MSC 34M50

ЗАДАЧА РИМАНА-ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А.П. Солдатов, Вьонг К. Чан

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, 308007, Белгород, e-mail: soldatov48@gmail.com

Аннотация. Рассмотрена классическая задача линейного сопряжения для бианалитических функций на гладком контуре. Получена явная формула решения задачи и описаны необходимые и достаточные условия ее разрешимости.

Ключевые слова: задача линейного сопряжения, бианалитические функции, ориентируемый контур, класс Гельдера.

Пусть на комплексной плоскости задан ориентируемый гладкий контур Γ, состоящий из простых контуров $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$. Тогда дополнение к нему $D = \mathbb{C} \setminus \Gamma$ состоит из некоторого числа областей D_0, $D_1, \ldots, D_m$, из которых область D_0 бесконечна и содержит окрестность бесконечно удаленной точки ∞, а остальные области конечны. Рассмотрим в этих областях бианалитическую функцию ϕ, т.е. функцию $\phi \in C^2(D)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{z}^2} = 0\,.$$

Хорошо известно [1, 2], что она выражается через пару аналитических функций ϕ_0, ϕ_1 по формуле Гурса

$$\phi(z) = \phi_0(z) + \bar{z}\phi_1(z)\,, \quad z \in D\,, \tag{1}$$

где $\phi_1 = \partial\phi/\partial\bar{z}$.

Пусть бианалитическая в D функция ϕ вместе с частной производной $\phi_1 = \partial\phi/\partial\bar{z}$ непрерывна в замкнутых областях $\overline{D}_j$, так что определены односторонние граничные значения $\phi^{\pm}$ и $\phi_1^{\pm}$ на Γ. Тогда можно рассмотреть задачу линейного сопряжения

$$\phi^+ - G_0\phi^- = f_0\,, \quad \left(\frac{\partial\phi}{\partial\bar{z}}\right)^+ - G_1\left(\frac{\partial\phi}{\partial\bar{z}}\right)^- = f_1\,, \tag{2}$$

где коэффициенты G_k и правые части f_k заданы, причем $G_k(t) \neq 0$ для всех $t \in \Gamma$.

В дальнейшем предполагается, что функции G_k, f_k принадлежат классу Гельдера $C^\mu(\Gamma)$, а решение ищется в классе

$$\phi,\ \phi_1 \in C^\mu(\overline{D}_j)\,,\ 1 \le j \le m; \quad \phi,\ \phi_1 \in C^\mu(\overline{D}_0 \cap \{|z| \le R\})\,, \tag{3}$$

Работа выполнена при поддержке Международного проекта (0113РК01031) Министерства образования и науки Республики Казахстан.

где здесь и ниже $\phi_1 = \partial\phi/\partial\bar{z}$ и $R > 0$ выбрано по условию $\Gamma \subseteq \{|z| < R\}$. Кроме того, для заданного целого k поведение ϕ па бесконечности подчинено оценке

$$|\phi(z)| + |\bar{z}\phi_1(z)| \le C|z|^{k-1} \text{ при } |z| \ge R\,. \tag{4}$$

Задачи подобного типа исследовались многими авторами (см..например, [3, 4]), как правило, в классе функций, ограниченных на бесконечности. Схема ее решения хорошо известна [5]. С помощью представления (1) она последовательно сводится к задачам аналогичного вида для аналитических функций. Однако в общем случае произвольных функций G_0, G_1 явного решения получено не было (см. например, [5], стр. 318-319). В настоящей статье приведем явное решение этой задачи для любого значения k в оценке (4) и опишем точные условия ее разрешимости.

