m) \to \ell_0^2(\mathbb{C}^m)$

$$lu = \mathbf{J}_m u, \qquad \forall u \in \ell_0^2(\mathbb{C}^m).$$

Эта операция задаёт на $\ell_0^2(\mathbb{C}^m)$ незамкнутый симметрический оператор. Его замыкание обозначим через $\mathbf{L}_m$. Числа

$$m_+ = \dim\ker(\mathbf{L}_m^* - zI),\ z \in \mathbb{C}_+, \quad m_- = \dim\ker(\mathbf{L}_m^* - zI),\ z \in \mathbb{C}_- \tag{2}$$

не зависят от выбора точки $z$ из верхней и нижней полуплоскости соответственно и называются дефектными числами оператора $\mathbf{L}_m$. Хорошо известны следующие свойства оператора $\mathbf{L}_m$ (см. [1], [2]). Оператор $\mathbf{L}_m$, вообще говоря, не самосопряжён. Дефектные числа $m_+$ и $m_-$ удовлетворяют условиям

$$0 \le m_+ \le m, \qquad 0 \le m_- \le m.$$

В этих неравенствах максимального значения дефектные числа достигают одновременно $m_+ = m \ \Leftrightarrow\ m_- = m$. В статьях [3], [4] доказано, что если дефектные числа не максимальны, то они могут независимо друг от друга принимать любые значения от 0 до $m-1$.

По блочной матрице Якоби (1) построим последовательность матричных многочленов с помощью рекуррентных соотношений

$$P^{(0)}(z) \equiv I_m, \quad zP^{(0)}(z) = A^{(0)}P^{(0)}(z) + B^{(0)}P^{(1)}(z), \tag{3}$$

$$zP^{(j)}(z) = B^{(j-1)^*}P^{(j-1)}(z) + A^{(j)}P^{(j)}(z) + B^{(j)}P^{(j+1)}(z), \quad j \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

В [1] доказана следующая теорема.

**Теорема 1.** *Пусть последовательность матричных многочленов $P^{(j)}(z)$ определена формулами (3), (4). Тогда*

*1) матричный многочлен $P^{(j)}(z)$ является многочленом $j$-ой степени, и его коэффициенты являются $m \times m$ матрицами;*

*2) старший коэффициент матричного многочлена $P^{(j)}(z)$ является невырожденной матрицей;*

*3) существует неотрицательная $m \times m$ матричная мера $\sigma$ иа оси $\mathbb{R}$ такая, что матричные многочлены $P^{(j)}(z)$ ортонормированы относительно этой меры*

$$\int_{\mathbb{R}} P^{(j)}(t)\sigma(dt)P^{(k)^*}(t) = \delta_{jk}I_m\,, \qquad \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}; \tag{5}$$

*4) для всех $z \in \mathbb{C}$ существует предел*

$$K(z) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} P^{(j)^*}(z)P^{(j)}(z)\right)^{-1} \tag{6}$$

*и дефектные числа $m_+$ и $m_-$ могут быть вычислены по формулам*

$$m_+ = \operatorname{rank} K(z),\ \forall z \in \mathbb{C}_+, \quad m_- = \operatorname{rank} K(z),\ \forall z \in \mathbb{C}_-. \tag{7}$$

*Запись вида $P^{(j)^*}(z)$ всегда будет сокращением записи $(P^{(j)}(z))^*$.*

**2. Ассоциированная матричная проблема моментов Гамбургера.** С неотрицательной матричной мерой $\sigma$ из соотношений (5) свяжем матричную проблему моментов Гамбургера

$$s_j = \int_{\mathbb{R}} t^j\sigma(dt)\,, \qquad j \geq 0\,. \tag{8}$$

Непустое множество всех решений $\sigma$ проблемы (7) обозначим через $\mathcal{M}$.

Рассмотрим матрицу-функцию (МФ)

$$w(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sigma(dt)}{t-z}\,. \tag{9}$$

МФ $w$ определена и голоморфна в верхней полуплоскости и называется *ассоциированной* с проблемой моментов (7). Множество ассоциированных МФ $w$ обозначим символом $\mathcal{F}$. Из формулы обращения Стилтьеса вытекает, что соответствие между $\mathcal{F}$ и $\mathcal{M}$ является биективным.

