MSC 26B10

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ИНВОЛЮЦИИ В $\mathbb{R}$

А.В. Субботин, Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, 308007, г. Белгород, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Описывается класс аналитических инволютивных отображений в $\mathbb{R}$.

Ключевые слова: инволюция, отображение, аналитические функции, алгебраические объекты.

В предыдущих публикациях авторов (см. [1-3]) было введено понятие обратимых во времени динамических систем и начато их систематическое исследование. Напомним, что динамическая система

$$\dot{X} = \mathsf{F}(X)\,, \quad \mathsf{F} : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d \tag{1}$$

называется обратимой, если отображение F таково, что для него существует инволюция W пространства $\mathbb{R}^d$ (эндоморфизм пространства, для которого при любом $X \in \mathbb{R}^d$ имеет место равенство $\mathsf{W}(\mathsf{W}(X)) = X$), для которой выполняется

$$\sum_j \frac{\partial \mathsf{W}_j(X)}{\partial X_k} \mathsf{F}_k(X) = -\mathsf{F}_j(\mathsf{W}(X))\,, \quad j = 1 \div d\,, \tag{2}$$

где здесь и далее используется соглашение о том, что все суммирования, для которых не указаны пределы, производится в пределах от 1 до d.

Как видно из определения, центральную роль в понятии обратимой системы являются инволюции *фазового* пространства $\mathbb{R}^d$ системы. Поэтому для решения принципиального вопроса теории обратимых систем – распознавания того, является ли наперед заданная динамическая система обратимой или нет, нужно иметь как можно больше информации о свойствах инволюций, без которой невозможно решение этой задачи. В настоящем сообщении мы решаем вопрос об описании нетождественных инволюций $\mathsf{W}(x)$ при $d = 1$, являющихся аналитическими функциями в некоторой окрестности своей единственной неподвижной точки. Указание на то, что этим классом исчерпываются все одномерные инволюции дано нами в [3] без подробного доказательства. Здесь приводим соответствующее доказательство.

Рассмотрим аналитические эндоморфизмы $\mathsf{W} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Если они инволютивными, то есть имеет место $\mathsf{W}(\mathsf{W}(x)) = x$ для любого $x \in \mathbb{R}$ и не являются тождественными, то каждый из них имеет единственную неподвижную точку. Мы докажем, что класс всех таких эндоморфизмов описываются формулой $\mathsf{W}(x) = a - x$, где a – произвольная постоянная.

Введем в рассмотрение алгебру $\mathbb{A}^{(1)}$ последовательностей $\mathsf{w} = \langle w_n; \in \mathbb{N}_+\rangle$ с естественной операцией сложения, в которой операция умножения для каждой пары последовательностей $\mathsf{u} = \langle u_n; n \in \mathbb{N}_+\rangle$, $\mathsf{v} = \langle v_n; \in \mathbb{N}_+\rangle$, обозначаемая посредством $*$, вводится следующим образом:

$$\left(\mathsf{u} * \mathsf{v}\right)_n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} u_m v_{n-m} \,. \tag{3}$$

Легко видеть, что введенная, таким образом, бинарная операция $*$, действительно, удовлетворяет всех свойствам коммутативного алгебраического умножения. Единицей относительно умножения $*$ является последовательность $\mathsf{e} = \langle 1, 0, 0, ... \rangle$ так, что для любой последовательности $\mathsf{w} \in \mathbb{A}^{(1)}$ имеет место $\mathsf{e} * \mathsf{w} = \mathsf{w} * \mathsf{e} = \mathsf{w}$. Множество последовательностей $\mathsf{A}_0^{(1)} = \{\mathsf{w}; w_0 = 0\}$ составляют идеал алгебры $\mathsf{A}^{(1)}$ так, что для любой $\mathsf{u} \in \mathbb{A}^{(1)}$ и для любой $\mathsf{w} \in \mathbb{A}_0^{(1)}$ выполняется $\mathsf{w} * \mathsf{u} \in \mathbb{A}_0^{(1)}$. С подробностями использования этой и подобных ей алгебр коэффициентов степенных рядов можно ознакомится в обзоре [4].