Пусть $æ_k = \operatorname{Ind} G_k$, $k = 0, 1$, есть индекс Коши функции G_k, т.е. если выбраны точки $\tau_j \in \Gamma_j$ и непрерывные на $\Gamma_j \setminus \tau_j$ ветви $\arg G_k$, то

$$æ_k = \frac{1}{2\pi}\sum\nolimits_{j=1}^{m}[(\arg G_k)(\tau_j - 0) - (\arg G_k)(\tau_j + 0)]\,, \tag{5}$$

где односторонние предельные значения в точках τ_j понимаются по отношению к ориентациям на контурах Γ_j. Пусть X_k есть каноническая функция задачи линейного сопряжения для аналитических функций, отвечающая коэффициенту G_k. Напомним [6], что эта функция всюду отлична от нуля, включая предельные значения $X_k^{\pm}$, удовлетворяет краевому условию

$$X_k^+ = G_k X_k^- \tag{6}$$

и подчинена поведению

$$\lim_{z\to\infty} z^{æ_k} X_k(z) = 1 \tag{7}$$

на бесконечности. Хорошо известно [6], что функция X_k с этими свойствами определяется единственным образом, причем $X_k^{\pm} \in C^{\mu}(\Gamma)$.

Положим

$$A(t) = \frac{\bar{t}[G_1(t) + G_0(t)]}{2G_1(t)}, \quad B(t) = \frac{\bar{t}[G_1(t) - G_0(t)]}{2G_1(t)}\,, \quad C(t) = \frac{B(t)X_1^+(t)}{X_0^+(t)}\,, \tag{8}$$

и введем сингулярный оператор

$$(N\varphi)(t_0) = A(t_0)f_1(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{X_1^+(t_0)}{X_1^+(t)}\frac{f_1(t)dt}{t - t_0}\,, \quad t_0 \in \Gamma\,, \tag{9}$$

Для целого n обозначим $P(n)$ класс многочленов $p(t)$ степени $\deg p \le n-1$, полагая $P(n) = 0$ для $n \le 0$. Таким образом, $\dim P(n) = \max(0, n)$. Удобно еще для целого m ввести подпространство $P(n, m)$ всех многочленов $p \in P(n)$, для которых

$$\langle q, Cp\rangle = 0\,, \quad q \in P(m)\,, \tag{10}$$

где здесь и ниже для краткости

$$\langle\varphi, \psi\rangle = \int_{\Gamma}\varphi(t)\psi(t)dt\,.$$

Это подпространство возникает в следующей ситуации.

Лемма 1. *Пусть функция $f \in C(\Gamma)$ удовлетворяет условию*

$$\langle f, p\rangle = \langle q, Cp\rangle\,, \quad p \in P(n)\,, \tag{11}$$

для некоторого многочлена $q \in P(m)$. Тогда это условие равносильно

$$\langle f, p\rangle = 0\,, \quad p \in P(n, m)\,.$$

□ Не ограничивая общности можно считать, что числа m, n положительны. Разложим многочлены p и q по базисным функциям $e_i(t) = t^{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots$, в явном виде

$$p = \sum\nolimits_{i=1}^{n} x_i e_i\,, \quad q = \sum\nolimits_{j=1}^{m} y_j e_j\,,$$

с некоторыми $x_i, y_j \in \mathbb{C}$. Тогда (11) можем записать в виде тождества

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} x_i \langle f, e_i\rangle = \sum\nolimits_{i=1}^{n}\sum\nolimits_{j=1}^{m} x_i y_j \langle e_j, Ce_i\rangle$$

по $x \in \mathbb{C}^n$, что равносильно разрешимости системы линейных уравнений

$$\sum\nolimits_{j=1}^{m} \langle e_j, Ce_i\rangle y_j = \langle f, e_i\rangle\,, \quad 1 \le i \le n\,.$$

Очевидно, эта система разрешима тогда и только тогда, когда ее правая часть удовлетворяет условию ортогональности

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} \langle f, e_i\rangle \xi_i = 0 \tag{12}$$

всем решениям $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ союзной однородной системы

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} \langle e_j, Ce_i\rangle \xi_i = 0\,, \quad 1 \le j \le m\,. \tag{13}$$

Полагая $p = \sum_1^n \xi_i e_i$, равенство (12) можем записать в форме $\langle f, p\rangle = 0$ для всех многочленов $p \in P(n)$, удовлетворяющих условию $\langle e_j, Cp\rangle = 0$, $1 \le j \le m$, или, что равносильно, условию (10). ■

