MSC 42A38

КЛАССЫ ОСНОВНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ПОЛНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ-БЕССЕЛЯ

С.А. Рощупкин

Елецкий государственный университет им. И.А.Бунина,
ул. Совхозная, 13, Елец, 399761, Россия, e-mail: roshupkinsa@mail.ru

Ключевые слова: преобразование Фурье-Бесселя, основные функции, интегральное ядро, быстро-убывающие функции.

Основные функции для классического преобразования Фурье-Бесселя (см. [1]), оказались плохо приспособленными при работе с полным преобразованием Фурье-Бесселя (см. [2]). В связи с чем появилась необходимость введения новых классов основных функций, которые частично рассмотрены в этой работе.

Пусть $R_N^+ = R_n \times R_{N-n}$, $x = (x', x'')$, $x' \in R_n$, $x'' \in R_{N-n}$, $j_\nu(x)$ — одно из решений сингулярного уравнения Бесселя $\frac{1}{t^\gamma}\frac{d}{dt}t^\gamma\frac{d}{dt}u = -u$, отвечающее индексу $\gamma = 2\nu+1$ и удовлетворяющее условиям $j_\nu(0) = 1$, $j'_\nu(0) = 0$.

Ядра прямого и обратного полного преобразований Фурье-Бесселя имеют вид:

$$\Lambda^{\pm}_\gamma(x',\xi') = \prod_{i=1}^{n}\left(j_{\nu_i}(x_i\xi_i) \mp i\frac{x_i\xi_i}{\gamma_i+1}j_{\nu_i+1}(x_i\xi_i)\right), \quad \gamma = (\gamma_1,\ldots,\gamma_n), \quad \gamma_i > 0, \quad \gamma_i = 2\nu_i + 1.$$

Прямое и обратное полные смешанные преобразования Фурье-Бесселя (далее, сокращая, будем писать $\mathcal{F}_B$-*преобразования*) функции u задается выражениями:

$$\mathcal{F}_B[u](\xi) = \int\limits_{R_n}\Lambda^+_\gamma(x',\xi')\,e^{-i(x'',\xi'')}\,u(x)\,(x')^\gamma\,dx,$$

$$\mathcal{F}_B^{-1}[u](x) = C_{\gamma,n,N}\int\limits_{R_n}\Lambda^-_\gamma(x',\xi')\,e^{-i(x'',\xi'')}\,u(x)\,(x')^\gamma\,dx = C_{\gamma,n,N}\mathcal{F}_B[u](-x).$$

Здесь $C_{\gamma,n,N} = \frac{(2\pi)^{1-n}}{2^{2(\nu+1)}\,\Gamma^2(\nu+1)}$, $(x')^\gamma = \prod\limits_{i=1}^{n}(x_i^2)^{\gamma_i/2}$.

Введем следующие обозначения: $\alpha = (\alpha', \alpha'')$, α' и α'' целочисленные мультииндексы, размерности n, $N-n$ соответственно,

$$D_B^\alpha = \left(\partial_B^{\alpha'}\right)_{x'}\partial_{x''}^{\alpha''}, \quad \left(\partial_B^{\alpha'}\right)_{x'} = \partial^{\alpha_1}_{B_{\gamma_1}}\ldots\partial^{\alpha_n}_{B_{\gamma_n}}, \quad \partial^{\alpha''}_{x''} = \partial^{\alpha_{n+1}}_{x_{n+1}}\ldots\partial^{\alpha_N}_{x_N}, \quad \partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 1,2,\ldots,N,$$

$$\partial^{\alpha_i}_{B_{\gamma_i}} = \begin{cases} B^{\alpha_i/2}_{\gamma_i}, & \alpha_i = 2k_i, \\ \partial_{x_i}B^{(\alpha_i-1)/2}_{\gamma_i}, & \alpha_i = 2k_i+1 \end{cases}, \quad k_i = 0,1,2,\ldots, \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

где $B_{\gamma_i} = \frac{1}{x_i^{\gamma_i}}\frac{d}{dx_i}x_i^{\gamma_i}\frac{x}{dx_i}$ — сингулярный дифференциальный оператор Бесселя, отвечающий индексу γ_i. В классе четных, достаточно гладких интегрируемых функций оператор D_B^α имеет символ $(i\xi)^\alpha$: $D_B^\alpha\varphi = \mathcal{F}_B^{-1}[(i\xi)^\alpha\mathcal{F}_B\,\varphi]$ (такие операторы рассмотрены в [3]).