Для любого элемента $\mathsf{w} \in \mathbb{A}^{(1)}$ его n-я степень w_*^n определяется формулой

$$\left(\mathsf{w}_*^n\right)_m = \sum_{\substack{\langle j_1, ..., j_n \rangle: \\ j_1 + ... + j_n = m}} \frac{m!}{j_1! ... j_n!} w_{j_1} ... w_{j_n} \,. \tag{4}$$

Отсюда сразу заключаем, что если $\mathsf{w} \in \mathbb{A}_0^{(1)}$, то

$$\left(\mathsf{w}_*^n\right)_m = 0 \quad \text{при} \quad m > n \,, \tag{5}$$

так как в суммируемых произведениях $w_{j_1} ... w_{j_n}$ обязательно имеются нулевые множители.

Каждая из последовательностей алгебры $\mathbb{A}^{(1)}$ определяет степенной ряд

$$\mathsf{W}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} w_m \,, \qquad x \in \mathbb{Z} \,. \tag{6}$$

Результатом алгебраических операций с рядами такого рода являются ряды, у которых коэффициенты вычисляется посредством соответствующих алгебраических операций с последовательностями их коэффициентов в рамках алгебры $\mathbb{A}^{(1)}$. Это следует из того, что для любых двух элементов $\mathsf{u} = \langle u_n; n \in \mathbb{N}_+ \rangle$, $\mathsf{v} = \langle v_n; \in \mathbb{N}_+ \rangle$ из $\mathbb{A}^{(1)}$ и соответствующих им рядов

$$\mathsf{U}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} u_m \,, \qquad \mathsf{V}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} v_m$$

имеет место формула умножения

$$\mathsf{U}(x)\mathsf{V}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} (\mathsf{u} * \mathsf{v})_n \,. \tag{7}$$

Отсюда сразу следует, что для любого элемента $\mathsf{w} \in \mathbb{A}^{(1)}$ и соответствующего ему ряда (6) выполняется

$$\mathsf{W}^n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \left(\mathsf{w}_*^n\right)_n \,. \tag{8}$$

Пусть теперь ряд (6) определяет аналитическую инволюцию $w(x)$ так, что для любого $x \in \mathbb{R}$ имеет место $\mathsf{W}(\mathsf{W}(x)) = x$. Будем считать, что она не является тривиальной, то есть отличной от тождественной, $\mathsf{W}(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$. В этом случае она представляется монотонно убывающей функцией, определенной на всей оси $\mathbb{R}$, и поэтому у нее всегда имеется единственная неподвижная точка x_0, так как она представляется первой координатой единственной точки пересечения $\langle x_0, \mathsf{W}(x_0)\rangle$ графика этой функции с биссектрисой 1-го и 3-го квадрантов на плоскости $\langle x, \mathsf{W}(x)\rangle$. Не ограничивая общности, будем считать, что элемент w, определяющий инволюцию, принадлежит идеалу $\mathbb{A}_0^{(1)}$ алгебры последовательностей коэффициентов, так как для любой функции $\mathsf{W}(x)$, осуществляющей инволюцию, можно построить ряд Тейлора в соответствующей ей точке x_0 и перенести начало координат на плоскости $\langle x, \mathsf{W}(x)\rangle$ в точку $\langle x_0, \mathsf{W}(x_0)\rangle$. Таким образом, в ряду (5) коэффициент $w_0 = 0$.

Запишем уравнение $\mathsf{W}(\mathsf{W}(x)) = x$ в терминах ряда (6)

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{n!} \mathsf{W}^n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{n!} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \left(\mathsf{w}_*^n\right)_m = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{n!} \left(\mathsf{w}_*^n\right)_m .$$

Приравнивая коэффициенты рядов в левой и правой частях равенства и учитывая (5), получаем бесконечную систему уравнений для коэффициентов w_m, $m \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{w_n}{n!} \left(\mathsf{w}_*^n\right)_m = \delta_{m1} , \qquad m \in \mathbb{N} . \tag{9}$$

Покажем теперь, что имеется единственная возможность удовлетворить этой системе уравнений в рамках сделанных нами выше предположений, а именно, положить $w_1 = -1$ и $w_n = 0$ при $n > 1$.