Из доказательства леммы видно, что размерность пространства $P(n, m)$ совпадает с числом линейно независимых решений однородной системы (13). Таким образом,

$$\dim\, P(n, m) = n - \operatorname{rang} C(n, m)\,, \tag{14}$$

где матрица $C(n, m) \in \mathbb{C}^{m\times n}$ определяется элементами $C_{ij} = \langle e_j, Ce_i\rangle$. Очевидно, эта матрица имеет следующую структуру

$$C(n, m) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ c_2 & c_3 & \cdots & c_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_m & c_{m+1} & \cdots & c_{m+n-1} \end{pmatrix}\,, \quad c_k = \int_\Gamma C(t) t^{k-1} dt\,.$$

Сформулируем основной результат о характере разрешимости рассматриваемой задачи (2)-(4).

Теорема 1. *В классе (3), (4) задача (2) разрешима тогда и только тогда, когда ее правые части f_0, f_1 удовлетворяют условиям ортогональности*

$$\begin{gathered}\langle f_1, (X_1^+)^{-1} q_1\rangle = 0, \quad q_1 \in P(-æ_1 - k + 1), \\ \langle f_0 - N f_1, (X_0^+)^{-1} q_0\rangle, \quad q_0 \in P(-æ_0 - k, æ_1 + k - 1).\end{gathered} \tag{15}$$

При выполнении этих условий все решения задачи описываются формулой

$$\begin{gathered}\phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left[\frac{X_0(z)}{X_0^+(t)}\frac{f_0(t) - (Nf_1)(t)}{t - z} + \frac{\bar{z} X_1(z)}{X_1^+(t)}\frac{f_1(t)}{t-z}\right] dt - \\ -\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \left[\frac{X_0(z)}{X_0^+(t)}\frac{B(t) X_1^+(t) p_1(t)}{t - z}\right] dt + X_0(z) p_0(z) + \bar{z} X_1(z) p_1(z)\end{gathered} \tag{16}$$

с произвольными $p_0 \in P(æ_0 + k)$ и $p_1 \in P(æ_1 + k - 1)$.

□ Согласно (1) задачу (2) можно свести к эквивалентной системе из пары задач для двух аналитических функций:

$$\phi_1^+ - G_1 \phi_1^- = f_1, \quad \phi_0^+ - G_0 \phi_0^- = f_2\,, \tag{17}$$

где положено $f_2(t) = f_0(t) - \bar{t}[\phi_1^+(t) - G_0(t)\phi_1(t)]$. Эти задачи рассматриваются в классе функций (3) с соответствующими оценками

$$|\phi_1(z)| \le C|z|^{k-2}\,, \tag{18_1}$$

$$|\phi_0(z)| \le C|z|^{k-1}\,, \tag{18_0}$$

в окрестности бесконечности, вытекающими из (4).

В силу (6), (7) из общих результатов [6, 10] о задаче линейного сопряжения следует, что первая задача для ϕ_1 разрешима в классе (3), (18_1) тогда и только тогда, когда

$$\langle f_1, (X_1^+)^{-1} q_1\rangle = 0, \quad q_1 \in P(-æ_1 - k + 1)\,, \tag{19}$$

и при выполнении этих условий все решения задачи даются формулой

$$\phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{X_1(z)}{X_1^+(t)}\frac{f_1(t)dt}{t - z} + X_1(z) p_1(z), \quad p_1 \in P(æ_1 + k - 1)\,. \tag{20}$$

Пользуясь этой формулой, вычислим функцию f_2, которую можно записать в виде

$$f_2(t) = f_0(t) - \bar{t} f_1(t) - \bar{t}[G_1(t) - G_0(t)]\phi_1^-(t)\,. \tag{21}$$

Согласно (6) и формуле Сохоцкого-Племеля, примененной к интегралу типа Коши в (20), имеем:

$$2G_1(t_0)\phi_1^-(t_0) = -f_1(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{X_1^+(t_0)}{X_1^+(t)}\frac{f_1(t)dt}{t - t_0} + 2X_1^+(t_0) p_1(t_0)\,.$$