Пусть в верхней полуплоскости зафиксирована некоторая точка $z_0$. Рассмотрим множество матриц

$$\mathcal{K}(z_0) = \{w(z_0) : w \in \mathcal{F}\}. \tag{10}$$

Существуют неотрицательные матрицы $r(z_0)$, $\rho(z_0)$ и матрица $c(z_0)$ такие, что множество матриц (10) можно записать в виде

$$\mathcal{K}(z_0) = \{c(z_0) + r(z_0)V\rho(z_0) : V^*V \leq I_m\}\,. \tag{11}$$

Множество матриц $\{V : V^*V \leq I\}$ естественно назвать единичным матричным кругом. Теперь из (11) следует, что множество матриц $\mathcal{K}(z_0)$ является образом единичного матричного круга при линейном матричном отображении. Поэтому множество $\mathcal{K}(z_0)$ естественно считать матричным кругом с центром в точке $c(z_0)$, левым радиусом $r(z_0)$ и правым радиусом $\rho(z_0)$. В контексте проблемы моментов $\mathcal{K}(z_0)$ называется *предельным матричным кругом Вейля* в точке $z_0$. Для всех $z_1, z_2 \in \mathbb{C}_+$ ранги левых и правых радиусов предельных матричных кругов Вейля удовлетворяют условиям

$$\delta_+ = \operatorname{rank} r(z_1) = \operatorname{rank} r(z_2), \quad \delta_- = \operatorname{rank} \rho(z_1) = \operatorname{rank} \rho(z_2). \tag{12}$$

Числа $\delta_\pm$ удовлетворяют неравенствам $0 \leq \delta_\pm \leq m$ и характеризуют степень вырожденности множества решений матричной проблемы моментов Гамбургера. Если хотя бы одно из чисел $\delta_\pm$ равно нулю, то матричная проблема моментов Гамбургера называется вполне определённой (множество $\mathcal{F}$ состоит из единственной МФ). Если $\delta_+ = \delta_- = m$, то матричная проблема моментов Гамбургера называется вполне неопределённой (множество $\mathcal{F}$ состоит из бесконечного множества МФ и невырождено). Во всех остальных случаях матричная проблема моментов Гамбургера называется полуопределённой (множество $\mathcal{F}$ состоит из бесконечного множества МФ и вырождено из-за вырожденности матричных радиусов кругов Вейля).

**3. Ортонормированные матричные многочлены и проблема моментов.** Для исследования матричных проблем моментов широко применяются ортонормированные матричные многочлены, матричные круги и интервалы Вейля [5]- [13]. По последовательности матричных моментов (8) построим следующие блочные матрицы:

$$\begin{aligned}
&H^{(l)} = \left(s_{j+k}\right)_{j,k=0}^{l}, \quad l \geq 0\,,\\
&T^{(0)} = 0_{m\times m}\,, \quad T^{(l)} = \begin{pmatrix} 0_{m\times ml} & 0_{m\times m} \\ I_{ml} & 0_{ml\times m} \end{pmatrix}, \quad l > 0,\\
&B^{(l)} = \operatorname{col}\left(s_l, \ldots, s_{2l-1}\right), \quad l \geq 0\\
&v^{(l)} = \operatorname{col}\left(I_m, 0_{m\times ml}\right), \quad V^{(l)} = \operatorname{col}\left(0_{m\times ml}, I_m\right), \quad l \geq 0\,,\\
&R^{(l)}(z) = \left(I_{(l+1)m} - zT^{(l)}\right)^{-1}, \quad l \geq 0\,,\\
&u^{(0)} = 0,\ u^{(l)} = \operatorname{col}\left(0, -s_0, \ldots, -s_{l-1}\right), \quad l > 0\,.
\end{aligned} \tag{13}$$

Имеют место очевидные равенства

$$H^{(l)} = \begin{pmatrix} H^{(l-1)} & B^{(l)} \\ B^{(l)^*} & C^{(l)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ B^{(l)^*} H^{(l-1)^{-1}} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H^{(l-1)} & 0 \\ 0 & \widehat{H}^{(l)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & H^{(l-1)^{-1}} B^{(l)} \\ 0 & I \end{pmatrix},$$
$$l \geq 1\,. \tag{14}$$

