



MSC 41A05

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ ПО ЦЕЛОЧИСЛЕННЫМ СДВИГАМ ОБОБЩЁННЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ КОШИ

Т.А. Виноградова

Воронежский институт МВД России,
пр. Патриотов, 53, Воронеж, 394065, Россия, e-mail: grapes1@yandex.ru

Ключевые слова: распределение Коши, интерполяционные разложения, ряды Фурье, распределение Лоренца.

В различных разделах математики имеется широкий круг задач, приводящих к неортогональным системам. Неортогональные системы весьма характерны для задач анализа различных сигналов и спектров. В общем виде эти задачи можно сформулировать как выделение отдельных компонент в исследуемой зависимости. В настоящее время широкую применимость получили методы теории всплесков, которые изначально строятся ортогональными. Однако, зачастую и конкретный тип всплеска, и его параметры выбираются чисто эвристически, на основе большого числа вычислительных экспериментов. Кроме того, прямой физический смысл имеют, как правило, не коэффициенты разложения при отдельных всплесках, а лишь некоторые их комбинации. Также, вопреки распространенному мнению, оказывается, что при правильной организации вычислений, многие стандартные методы ничуть не уступают всплесковым.

В последнее время среди получивших широкое распространение методов разложения функций часто используются аппроксимации мультипликативными сдвигами некоторой целой функции $w(z)$ вида

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k w(a_k z),$$

где f_k – коэффициенты разложения, а a_k – набор параметров мультипликативных сдвигов, а также аппроксимации аддитивными сдвигами некоторой целой функции $w(z)$ вида

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k w(z - k).$$

Наиболее распространённые и известные разложения по мультипликативным сдвигам – это ряды Фурье, ряды Бесселя-Каптейна. Ещё более распространены разложения по аддитивным сдвигам с использованием всплесков, сплайнов, функций Рвачёвых, квадратичных экспонент (функций Гаусса).



В настоящей работе при анализе спектров предлагается использовать разложение исследуемого сигнала по компонентам заданного вида, полученным из каких-либо теоретических соображений. И если для работы с гауссовыми функциями существуют разработанные методы [1-4], то в случае функции Лоренца или распределений Коши такие методы только находятся в стадии разработки.

В работе изучаются интерполяционные разложения произвольной функции по целочисленным сдвигам обобщённого распределения Коши (Лоренца) вида

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \frac{a}{b + (x - k)^c},$$

где a, b, c – некоторые положительные постоянные.

Для решения интерполяционной задачи в явном виде нужно найти коэффициенты разложения f_k , а эти коэффициенты выражаются через значения узловой функции $G_{a,b,c}(x)$, которая удовлетворяет соотношениям

$$G_{a,b,c}(0) = 1, \quad G_{a,b,c}(m) = 0, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad m \neq 0.$$

Для указанного метода интерполяции при значениях параметра $c \geq 2$ выведена явная формула для узловой функции, проведено подробное численное исследование задачи.

Отметим, что случай $c = 2$ был исследован Л.А. Мининым и Е.А. Киселёвым. Ими было получено разложение

$$G_{s,s^2,2}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k \exp(ikx),$$

и найдена явная интегральная формула для коэффициентов

$$g_k = \frac{(-1)^k \operatorname{sh}(\pi s)}{\pi^2} \int_0^{\pi} \frac{\cos(kx) dx}{\operatorname{ch}(sx)}.$$

В нашей работе получено в том числе обобщение этой формулы для случая $c > 2$.

Литература

1. Maz'ya V., Schmidt G. Approximate approximations / University of Linköping, Sweden, 2007.
2. Zhuravlev M.V., Kiselev E.A., Minin L.A., Sitnik S.M. Jacobi theta-functions and systems of integral shifts of Gaussian functions // Journal of Mathematical Sciences. Springer. – 2011. – 173, №2. – P.231-241.
3. Журавлёв М.В., Киселёв Е.А., Минин Л.А., Ситник С.М. Тета-функции Якоби и системы целочисленных сдвигов функций Гаусса // Современная математика и её приложения. Уравнения в частных производных. – 2010. – Т.67. – С.107-116.
4. Минин Л.А., Ситник С.М., Журавлев М.В. О вычислительных особенностях интерполяции с помощью целочисленных сдвигов гауссовых функций // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. – 2009. – №13 (68), Вып.17/2. – С.89-99.



**INTERPOLATION DECOMPOSITION OF FUNCTIONS
ON INTEGER-VALUED SHIFTS OF GENERALIZED CAUCHY'S
DISTRIBUTIONS**

T.A. Vinogradova

Voronezh Institute of the Russian Ministry of Internal Affairs,
Patriotov Av. 53, Voronezh, 394065, Russia, e-mail: grapes1@yandex.ru

Key words: Cauchy's distribution, interpolation decomposition, Fourier's series, Lorentz's distribution.