Подставляя это выражение в (21), в обозначениях (8), (9) получим

$$f_2(t) = f_0(t) - (Nf_1)(t) - 2B(t)X_1^+(t)p_1(t)\,. \tag{22}$$

Как и выше вторая задача в (17) разрешима в классе (3), (18_0) тогда и только тогда, когда

$$\langle f_2, (X_0^+)^{-1}q_0\rangle = 0, \quad q_0 \in P(-æ_0 - k)\,, \tag{23}$$

и при выполнении этих условий все ее решения даются формулой

$$\phi_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{X_0(z)}{X_0^+(t)}\frac{f_2(t)dt}{t-z} + X_0(z)p_0(z)\,, \quad p_0 \in P(æ_0 + k)\,. \tag{24}$$

Рассмотрим подробнее условие (23), которое согласно (8), (18) можно переписать в форме тождества

$$\langle f_0 - Nf_1, (X_0^+)^{-1}q_0\rangle = 2\langle p_1, Cq_0\rangle, \quad q_0 \in P(-æ_0 - k)\,, \tag{25}$$

для некоторого многочлена $p_1 \in P(æ_1 + k - 1)$. На основании леммы 1, где роль f играет функция $(2X_0^+)^{-1}(f_0 - Nf_1)$ и буквы p, q следует переменить местами, условие (25) равносильно второму условию ортогональности в (15) и, следовательно, условия (19), (25) можно заменить на (15). Поскольку подстановка (20) и (22), (24) в (1) приводит к формуле (16), тем самым доказательство теоремы завершено. ■

Из теоремы 1 следует, что число линейно независимых решений однородной задачи равно $\dim P(æ_0 + k) + \dim P(æ_1 + k - 1)$, а число линейно независимых условий ее разрешимости равно $\dim P(-æ_0 - k, æ_1 + k - 1) + \dim P(-æ_1 - k + 1)$. Поэтому индекс æ задачи дается формулой

$$æ = \dim P(æ_0 + k) + \dim P(æ_1 + k - 1) - \dim P(-æ_0 - k, æ_1 + k - 1) - \dim P(-æ_1 - k + 1)\,.$$

С учетом (14) отсюда

$$æ = æ_0 + æ_1 + 2k - 1 + s, \quad s = \mathrm{rang} C(-æ_0 - k, æ_1 + k - 1)\,.$$

Конечно, в этом равенстве следует положить $s = 0$, если одно из чисел $-æ_0 - k, æ_1 + k - 1$ отрицательно.

Литература

1. Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений / М.-Л.: Гостехиздат, 1948.
2. Балк М.Б. Полианалитические функции и их обобщения // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 1991. – 85. – С.187–246.
3. Соколов И.А. О краевой задаче типа Римана для бианалитических функций в случае произвольного контура // Изв АН БССР, сер. физ.мат. наук. – 1969. – 6. – С.29-38.
4. Расулов К.М. О решении некоторых краевых задач типа Римана для полианалитических функций // Доклады АН СССР. – 1980. – 252. – 5. – С.1059-1063.
5. Гахов Ф.Д. Краевые задачи / М.: Физматгиз, 1977.

6. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / М.: Наука, 1968.
7. Солдатов А.П. Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций / М.: Высшая школа, 1991. – 266 с.
8. Солдатов А.П. Обобщенный интеграл типа Коши / Дифференц. ур-ния. – 1991. – 27, №.2. – С.3-8.
9. Солдатов А.П. Краевая задача линейного сопряжения теории функций / Изв. АН СССР (сер.матем.). – 1979. – 43, №.1. – С.184-202.
10. Аверьянов Г.Н., Солдатов А.П. Задача линейного сопряжения для аналитических функций в семействе весовых пространств Гельдера // Изв. вузов (матем.)(в печати)

THE CLASSICAL PROBLEM OF LINEAR CONJUGATION FOR BIANALYTIC FUNCTIONS

A.P. Soldatov, Wang K. Chan

Belgorod State University,
Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: soldatov48@gmail.com

Abstract. The classical problem of linear conjugation problem with smooth contour is under consideration for bianalytic functions. It is obtained the explicit solution formula of this problem and it is given necessary and sufficient conditions of its solvability.

Key words: linear conjugation problem, bianalytic functions, Hölder's class, oriented contour.