Здесь $C^{(l)} = s_{2l+1-r}$ и

$$\widehat{H}^{(l)} = \begin{cases} C^{(l)} - B^{(l)^*} H^{(l-1)^{-1}} B^{(l)} > 0, & l > 0\,;\\ H^{(0)^{-1}}, & l = 0\,. \end{cases} \tag{15}$$

Из неравенства $H^{(l)} > 0$ и (14) следует, что $\widehat{H}^{(l)} > 0$. Поэтому при $l \geq 1$ из (14) имеем

$$H^{(l)^{-1}} = \begin{pmatrix} I & -H^{(l-1)^{-1}}B^{(l)} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H^{(l-1)^{-1}} & 0 \\ 0 & \widehat{H}^{(l)^{-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -B^{(l)^*}H^{(l-1)^{-1}} & I \end{pmatrix}. \tag{16}$$

И, следовательно,

$$\begin{aligned} V^{(l)^*}H^{(l)^{-1}} &= \widehat{H}^{(l)^{-1}}\begin{pmatrix} -B^{(l)^*}H^{(l-1)^{-1}} & I \end{pmatrix}, \\ V^{(l)^*}H^{(l)^{-1}}V^{(l)^*} &= \widehat{H}^{(l)^{-1}}, \quad l \geq 1\,. \end{aligned} \tag{17}$$

**Теорема 2.** *Пусть матричная мера $\sigma$ участвует в равенствах (5), (8) и две бесконечных последовательности матричных многочленов $\tilde{P}^{(j)}(z)$, $\tilde{Q}^{(j)}(z)$ заданы явными формулами*

$$\tilde{P}^{(j)}(z) = \widehat{H}^{(j)^{1/2}}V^{(j)^*}H^{(j)^{-1}}R^{(j)}(z)v^{(j)}\,, \tag{18}$$

$$\tilde{Q}^{(j)}(z) = \widehat{H}^{(j)^{1/2}}V^{(j)^*}H^{(j)^{-1}}R^{(j)}(z)u^{(j)}\,, \quad j \geq 0\,. \tag{19}$$

*Тогда:*

*1) матричный многочлен $\tilde{P}^{(j)}(t)$ является многочленом $j$-ой степени, и его коэффициенты являются $m \times m$ матрицами;*

*2) старший коэффициент матричного многочлена $\tilde{P}^{(j)}(t)$ является положительной матрицей;*

*3) матричные многочлены $\tilde{P}^{(j)}(t)$ ортонормированы относительно меры $\sigma$*

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{P}^{(j)}(t)\sigma(dt)\tilde{P}^{(k)^*}(t) = \delta_{jk}I_m\,, \qquad \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k\,; \\ 0, & j \neq k\,. \end{cases} \tag{20}$$

*4) матричные многочлены $\tilde{Q}^{(j)}(z)$ являются многочленами 2-го рода*

$$\tilde{Q}^{(j)}(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\tilde{P}^{(j)}(t) - \tilde{P}^{(j)}(z)}{t - z}\sigma(dt)\,. \tag{21}$$

□ При $j = 0$ утверждение о степени и положительности старших коэффициентов многочленов $\tilde{P}^{(0)}$ очевидно. При $j > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \tilde{P}^{(j)}(z) &= \widehat{H}^{(j)^{1/2}}V^{(j)^*}H^{(j)^{-1}}\mathrm{col}\Big(I,\, zI, \ldots, z^nI\Big) = z^n\widehat{H}^{(j)^{1/2}}V^{(j)^*}H^{(j)^{-1}}V^{(j)} + \cdots \\ &= z^n\widehat{H}^{(j)^{1/2}}\widehat{H}^{(j)^{-1}} + \cdots = z^n\widehat{H}^{(j)^{-1/2}} + \cdots\,. \end{aligned}$$

Таким образом, матричный многочлен $\tilde{P}^{(j)}(z)$ является матричным многочленом $j$-ой степени с положительным старшим коэффициентом $\widehat{H}^{(j)^{-1/2}} > 0$.

