MSC 49J15

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ С ДВУМЕРНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

В.В. Флоринский

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия, e-mail: flor@bsu.edu.ru

Аннотация. Для линейной задачи быстродействия с двумерным управлением доказаны условия оптимальности и предложен численный метод решения такой задачи, основанный на аналитическом решении задачи с одномерным управлением.

Ключевые слова: оптимальное управление, задача быстродействия, область управляемости, каноническая система, опорный вектор.

1. Введение. В современной теории оптимального управления одно из центральных мест занимает проблема быстродействия. Поскольку время быстродействия является наиболее естественным критерием оптимальности, задачи на быстродействие стали одним из наиболее распространенных объектов применения различных методов оптимального управления. В последнее время существенное развитие теории линейного быстродействия было достигнуто на основе её связи с классической проблемой моментов. Одним из центральных пунктов в таком подходе стало исследование задачи быстродействия для канонической управляемой системы:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \qquad |u| \le 1, \\ \dot{x}_i = x_{i-1}, \quad i = \overline{2,n}, \\ x(0) = x, \quad x(\Theta) = 0, \quad \Theta \to \min . \end{cases} \tag{1}$$

В.И. Коробовым и Г.М. Скляром в [1] показано, что решение этой задачи эквивалентно степенной проблеме моментов на минимально возможном отрезке (min-проблеме моментов), что позволило впервые получить аналитическое решение задачи (1) для системы произвольного порядка n. В [1,2] даны методы нахождения времени быстродействия Θ, моментов переключения $T_1, T_2, ..., T_{n-1}$ управления $u(t)$ (точки разрыва функции $u(t)$) и рода управления $\tilde{u} = \pm 1$ – управления на конечном промежутке $[T_{n-1}, \Theta]$.

В настоящей работе для линейной задачи быстродействия с двумерным управлением

$$\begin{gathered} \dot{x} = Ax + b_1 u_1 + b_2 u_2, \\ |u_1| \le 1, \qquad |u_2| \le 1, \qquad x(0) = x_0, \qquad x(\Theta) = 0, \qquad \Theta \to \min \end{gathered} \tag{2}$$

доказываются условия оптимальности по быстродействию и предложен численный метод, основанный на использовании аналитического решения задачи (1), приведен алгоритм этого метода.

2. Условия оптимальности для линейной задачи быстродействия с двумерным управлением. Рассмотрим задачу быстродействия (2). Пусть $u_1(t)$ и $u_2(t)$ – управления, переводящие точку $x(0)$ в 0. Обозначим через $M_1(\Theta)$ множество точек вида

$$v_0 = -\int_0^{\Theta} e^{-A\tau} b_1 u_1(\tau) d\tau,$$

а через $M_2(\Theta)$ – множество точек вида

$$w_0 = -\int_0^{\Theta} e^{-A\tau} b_2 u_2(\tau) d\tau.$$

Множества $M_1(\Theta)$ и $M_2(\Theta)$ выпуклые, содержат 0 в качестве внутренней точки.

Нетрудно видеть, что множество $M_1(\Theta)$ является областью управляемости в начало координат для системы

$$\dot{x} = Ax + b_1 u_1, \qquad |u_1| \le 1, \tag{3}$$

а множество $M_2(\Theta)$ – областью управляемости в ноль для системы

$$\dot{x} = Ax + b_2 u_2, \qquad |u_2| \le 1\,. \tag{4}$$

Пусть $M_3(\Theta) = x_0 - M_2(\Theta)$. Тогда $M_3(\Theta)$ – выпуклое множество, содержащее x_0 в качестве внутренней точки. Так как области управляемости $M_1(\Theta)$ и $M_2(\Theta)$ удовлетворяют условиям $M_1(\Theta_1) \subset M_1(\Theta_2)$ и $M_2(\Theta_1) \subset M_2(\Theta_2)$, то и $M_3(\Theta_1) \subset M_3(\Theta_2)$ при $\Theta_1 < \Theta_2$.