Введем систему норм

$$|\langle\varphi\rangle|_k = max\left(\sup_{|\alpha|+|\beta|\le k,\ x\in R_n}\left|x^\alpha\,D^\beta_{B_\gamma}\,\varphi(x)\right|,\ \sup_{|\alpha|+|\beta|\le k,\ x\in R_n}\left|\,D^\beta_{B_\gamma}\,(x^\alpha\varphi(x))\right|\right), \tag{1}$$

где выполнено условие

$$\alpha_i+\beta_i=2k_i,\ \ i=1,\dots,n,\ \ k_i=0,1,2,\dots \qquad (2).$$

Через $S_{ev}(R_N)$ будем обозначать множество быстро убывающих функций четных по каждой из переменных $x_1,\dots,x_n$ с конечными нормами (1) для каждого целого положительного k. Эти нормы определяют топологию в $S_{ev}(R_N)$. В частности, последовательность функций u_n из $S_{ev}(R_N)$ сходится к функции u в этом пространстве, если сходится к ней по каждой из этих норм, когда индекс k пробегает все неотрицательные числа.

Теорема 1. *При выполнении условия* (2) $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$*-преобразование осуществляет непрерывный (в обе стороны) изоморфизм пространства* S_{ev}, *т.е. для любого неотрицательного целого числа* k, *найдется число* k', *что выполняется неравенство* $|\langle\mathcal{F}_B[\,\varphi]\,\rangle|_k\le|\langle\varphi\rangle|_{k_1}$.

Среди основных функций оказывается удобным класс основных функций Л. Шварца $S(R_N)$, исчезающих на координатных гиперплоскостях $x_i=0,\ \ i=1,2,\dots,n$ (типа основных функций П.И. Лизоркина, см. также в [4]):

$$\mathbf{\Psi}_\gamma(R_N^+)=\{\psi:\ \psi\in S,\ \partial_{B_i}^{\beta}\psi(0)=0,\ \beta\in Z^+\},\ i=1,\dots,n,\ \mathbf{\Phi}_\gamma(R_N^+)=\{\varphi:\ \varphi=\mathcal{F}_B[\psi],\ \psi\in\mathbf{\Psi}_\gamma(R_N^+)\}.$$

В классах $\mathbf{\Psi}_\gamma(R_N^+)$ и $\mathbf{\Phi}_\gamma(R_N^+)$ символ оператора D_B^α имеет тот же вид, что и в S_{ev}.

Теорема 2. *Класс* $\mathbf{\Phi}_\gamma(R_N^+)$ *состоит из тех и только тех функций* $\varphi(x)\in S(R_N^+)$, *которые ортогональны (в смысле весового скалярного произведения) всем многочленам:*

$$\varphi(x)\in S(R_N^+)\,,\quad \int\limits_{R_N^+}(x')^m\varphi(x)\,x^\gamma\,dx=0,\quad\Longleftrightarrow\quad \varphi\in\mathbf{\Phi}_\gamma(R_N^+),$$

Для четного преобразования Фурье-Бесселя (см. книгу [4]) *функции* $\varphi\in\mathbf{\Phi}$ *ортогональны (в смысле весового скалярного произведения) всем многочленам, четным по каждой из переменных* $x_1,\dots,x_n$:

$$\varphi(x)\in S(R_N^+)\,,\quad \int\limits_{R_N^+}(x')^{2m}\varphi(x)\,x^\gamma\,dx=0,\quad\Longleftrightarrow\quad \varphi\in\mathbf{\Phi}_\gamma(R_N^+),$$

Литература

1. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи / М.: Наука, 1997.

2. Катрахов В.В., Ляхов Л.Н. Полное преобразование Фурье-Бесселя и алгебра сингулярных псевдодифференциальных операторов // Дифференц. Уравнен. – 2011. – 47, № 5. – С.681-695.

3 Lyakhov L.N. , Raykhelgauz L.B. Even and odd Fourier-Bessel transformations and some singular differential equations // Cambridge Scientific Publishers. – 2012 / Analytic Methods of Analysis and Differential Equations. AMADE-2009. – C.107-112.

4 Ляхов Л.Н. В-гиперсингулярные интегралы и их приложения к описанию фупкциональных классов Киприянова и к интегральным уравнениям с B-потенциальными ядрами / Липецк: ЛГПУ, 2007. – 232 с.

BASED FUNCTIONS CLASSES FOR COMPLETE FOURIER-BESSEL'S TRANSFORMATION

S.A. Roshchupkin

Elets State University,

Sovkhoznaya Str., 13, Elets, 399761, Russia, e-mail: roshupkinsa@mail.ru

Key words: Fourier-Bessel's transformation, based functions, integral kernel, rapid decreasing functions.