Пусть матричная мера $\sigma$ участвует в равенствах (5), (8). При $j = 0$ имеем

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{P}^{(0)}\sigma(dt)\tilde{P}^{(0)^*} = H^{(0)^{-\frac{1}{2}}} H^{(0)} H^{(0)^{-\frac{1}{2}}} = I_m\,, \quad r = 1, 2\,.$$

При $j > 0$ имеем

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{P}^{(j)}(t)\sigma(dt)\tilde{P}^{(j)^*}(t) =$$

$$= \widehat{H}^{(j)^{1/2}} V^{(j)^*} H^{(j)^{-1}} \int_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} I \\ tI \\ \vdots \\ t^l I \end{pmatrix} \sigma(dt)\Big(I,\, tI, \ldots, t^l I\Big) H^{(j)^{-1}} V^{(j)} \widehat{H}^{(j)^{1/2}}$$

$$= \widehat{H}^{(j)^{1/2}} V^{(j)^*} H^{(j)^{-1}} \begin{pmatrix} \int_{\mathbb{R}} t^0 \sigma(dt) & \ldots & \int_{\mathbb{R}} t^l \sigma(dt) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{\mathbb{R}} t^l \sigma(dt) & \ldots & \int_{\mathbb{R}} t^{2l} \sigma(dt) \end{pmatrix}$$

$$\times\; H^{(j)^{-1}} V^{(j)^*} \widehat{H}^{(j)^{1/2}} = \widehat{H}^{(j)^{1/2}} V^{(j)^*} H^{(j)^{-1}} H^{(j)} H^{(j)^{-1}} V^{(j)} \widehat{H}^{(j)^{1/2}}$$

$$= \widehat{H}^{(j)^{1/2}} V^{(j)^*} H^{(j)^{-1}} V^{(j)} \widehat{H}^{(j)^{1/2}} = \widehat{H}^{(j)^{1/2}} \widehat{H}^{(j)^{-1}} \widehat{H}^{(j)^{1/2}} = I_m\,.$$

Пусть теперь $j \neq k$. Предположим, для определённости, что $j > k > 0$ и $r = 1$. Имеем

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{P}^{(j)}(t)\sigma(dt)\tilde{P}^{(k)^*}(t) =$$

$$= \widehat{H}^{(j)^{1/2}} V^{(j)^*} H^{(j)^{-1}} \int_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} I \\ tI \\ \vdots \\ t^l I \end{pmatrix} \sigma(dt)\Big(I,\, tI, \ldots, t^k I\Big) H^{(k)^{-1}} V^{(k)} \widehat{H}^{(k)^{1/2}}$$

$$= \widehat{H}^{(j)^{1/2}} V^{(j)^*} H^{(j)^{-1}} \begin{pmatrix} s_0 & \ldots & s_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_l & \ldots & s_{l+k} \end{pmatrix} H^{(k)^{-1}} V^{(k)} \widehat{H}^{(k)^{1/2}}$$

$$= \widehat{H}^{(j)^{1/2}} V^{(j)^*} \begin{pmatrix} I_{(k+1)m} \\ 0_{(l-k-1)m\times(k+1)m} \end{pmatrix} H^{(k)^{-1}} V^{(k)} \widehat{H}^{(k)^{1/2}}$$

$$= \widehat{H}^{(j)^{1/2}} 0_{m\times(k+1)m} H^{(k)^{-1}} V^{(k)} \widehat{H}^{(k)^{1/2}} = 0_{m\times m}\,.$$

Покажем, что при $j \geq 0$ матричные многочлены $\tilde{Q}^{(j)}$ являются матричными многочленами второго рода для многочленов $\tilde{P}^{(j)}$. При $j = 0$ наше утверждение очевидно.