Теорема. *Пусть для системы (2) выполнены следующие условия:*

$$\operatorname{rank}(b_1, Ab_1, ..., A^{n-1}b_1) = n\,,$$

$$\operatorname{rank}(b_2, Ab_2, ..., A^{n-1}b_2) = n\,,$$

множества $M_1(\Theta)$ и $M_3(\Theta)$ выпуклые. Тогда для того, чтобы время быстродействия Θ для задачи (2) было оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы пересечение множеств $M_1(\Theta)$ и $M_3(\Theta)$ было непустым и не содержало внутренней точки.

□ Необходимость. Предположим противное. Пусть пересечение множеств $M_1(\Theta)$ и $M_3(\Theta)$ содержит внутреннюю точку. Тогда время Θ не является оптимальным. Действительно, пусть $\tilde{x}_0$ – общая внутренняя точка этих множеств. Тогда из этой точки можно попасть в 0 за строго меньшее, чем Θ время Θ_1 и, аналогично, из точки $x_0 - \tilde{x}_0$ в 0 – за строго меньшее время Θ_2, чем Θ. Это значит, что существуют управления $u_1(t)$ и $u_2(t)$ такие, что $|u_1| \le 1$ и $|u_2| \le 1$ и такие, что выполняются равенства

$$\tilde{x}_0 = -\int_0^{\Theta_1} e^{-A\tau} b_1 u_1(\tau) d\tau \tag{5}$$

для $\Theta_1 < \Theta$ и

$$\tilde{x}_0 - x_0 = -\int_0^{\Theta_2} e^{-A\tau} b_2 u_2(\tau) d\tau \tag{6}$$

для $\Theta_2 < \Theta$. Пусть для определенности $\Theta_1 \geq \Theta_2$. Тогда можно положить управление $u_1(\tau) = 0$ на отрезке $[\Theta_2, \Theta_1]$. В этом случае будут справедливы равенство (6) и равенство

$$\tilde{x}_0 = -\int_0^{\Theta_2} e^{-A\tau} b_1 u_1(\tau) d\tau \,,$$

т.е. равенство

$$x_0 = -\int_0^{\Theta} e^{-A\tau} b_1 u_1(\tau) d\tau - \int_0^{\Theta} e^{-A\tau} b_2 u_2(\tau) d\tau$$

будет справедливым при $\Theta = \Theta_2$, а это значит, что из точки x_0 можно попасть в 0 в силу системы (2) за меньшее время. Необходимость доказана.

Достаточность. Докажем, что если $M_1(\Theta) \cap M_3(\Theta) \neq \emptyset$ и не содержит внутреннюю точку, то время быстродействия Θ оптимально.

Действительно, пусть время Θ не является временем быстродействия и пусть $\hat{\Theta}$ – время быстродействия. В этом случае $M_1(\hat{\Theta}) \subset M_1(\Theta)$ и $M_3(\hat{\Theta}) \subset M_3(\Theta)$ при $\hat{\Theta} < \Theta$, но тогда $M_1(\hat{\Theta}) \cap M_3(\hat{\Theta}) = \emptyset$, а это означает, что за меньшее, чем Θ время попасть из точки x_0 в 0 невозможно. Следовательно, Θ – оптимальное но быстродействию время. ■

Таким образом, время быстродействия Θ должно быть таково, что множества $M_1(\Theta)$ и $M_3(\Theta)$ должны иметь общую граничную точку, которую обозначим также через $\tilde{x}_0$. В этой точке существует (возможно, не единственная) гиперплоскость, разделяющая эти два множества. Следовательно, в этой точке существуют опорные векторы к множествам $M_1(\Theta)$ и $M_3(\Theta)$. Метод нахождения опорного вектора к области управляемости канонической задачи быстродействия описан в работах [3,4]. Таким образом, решение задачи быстродействия (2) сводится к решению следующих задач быстродействия:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + b_1 u_1, & |u_1| \leq 1, \\ x(0) = \tilde{x}_0 & x(\Theta) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

и

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + b_2 u_2, & |u_2| \leq 1, \\ x(0) = x_0 - \tilde{x}_0 & x(\Theta) = 0 \end{cases} \tag{8}$$

и нахождению такой точки $\tilde{x}_0$, что время быстродействия Θ будет являться общим как для задачи (7), так и для задачи (8), и оно же будет являться временем быстродействия для задачи (2).