Заметим, сначала, что при $m = 1$ в (9) имеется только одно слагаемое с $n = 1$, которое, ввиду $\left(\mathsf{w}_*\right)_1 = w_1$, сводится к $w_1^2 = 1$, то есть $w_1 = \pm 1$. Рассмотрим, далее, значение $m = 2$, для которого (9), ввиду $\left(\mathsf{w}_*^2\right)_2 = 2w_1^2$, принимает вид

$$w_1 w_2 + w_2 w_1^2 = 0 .$$

При $w_1 = 1$, отсюда следует, что $w_2 = 0$, а при $w_1 = -1$ это равенство превращается в тождество.

Докажем индукцией по m, что в случае $w_1 = 1$ все последующие компоненты последовательности w равны нулю. Положим, что это утверждение нами доказано для всех значений вплоть до некоторого $m = l$, то есть $m_2 = ... = m_l = 0$. Рассмотрим уравнение (9) при $m = l + 1$. Учитывая предположение индукции и равенство $w_1 = 1$, оно в этом случае записывается в виде

$$w_1 w_{l+1} + w_{l+1} w_1^{l+1} = 0 ,$$

откуда следует, что $w_{l+1} = 0$. Таким образом, в случае $w_1 = 1$ получаем в качестве решения последовательность $\langle 0, 1, 0, ...\rangle$, что соответствует тривиальной инволюции $w(x) = x$, по договоренности, исключенной нами из рассмотрения.

Рассмотрим случай, когда $w_1 = -1$. Пусть $m = 3$. В этом случае (9) принимает вид $w_1 w_3 + 2w_2^2 w_1 + w_3 w_1^3 = 0$ или, учитывая $w_1 = -1$, $2w_3 + w_2^2 = 0$. Далее при $m = 4$ равенство (9) превращается в $w_1 w_4 + 4w_3 w_2 w_1 + 3w_2^2 + 6w_3 w_2 w_1^2 + w_4 w_1^4 = 0$ или, после подстановки $w_1 = -1$, $2w_3 w_2 + 3w_2^3 = 0$. Наконец, учитывая, что $w_3 = -w_2^2/2$, находим, что $w_2 = 0$, и поэтому $w_3 = 0$.

Далее, рассмотрим уравнения для значений $m \geq 4$, которые, ввиду $w_2 = w_3 = 0$, допускают представление в следующей форме:

$$w_1 w_m + \sum_{n=4}^{m} \frac{w_n}{n!} \left(\mathsf{w}_*^n\right)_m = w_1 w_m + w_m w_1^m + m! \sum_{n=4}^{m-1} \frac{w_n}{n!} \sum_{\substack{\langle j_1, \ldots, j_n \rangle: \\ j_1 + \ldots + j_n = m}} \prod_{k=1}^{n} \frac{w_{j_k}}{j_k!} = 0\,, \quad m = 4, 5, \ldots. \tag{10}$$

Допустим, что система уравнений (10) допускает решение, у которого $w_m \not\equiv 0$ при $m > 1$ и пусть s – первый номер из набора $\{4, 5, \ldots\}$ такой, что $w_s \neq 0$. Заметим, что при $w_1 = -1$, если m – четное, то переменная w_m, которая присутствует только в первых двух слагаемых, выпадает из уравнения, а при нечетном m уравнение (10) принимает вид

$$w_m = \frac{m!}{2} \sum_{n=s}^{m-1} \frac{w_n}{n!} \sum_{\substack{\langle j_1, \ldots, j_n \rangle: \\ j_1 + \ldots + j_n = m}} \prod_{k=1}^{n} \frac{w_{j_k}}{j_k!}\,, \tag{11}$$

где в правой части w_m отсутствует. Тогда из (11) следует, что s четное число, так как при нечетном s в уравнении (11) при $m = s$ в каждом из слагаемых в правой части имеется, по крайней мере, одно, у которого в произведении $w_{j_1} w_{j_2} \ldots w_{j_n}$ найдется множитель w_{j_k} с $j_k \geq 2$ и все такие множители имеют номера, меньшие s. Тогда, по определению номера s, все слагаемые равны нулю, что противоречит выбору s.

