



MSC 11P99

БИНАРНЫЕ АДДИТИВНЫЕ ЗАДАЧИ С КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ

Л.Н. Куртова

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: kurtova@bsu.edu.ru

Ключевые слова: бинарные аддитивные задачи, квадратичные формы, мнимое квадратичное поле, ряды Дирихле.

Рассматривается задача получения асимптотических формул для числа решений уравнения с квадратичными формами, родственная проблеме делителей Ингама.

Пусть d – отрицательное бесквадратное число, $F = Q(\sqrt{d})$ – мнимое квадратичное поле, δ_F – дискриминант поля F , $Q_1(\bar{m})$ и $Q_2(\bar{k})$ – бинарные положительно определенные примитивные квадратичные формы с матрицами A_1 и A_2 , $\det A_1 = \det A_2 = -\delta_F$.

Теорема 1. Пусть ε – произвольное положительное число, δ_F – дискриминант поля F , $n, h \in \mathbb{N}$, $h \leq n^\varepsilon$. Справедлива асимптотическая формула

$$\sum_{Q_1(\bar{m}) - Q_2(\bar{k}) = h} e^{-\frac{Q_1(\bar{m}) + Q_2(\bar{k})}{n}} = \frac{2\pi^2 n}{|\delta_F|} \sum_{q=1}^{\infty} q^{-4} \sum_{\substack{l=1, \\ (l,q)=1}}^q e^{-2\pi i h l / q} G_1(q, l, \bar{0}) G_2(q, -l, \bar{0}) + O(n^{3/4+\varepsilon}).$$

$G_i(q, l, \bar{0}) = \sum_{\bar{m} \pmod{q}} \exp(2\pi i l Q_i(\bar{m}) / q)$ ($i = 1, 2$) – двойные суммы Гаусса.

Доказательство проводится круговым методом с использованием оценки А. Вейля [1] для суммы Kloostermana.

Остаточный член асимптотической формулы в теореме 1 можно улучшить, используя оценку Х.Иванца [2] для суммы сумм Kloostermana.

Теорема 2. Пусть ε – произвольное положительное число, δ_F – дискриминант поля F , $2 \nmid \delta_F$, h – натуральное число, такое, что $\delta_F \mid h$, $h \leq n^\varepsilon$. Справедлива асимптотическая формула

$$\sum_{Q_1(\bar{m}) - Q_2(\bar{k}) = h} e^{-\frac{Q_1(\bar{m}) + Q_2(\bar{k})}{n}} = \frac{2\pi^2 n}{|\delta_F|} \sum_{q=1}^{\infty} q^{-4} \sum_{\substack{l=1, \\ (l,q)=1}}^q e^{-2\pi i h l / q} G_1(q, l, \bar{0}) G_2(q, -l, \bar{0}) + O(n^{7/12+\varepsilon}).$$

В случае, когда квадратичные формы $Q_1(\bar{m})$, $Q_2(\bar{k})$ принадлежат одному классу, условие $2 \nmid \delta_F$ в формулировке теоремы 2 можно снять. В частности, справедлива



Теорема 3. Пусть ε — произвольное положительное число, $n \in N$, h — натуральное число, такое, что $4 \mid h$, $h \ll n^\varepsilon$. Справедлива асимптотическая формула

$$\sum_{m_1^2+m_2^2-k_1^2-k_2^2=h} e^{-\frac{m_1^2+m_2^2+k_1^2+k_2^2}{n}} = \frac{\pi^2 n}{2} \sum_{q=1}^{\infty} q^{-4} \sum_{\substack{l=1, \\ (l,q)=1}}^q e^{-2\pi i h l/q} S^2(q, l, 0) S^2(q, -l, 0) + O(n^{7/12+\varepsilon}),$$

где $S(q, l, 0) = \sum_{s=1}^q \exp(2\pi i l s^2/q)$ — сумма Гаусса.

Вторым основным результатом являются асимптотические формулы дробных моментов некоторых рядов Дирихле.

Теорема 4. Пусть m — натуральное число, $\Phi(T)$ — сколь угодно медленно стремящаяся к $+\infty$ при $T \rightarrow +\infty$ функция. Тогда при $\frac{1}{2} + \frac{\Phi(T)}{\ln T} \leq \sigma < 1$ справедлива асимптотическая формула

$$\int_T^{2T} |\zeta(\sigma + it)|^{2/m} dt = T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_{1/m}^2(n)}{n^{2\sigma}} + O\left(T(\sigma - 1/2)^{-1/m^2} e^{-0,1\Phi(T)}\right),$$

где $d_k(n)$ — коэффициенты разложения функции $\zeta^k(s)$ в степенной ряд.

Наша формула справедлива при весьма близких к $1/2$ значениях σ и в этом смысле представляет собой уточнение результата И.Ш. Джаббаровова [3].

В 1989 году А. Сельберг [4] определил класс рядов Дирихле $L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$, ($\Re s > 1$) удовлетворяющих некоторым условиям и высказал ряд гипотез.

Получение асимптотических формул для моментов функций Сельберга представляет трудность потому, что в отличие от $\zeta(s)$ точная верхняя оценка дробных моментов для таких функций на критической прямой не известна.

Теорема 5. Пусть $\sum_{n \leq x} |a(n)|^2 n^{-1} = \log x + O(1)$, где $a(n)$ — коэффициенты Дирихле функции $L(s)$ степени 2. Пусть m — натуральное число, $\Phi(T)$ — сколь угодно медленно стремящаяся к $+\infty$ при $T \rightarrow +\infty$ функция. Тогда при $\frac{1}{2} + \frac{\Phi(T)}{\sqrt{\ln T}} \leq \sigma < 1$ справедлива асимптотическая формула

$$\int_T^{2T} |L(\sigma + it)|^{2/m} dt = T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|d_{1/m}(n) a(n)|^2}{n^{2\sigma}} + O\left(T e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\ln T}}\right).$$

Литература

1. Estermann T. On Kloostermann's sum // *Mathematika*. – 1961. – №8. – P.83-86.
2. Deshouillers J.-M., Iwaniec H. Kloosterman sums and fourier coefficients of cusp forms // *Invent. math.* – 1982. – №70. – P.219-288.
3. Джаббаров И.Ш. Дробные моменты ζ -функции // *Математические заметки*. – 1985. – 38(4). – С.481-493.
4. Selberg A. Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series // *Proc. of the Amalfi conference on Analytic Number Theory. Univ. di. Salerno*. – 1992. – P.365-387.



BINARY ADDITIVE PROBLEMS WITH QUADRATIC FORMS

L.N. Kurtova

Belgorod State University,
Pobedy Str., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: kurtova@bsu.edu.ru

Key words: binary additive problems, quadratic forms, imaginary quadratic field, Dirichlet's series.