3. Преобразование линейной задачи быстродействия к каноническому виду. Приведем метод преобразования линейной задачи быстродействия к каноническому виду.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + bu \,, \tag{9}$$

где A – вещественная матрица $n \times n$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Рассмотрим приведение произвольной матрицы A к форме Фробениуса. Предположим, что для системы (9) выполнено условие

$$\operatorname{rank}(b, Ab, ..., A^{n-1}b) = n\,. \tag{10}$$

Определим вектор c из следующих равенств:

$$\begin{aligned}
&c^*b = 0\,,\\
&c^*Ab = 0\,,\\
&........\\
&c^*A^{n-2}b = 0\,,\\
&c^*A^{n-1}b = 1\,.
\end{aligned}$$

В силу предположения (10) эта система имеет единственное решение.

Сделаем замену:

$$y = Qx,$$

где матрица Q составлена из векторов c^*A^{n-1}, c^*A^{n-2}, ..., c^* как из строк:

$$Q = \begin{pmatrix} c^*A^{n-1} \\ c^*A^{n-2} \\ \vdots \\ c^* \end{pmatrix},$$

т.е. $y_i = c^*A^{n-i}x_i$, $i = \overline{1,n}$. Умножая систему (9) на матрицу Q, получим систему:

$$Q\dot{x} = QAx + Qbu,$$

которую можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
&\dot{y}_1 = c^*A^n x + c^*A^{n-1}bu\,,\\
&\dot{y}_2 = c^*A^{n-1}x + c^*A^{n-2}bu\,,\\
&.........................\\
&\dot{y}_n = c^*Ax + c^*bu\,.
\end{aligned} \tag{11}$$

По теореме Гамильтона-Кэли,

$$A^n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i\,,$$

где a_i – коэффициенты характеристического полинома матрицы A

$$\lambda^n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i,$$

и учитывая, что

$$c^* A^i b = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad i = n-1, \\ 0, & \text{если} \quad 0 \le i < n-1, \end{cases}$$

систему (11) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} &\dot{y}_1 = c^*(a_{n-1}A^{n-1}x + \ldots + a_0 x) + u, \\ &\dot{y}_2 = y_1, \\ &\ldots\ldots \\ &\dot{y}_n = y_{n-1}. \end{aligned} \tag{12}$$

В случае, если матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

то, учитывая, что $\lambda^n = 0$, система (12) принимает канонический вид:

$$\begin{aligned} &\dot{y}_1 = u, \\ &\dot{y}_2 = y_1, \\ &\ldots\ldots \\ &\dot{y}_n = y_{n-1}. \end{aligned} \tag{14}$$

Матрица Q^{-1}, обратная к матрице Q, имеет вид:

$$Q^{-1} = (b,\ Ab,\ \ldots,\ A^{n-1}b),$$

откуда из критерия управляемости (10) следует, что, если система (9) с матрицей A вида (13) управляемая, то она может быть приведена к каноническому виду (14).