Положим в (11) $m = 2s - 1$. Тогда в сумме по n имеется только одно слагаемое с $n = s$, так как j_k, $k = 1, \ldots, n$ равны либо 1, либо должны быть не меньше s. Если они все равны 1, то $j_1 + \ldots + j_n = n < 2s - 1$, что противоречит условию суммирования $j_1 + \ldots + j_n = m = 2s - 1$. Если, хотя бы один из номеров, например, $j_1 \geq s$, то $j_1 + \ldots + j_n \geq s + n - 1$. Тогда, ввиду условия суммирования, $j_1 + \ldots + j_n = m = 2s - 1$, получаем $s \geq n$, то есть имеется одна возможность $n = s$. Таким образом, из (11) следует, что

$$w_{2s-1} = -\frac{(2s-1)!}{2s!(s-1)!} w_s^2\,. \tag{12}$$

Положим, теперь, в (11) $m = 3s - 2$, которое является четным числом. Тогда, как уже было сказано выше, для четного m из (10) следует

$$\sum_{n=s}^{3(s-1)} \frac{w_n}{n!} \sum_{\substack{\langle j_1, \ldots, j_n \rangle: \\ j_1 + \ldots + j_n = 3s-2}} \prod_{k=1}^{n} \frac{w_{j_k}}{j_k!} = 0\,. \tag{13}$$

В этой сумме может быть не более двух ненулевых слагаемых с $n = s$ и $n = 2s - 1$. Во-первых, по той же причине, что и в случае с $m = 2s - 1$, имеем одно слагаемое $n = 2s - 1$

и при этом только одно из всех номеров, например, $j_1 = s$, а остальные равны 1. В этом случае, $j_1 + ... + j_n = s + 2(s-1)$. Во-вторых, если имеется еще одно значение n с $w_n \neq 0$, то для него должно быть, по крайней мере, два номера, например, j_1 и j_2 не меньших s. Тогда $j_1 + ... + j_n \geq 2s + n - 2$ и, с другой стороны, $j_1 + ... + j_n = 3s - 2$, то есть $n \leq s$ и поэтому $n = s$. При большем числе номеров $j_k \geq s$ нарушаются условия суммирования. Тогда, принимая в расчет эти два слагаемых, из (13) получаем

$$\frac{w_s}{s!} \cdot \frac{s(s-1)}{2} \frac{w_s^2}{(s!)^2} + \frac{w_{2s-1}}{(2s-1)!} \cdot \frac{w_s}{(s-1)!} = 0\,.$$

Подставляя в это выражение значение (12), приходим к равенству

$$-\frac{w_s^3}{2(s!)^2(s-1)!} = 0\,,$$

из которого случае, что $w_s = 0$, вопреки сделанному нами предположению.

Таким образом, в случае, когда $w_1 = -1$ получаем, что все $w_m = 0$ при $m > 1$, то есть единственным нетривиальным решением системы уравнений (9) является последовательность $\langle 0, -1, 0, ... \rangle$. Она соответствует инволюции $\mathsf{W}(x) = -x$.

Итак, нами доказана следующая

Теорема 1. *Все нетривиальные аналитические инволюции* $\mathsf{W} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $\mathsf{W}(\mathsf{W}(x)) = x$ *определяются формулой* $\mathsf{W}(x) = a - x$, $a = const$.

Литература

1. Субботин А.В., Вирченко Ю.П. Обратимые динамические системы // Proceedings XII of young scientists school "Non-local boundary value problems and problems of modern analysis and informatics", KBR, Terskol 3-7 December 2014 // Нальчик: Институт прикладной математики и автоматизации, 2014. – С.65-67.
2. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. О понятии обратимости динамических систем // Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics. – 2015. – №5(202); 38. – С.138-147.
3. Вирченко Ю.П., Субботип А.В. Обратимые в широком смысле динамические системы // Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics. – 2015. – №11(208); 39. – С.89-96.
4. Вирченко Ю.П., Витохина Н.Н. Алгебра последовательностей коэффициентов степенных рядов аналитических функций // Научные ведомости БелГУ. Сер. Физика. Математика. – 2010. – 11(82);19. – С.28-61.

ANALYTIC INVOLUTIONS IN $\mathbb{R}$

A.V. Subbotin, Yu.P. Virchenko

Belgorod State University,
Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Abstract. The class of analytic involution images in $\mathbb{R}$ is described.

Key words: involution, analytic functions, algebraic objects.