MSC 34B05

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ПЛОСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ПРИ СИНГУЛЯРНОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ ОБЛАСТИ

В.И. Власов

Вычислительный центр им. А.А.Дородницына РАН,
ул. Вавилова, 40, Москва, 119333, Россия, e-mail: vlasov@ccas.ru

Ключевые слова: асимптотика, краевые задачи, сингулярная деформация, конформное отображение.

1. Область $g \in \overline{\mathbb{C}}$ принадлежит классу $(\mathcal{A})$, если она односвязна, и конформное отображение $\mathbb{U} \overset{conf}{\longrightarrow} g$ круга $\mathbb{U}$ на нее непрерывно в $\overline{\mathbb{U}}$ в смысле метрики римановой сферы. Будем говорить, что $g \in (\gamma, \Gamma)$, если $g \in (\mathcal{A})$ и $\partial g = \gamma \cup \Gamma$, где Γ — кусочно-гладкая дуга без внешних и внутренних заострений, а дуга γ в некоторых g-окрестностях ее концевых точек является ляпуновской и соединяется с Γ в этих точках также без заострений. Если существует область $G \in (\mathcal{A})$, являющаяся расширением g через Γ, то будем писать $G \overset{\Gamma}{\supset} g$. (Уточнение этих и используемых ниже определений см. в [1], [2]).

Пусть выполняются условия: 1) границы областей G_0, $G_L \in (\mathcal{A})$ имеют общую дугу σ_L°, а G_L° — компонента пересечения $G_0 \cap G_L$, примыкающая к σ_L°; 2) для отображения $\mathcal{F}_0 : G_0 \overset{conf}{\longrightarrow} \mathbb{H}$ введем точки M и N по формулам $M := \mathcal{F}_0^{-1}(\infty) \in \sigma_L^\circ$, $N_0 := \mathcal{F}_0^{-1}(0) \notin \operatorname{int} \sigma_L^\circ$; 3) L определим равенством $L := \sup_{z \in \mathcal{F}_0(\sigma_L)} |z|$, $\sigma_L := \partial G_L^\circ \setminus \operatorname{int} \sigma_L^\circ$. Тогда будем говорить, что G_L получена путем деформирования области G_0 вблизи точки N с параметром деформации L, соответствующим отображению $\mathcal{F}_0$, и писать $G_L \in (G_0, \mathcal{F}_0, L)$. Основанием для такого определения является

Предложение 1. *Если $\{G_L\}_{L=0}^{L_0}$, $L_0 > 0$, — семейство областей $G_L \in (G_0, \mathcal{F}_0, L)$, то при $L \to 0$:*

1) семейства $\{G_L\}$ и $\{G_L^\circ\}$ сходятся к G_0 как к ядру (в смысле Каратеодори [3]);

2) семейство дуг $\{\sigma_L^\circ\}$ сходится к ∂G_0 в смысле следующего равенства:

$$\sigma_L^\circ \setminus \mathcal{F}_0^{-1}(\mathbb{D}_+(L)) = \partial G_0 \setminus \mathcal{F}_0^{-1}(\mathbb{D}_+(L))$$

при достаточно малых L, где $\mathbb{D}_+(L) := \{z : |z| < L, \operatorname{Im} z > 0\}$.

Теорема 1. *Если $G_L \in (G_0, \mathcal{F}_0, L)$, то для отображения $\mathcal{F}_L : G_L \overset{conf}{\longrightarrow} \mathbb{H}$, подчиненного условию*

$$\mathcal{F}_L(w) \sim \mathcal{F}_0(w), \qquad w \to M, \tag{1}$$

справедливо разложение

$$\mathcal{F}_L(w) = \mathcal{F}_0(w) + \sum_{k=0}^{\infty} B_k \, L^{k+1} \left[\mathcal{F}_0(w)\right]^{-k}, \tag{2}$$

сходящееся на $\mathcal{F}_0^{-1}\big(\mathbb{K}_+(L)\big)$, *где* $\mathbb{K}_+ := \{z : |z| > L, \mathrm{Im} z \geq 0\}$. *Коэффициенты* $B_k = B_k(L)$ *вещественны, и при* $k > 0$ *справедлива оценка* $|B_k\,(L)| \leq 1/\sqrt{k}$, *а при условии* $N_L := \mathcal{F}_L^{-1}(0) \notin \operatorname{int} \sigma_L^{\circ}$ — *следующая оценка:* $|B_0\,(L)| \leq 2$.