При $j \geq 1$, воспользовавшись очевидным тождеством

$$\frac{R^{(j)}(t) - R^{(j)}(z)}{t - z} = -R^{(j)}(z) T^{(j)} R^{(j)}(t) \,,$$

получим

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \frac{\tilde{P}^{(j)}(t) - \tilde{P}^{(j)}(z)}{t - z} \sigma(dt) = \widehat{H}^{(j)^{1/2}} V^{(j)^*} H^{(j)^{-1}} \\
&\times \int_{\mathbb{R}} \frac{R^{(j)}(t) - R^{(j)}(z)}{t - z} v^{(j)} \sigma(dt) = -\widehat{H}^{(j)^{1/2}} V^{(j)^*} H^{(j)^{-1}} R^{(j)}(z) T^{(j)} \\
&\times \int_{\mathbb{R}} R^{(j)}(t) v^{(j)} \sigma(dt) = -\widehat{H}^{(j)^{1/2}} V^{(j)^*} H^{(j)^{-1}} R^{(j)}(z) T^{(j)} \mathrm{col}\big(s_0, \ldots, s_l\big) \\
&= \widehat{H}^{(j)^{1/2}} V^{(j)^*} H^{(j)^{-1}} R^{(j)}(z) u^{(j)} = \tilde{Q}^{(j)}(z) \,. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Радиусы и центр предельного матричного круга Вейля (11) выражаются через матричные многочлены $\tilde{P}^{(j)}$ и $\tilde{Q}^{(j)}$ следующим образом (см. [5]):

$$\begin{aligned}
r(z_0) &= \lim_{l \to \infty} \left( \left( i(\bar{z}_0 - z_0) \sum_{j=0}^{l} \tilde{P}^{(j)^*}(z_0) \tilde{P}^{(j)}(z_0) \right)^{-1/2} \right) , \\
\rho(z_0) &= \lim_{l \to \infty} \left( \left( i(\bar{z}_0 - z_0) \sum_{j=0}^{l} \tilde{P}^{(j)^*}(\bar{z}_0) \tilde{P}^{(j)}(\bar{z}_0) \right)^{-1/2} \right) , \\
c(z_0) &= \lim_{l \to \infty} \left( \left( i(\bar{z}_0 - z_0) \sum_{j=0}^{l} \tilde{P}^{(j)^*}(z_0) \tilde{P}^{(j)}(z_0) \right)^{-1} \right. \\
&\qquad \left. \times \left( -i(\bar{z}_0 - z_0) \sum_{j=0}^{l} \tilde{Q}^{(j)^*}(z_0) \tilde{P}^{(j)}(z_0) - iI \right)^* \right) .
\end{aligned}$$

**Теорема 3.** *Пусть матрица Якоби $\mathbf{J}_m$ вида (1) порождает симметрический оператор $\mathbf{L}_m$ и его дефектные числа равны $m_\pm$. Пусть многочлены $P^{(j)}$ определены формулами (3), (4) и матричная $m \times m$ мера $\sigma$ участвует в соотношениях ортогональности (5). И пусть, далее, для построенной по этой мере $\sigma$ матричной проблемы моментов Гамбургера (7) ранги радиусов предельных кругов Вейля равны $\delta_\pm$. Тогда:*

*1) дефектные числа оператора $\mathbf{L}_m$ равны рангам радиусов предельного круга Вейля*

$$m_+ = \delta_+ \,, \qquad m_- = \delta_- \,; \tag{22}$$

*2) для любого фиксированного числа $m \geq 1$ и чисел $\delta_\pm$ таких, что $0 \leq \delta_+, \delta_- \leq m-1$ или $\delta_+ = \delta_- = m$, существует проблема моментов Гамбургера с $m \times m$ матричными моментами и рангами радиусов предельных кругов Вейля равными $\delta_+$ и $\delta_-$ соответственно.*

□ Пусть матричные многочлены $P_j$ (соотв. $\tilde{P}_j$) заданы формулами (3), (4) (соотв. (18)). Эти многочлены ортонормированы относительно одной и той же неотрицательной