Таким образом, при решении задачи быстродействия (2) системы (7) и (8) приводятся к каноническому виду при помощи матриц Q_1 и Q_2 соответственно и решение задачи (2) сводится к решению двух канонических задач с общим временем быстродействия Θ:

$$\begin{aligned} &\dot{y}_1 = u_1, \qquad |u_1| \le 1\,, \\ &\dot{y}_i = y_{i-1}, \qquad i = \overline{2, n}\,, \\ &y(0) = y_0 = Q_1\tilde{x}_0, \qquad y(\Theta) = 0, \qquad \Theta \to \min\,, \end{aligned} \tag{15}$$

где $y = Q_1 x$ и

$$\begin{aligned} &\dot{z}_1 = u_2, \qquad |u_2| \le 1\,, \\ &\dot{z}_i = z_{i-1}, \qquad i = \overline{2, n}\,, \\ &z(0) = z_0 = Q_2(x_0 - \tilde{x}_0), \qquad z(\Theta) = 0\,, \qquad \Theta \to \min\,, \end{aligned} \tag{16}$$

где $z = Q_2 x$.

4. Численное решение задачи быстродействия с двумерным управлением. Опишем теперь численный метод решения задачи быстродействия с двумерным управлением. Для этого рассмотрим задачу быстродействия (2) с матрицей A вида (13). Как было показапо, решение этой задачи сводится к решению задач (7) и (8) и нахождению такой точки $\tilde{x}_0$, что время Θ является временем быстродействия как для задачи (7) из точки $\tilde{x}_0$ в 0, так и для задачи (8) из точки $x_0 - \tilde{x}_0$ в 0, и оно же будет временем быстродействия для задачи (2) из точки x_0 в 0.

При помощи невырожденных матриц Q_1 и Q_2 приведем задачи (7) и (8) к каноническому виду (15) и (16) соответственно.

Обозначим через N_y опорный вектор к области управляемости системы (15) за время Θ_y, а через N_z – опорный вектор к области управляемости системы (16) за время Θ_z.

Между точками x_0 и 0 на отрезке прямой, соединяющей эти две точки, методом половинного деления находим точку $\tilde{x}$, в которой $Q_y = Q_z$. В этой точке находим опорный вектор [3,4] $N_y = N_y(Q_1\tilde{x}, \Theta_y)$ к области управляемости системы (15) за время Θ_y и опорный вектор $N_z = N_z(Q_2(x_0-\tilde{x}), \Theta_z)$ к области управляемости системы (16) за время Θ_z. Отметим, что векторы $Q_1^{-1}N_y$ и $Q_2^{-1}N_z$ являются опорными векторами в точке $\tilde{x}$ исходного пространства к областям управляемости систем (7) за время Θ_y и (8) за время Θ_z. Если угол между векторами $Q_1^{-1}N_y$ и $-Q_2^{-1}N_z$ (обозначим его через $\delta = \delta(\tilde{x})$ равен π (вычислять следует $\cos\delta$), то время быстродействия системы (2) равно $\Theta = \Theta_y = \Theta_z$ и $\tilde{x}_0 = \tilde{x}$. Для каждой из систем (15) и (16) находим моменты переключения [1,2], что и будет решением исходной задачи. В противном случае находим биссектрису угла $\delta(\tilde{x})$. На этой биссектрисе находим точки минимума для Θ_y и Θ_z (при этом можно применять метод деления отрезка пополам или метод золотого сечения поиска минимума функции) и выбираем ту из точек минимума, которая находится ближе к точке $\tilde{x}$. Обозначим эту точку через $\tilde{x}_b$. Находим в этой точке $\Theta_y = \Theta_y(Q_1\tilde{x}_b)$ и $\Theta_z = \Theta_z(Q_2(x_0 - \tilde{x}_b))$.

Если $\Theta_y > \Theta_z$ в точке $\tilde{x}_b$, то на отрезке прямой, соединяющей точки $\tilde{x}_b$ и 0, находим точку $\tilde{x}'$, в которой $\Theta_y = \Theta_z$; если $\Theta_y < \Theta_z$, то точку $\tilde{x}'$ находим на отрезке, соединяющем $\tilde{x}_b$ и x_0.