2. Пусть выполняются условия: области семейств $\{g_L\}$ и $\{G_L\}$, $L \in (0, L_0)$, принадлежат классу $(\mathcal{A})$,

$$G_0 \overset{\Gamma}{\supset} g_0 \in (\gamma_0, \Gamma), \qquad G_L \overset{\Gamma}{\supset} g_L \in (\gamma_L, \Gamma),$$

и для каждой из G_L отображение $\mathcal{F}_L : G_L \xrightarrow{conf} \mathbb{H}$ удовлетворяет условию (1). В каждой из областей семейства $\{g_L\}$, $L \in (0, L_0)$, рассмотрим задачу Дирихле

$$\Delta\psi_L(w) = 0, \quad w \in g_L; \qquad \psi_L(w) = 0, \quad w \in \operatorname{int}\gamma_L; \qquad \psi_L(w) = h(w) \in L_2(\Gamma), \qquad (3)$$

решение которой в классе типа Харди $e_2(g_L, \Gamma)$ существует и единственно [2].

Теорема 2. *Справедливо асимптотическое разложение*

$$\psi_L(w) = \psi_0(w) + \sum_{k=2}^{\infty} L_k\, \psi_{(k)}(w), \qquad L \to 0,$$

равномерное по w *внутри* $\overline{g} \setminus N_0$, *где* $\psi_{(k)}(w)$ *является линейной комбинацией функций* $\mathrm{Im}\,\big[\mathcal{F}_0(w)\big]^{-n}$, $n = \overline{1, k-1}$, *с явно выписываемыми вещественными коэффициентами.*

Аналогичная теорема может быть сформулирована и для асимптотики величины $\operatorname{grad} \psi_L(N_L)$ при $L \to 0$.

С помощью этих теорем была получена асимптотика решения однородной задачи Дирихле для уравнения Пуассона в областях со скругленными углами и асимптотика его градиента на закругляющей кривой при стремлении радиуса закругления к нулю [2], а также асимптотики решения аналогичной задачи в областях с узкой щелью, имеющей дно произвольной формы, и асимптотика его градиента на дне щели при стремлении ширины щели к нулю [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №13-01-00923), Программы ОМН РАН «Современные проблемы теоретической математики», проект «Оптимальные алгоритмы решения задач математической физики» и Программы №3 фундаментальных исследований ОМН РАН.

Литература

1. Власов В.И. О вариации отображающей функции при деформировании области // Доклады АН СССР. – 1984. – 275, №6. – С.1299-1302.

2. Власов В. И. Краевые задачи в областях с криволинейной границей / Москва: ВЦ АН СССР, 1987.

3. Caratheodory C. Gesammelte mathemetische Schriften / München: Dritter Band., 1955; München: Vierter Band., 1956.

4. Власов В. И., Пальцев А. Б. Асимптотика решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в областях с узкой щелью // Журнал вычисл. мат. и матем. физ. – 2003. – 43, №12. – С.1768-1805.

ABOUT SOLUTIONS ASYMPTOTIC OF SOME PLANE BOUNDARY PROBLEMS AT SINGULAR DOMAIN DEFORMATION

V.I. Vlasov

*Dorodnitcyn Computing Centre, Russian Academy of Sciences,
Vavilova St., 40, Moscow, 119333, Russia, e-mail: vlasov@ccas.ru

Key words: asymptotic, boundary problems, singular deformation, conformal image.