$m \times m$ матричной меры $\sigma$ из (5). Но тогда (см. [14]) существует последовательность унитарных матриц $U_j$ такая, что $P_j = U_j\tilde{P}_j$. Отсюда следует, что $P_j^* P_j = \tilde{P}_j^* U_j^* U_j \tilde{P}_j = \tilde{P}_j^* \tilde{P}_j$. Для любой точки $z_0 \in \mathbb{C}_+$ имеем

$$\begin{aligned}\ker K(z_0) &= \ker \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} P^{(j)^*}(z_0)P^{(j)}(z_0)\right)^{-1} = \ker \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} \tilde{P}^{(j)^*}(z_0)\tilde{P}^{(j)}(z_0)\right)^{-1} \\ &= \ker \lim_{n\to\infty}\left(i(\bar{z}_0 - z_0)\sum_{j=0}^{n} \tilde{P}^{(j)^*}(z_0)\tilde{P}^{(j)}(z_0)\right)^{-1/2} = \ker r(z_0)\,.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\operatorname{rank} K(z_0) = \operatorname{rank} r(z_0)$, т.е. $m_+ = \delta_+$. Аналогичным образом, убеждаемся в том, что $m_- = \delta_-$. Первое утверждение теоремы доказано.

В [3], [4] доказано существование блочных матриц Якоби вида (1), порождающих симметрические операторы с любыми возможными дефектными числами. Отсюда и из первого утверждения теоремы немедленно следует второе утверждение теоремы. ■

**Литература**


1. Крейн М.Г. Бесконечные $J$ матрицы и матричная проблема моментов // Докл. АН СССР. – 1949. – 69;3. – С.125-128.
2. Коган В.И. Об операторах, порождённых $l_p$-матрицами в случае максимальных индексов дефекта // Теория функций, функц. анализ и их прилож. – 1970. – 11. – С.103-107.
3. Дюкарев Ю.М. О дефектных числах симметрических операторов, порождённых блочными матрицами Якоби // Матем. сб. – 2006. – 197;8. – С.73-100.
4. Дюкарев Ю.М. Примеры блочных матриц Якоби, порождающих симметрические операторы с любыми возможными дефектными числами // Матем. сб. – 2010. – 201;12. – С.83-92.
5. Ахиезер Н.И. Классическая проблема моментов / Физматгиз: М., 1961. – 310 с.
6. Arov D.Z., Dym H. $J$-contractive matrix valued functions and related topics / Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 116.: Cambridge University Press, 2008. – 565 с.
7. Ковалишина И.В., Потапов В.П. Индефинитная метрика в проблеме Неванлинны-Пика // ДАН Арм. ССР. – 1974. – 59;1. – С.17-22.
8. Потапов В.П. Мультипликативная структура $J$-растягивающих матриц-функций // Труды ММО. – 1955. – 4. – С.125-236.
9. Ковалишина И.В. Аналитическая теория одного класса интерполяционных задач // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1983. – 47;3. – С.455-497.
10. Нудельман А.А. Об одной проблеме типа проблемы моментов // Докл. АН СССР. – 1977. – 233;5. – С.79-795.
11. Дюкарев Ю.М. О неопределённости интерполяционных задач для неванлинновских функций // Известия высших учебных заведений. Серия «Математика». – 2004. – 507;8. – С.26-38.
12. Дюкарев Ю.М. О неопределённости интерполяционных задач в классе Стилтьеса // Математический сборник. – 2005. – 196;3. – С.61-88.
13. Дюкарев Ю.М. Обобщённый критерий Стилтьеса полной неопределённости интерполяционных задач // Матем. заметки. – 2008. – 84;1. – С.23-39.
14. Damanik D., Pushnitski A., Simon B. The Analytic Theory of Matrix Orthogonal Polynomials // Surv. Approx. Theory. – 2008. – 4. – P.1-85.

# BLOCK JACOBI's MATRICES AND MATRIX HAMBURGER's MOMENT PROBLEM

**Yu. M. Dyukarev**

Belgorod State Agricultural University,
Vavilova St., 1, Maiskiy, Belgorod, 308503, Russia, e-mail: yu.dyukarev@karazin.ua

**Abstract.** Some orthogonal matrix polynomials are connected with corresponding block Jacobi's matrix. It has been obtained explicit formulas expressing the orthogonal polynomials through matrix moments. It is proved that defect numbers of the Jacobi matrix coincide with ranks of Weil's limiting matrix disks radii.

**Key words:** Jacobi's block matrix, moments problem, orthogonal polynomials, defective numbers of symmetrical operators.