В точке $\tilde{x}'$ находим опорные векторы $N_y = N_y(Q_1\tilde{x}', \Theta_y)$ и $N_z = N_z(Q_2(x_0 - \tilde{x}'), \Theta_z)$. Если угол δ между векторами $Q_1^{-1}N_y$ и $-Q_2^{-1}N_z$ равен π, то $\Theta = \Theta_y = \Theta_z$ – время быстродействия для задачи (2) и $\tilde{x}_0 = \tilde{x}'$. В противном случае находим биссектрису угла $\delta = \delta(\tilde{x}')$ и процесс повторяется до тех пор, пока на очередном шаге угол δ между векторами $Q_1^{-1}N_y$ и $-Q_2^{-1}N_z$ не станет равным π с заданной точностью ε, то есть пока не будет выполняться неравенство

$$|\cos\delta + 1| < \varepsilon.$$

Приведем результаты численного решения описанным методом задачи быстродействия:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= u_1 + u_2\,,\\
\dot{x}_2 &= x_1 + u_1 + u_2\,,\\
\dot{x}_3 &= x_2 + u_2\,,\\
\dot{x}_4 &= x_3\,;
\end{aligned}$$

$$|u_1| \le 1, \qquad |u_2| \le 1\,, \qquad x(0) = x_0, \qquad x(\Theta) = 0, \qquad \Theta \to \min\,.$$

Для начальной точки $x_0 = (0; 0; 1; 1)$:

- точка $\tilde{x}_0 \approx (0,499270725; -0,69352541; -0,05530742; 1,81190481)$;
- время быстродействия $\Theta \approx 4,65060538$;
- моменты переключения для управления u_1:

$$T_1 \approx 0,60356662; \quad T_2 \approx 1,96722527; \quad T_3 \approx 3,93859669;$$

- моменты переключения для управления u_2:

$$T_1 \approx 0,93012912; \quad T_2 \approx 3,24907149; \quad T_3 \approx 4,39460969;$$

- род управления (управление на конечном промежутке): $\tilde{u}_1 = +1, \quad \tilde{u}_1 = +1.$

Для начальной точки $x_0 = (0; 1; 1; 1)$
точка $\tilde{x}_0 \approx (-0,230497; -0,229221; 0,461084; 1,174799)$;
время быстродействия $\Theta \approx 4,965695$;
моменты переключения для управления u_1:
$T_1 \approx 0,611052; \quad T_2 \approx 2,524571; \quad T_3 \approx 4,281118;$
моменты переключения для управления u_2:
$T_1 \approx 1,455239; \quad T_2 \approx 3,459045; \quad T_3 \approx 4,965696;$
род управления (управление на конечном промежутке): $\tilde{u}_1 = +1, \quad \tilde{u}_1 = +1.$

Литература

1. Коробов В.И., Скляр Г.М. Оптимальное быстродействие и степенная проблема моментов // Мат. сборник. – 1987. – 134(176), №2(10). – С.186 – 206.
2. Коробов В.И., Скляр Г.М., Флоринский В.В. Методы построения оптимальных по быстродействию управлений для канонических управляемых систем // Математическая физика, анализ, геометрия. – 1999. – 6, №3/4. – С.264-287.
3. Коробов В.И., Скляр Г.М., Флоринский В.В. Многочлен минимальной степени для определения всех моментов переключения в задаче быстродействия // Математическая физика, анализ, геометрия. – 2000. – Т.7, №3. – С.308-320.
4. Коробов В.И., Скляр Г.М., Флоринский В.В. Минимальный полином для нахождения моментов переключения и опорного вектора к области управляемости // Дифференциальные уравнения. – 2002. – 38. – С.16-19.

SOLUTION OF THE LINEAR TIME-OPTIMAL PROBLEM WITH TWO-DIMENSIONAL CONTROL

V.V. Florinsky

Belgorod State University,
Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: flor@bsu.edu.ru

Abstract. For the linear time-optimal problem conditions of optimality are proved and the numerical method for its solving is proposed that is based on the analytical solution of time-optimal problem with one-dimensional control.

Key words: optimal control, time-optimal problem, set of controllability, canonical system, support vector.