MSC 35R30

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИЛЬНО ВЫРОЖДЕННОГО ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ

Н.Д. Иванова

Южно-Уральский государственный университет,
пр. Ленина, 76, Челябинск, 454080, Россия, e-mail: natalia.d.ivanova@gmail.com

Ключевые слова: обратные задачи, вырожденные уравнения, банахово пространство, ограниченные операторы.

Пусть $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ – банаховы пространства. Оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$ (является линейным непрерывным), оператор $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$ (линеен, замкнут и плотно определен в пространстве $\mathfrak{X}$). Снабдим область определения D_M оператора M нормой его графика $\|\cdot\|_{D_M}$.

Рассмотрим задачу нахождения функций $x : [0,T] \to \mathfrak{X}$ и $u : [0,T] \to \mathfrak{U}$ из соотношений

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + B(t)u(t) + y(t), \quad t \in [0,T]\,, \tag{1}$$

$$x(0) = x_0\,, \tag{2}$$

$$\Phi x(t) = \Psi(t)\,, \quad t \in [0,T]\,. \tag{3}$$

При условии сильной (L,p)-радиальности оператора M [1] имеем представление пространств в виде прямых сумм $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^0 \oplus \mathfrak{X}^1$, $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}^0 \oplus \mathfrak{Y}^1$. Обозначим через P и Q проекторы, действующие, соответственно, вдоль $\mathfrak{X}^0$ на $\mathfrak{X}^1$ и вдоль $\mathfrak{Y}^0$ на $\mathfrak{Y}^1$. Сужения операторов L и M на подпространства $\mathfrak{X}^k$ обозначим через $L_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}^k;\mathfrak{Y}^k)$, $M_k \in \mathcal{C}l(\mathfrak{X}^k;\mathfrak{Y}^k)$, $k = 0,1$. При этом существуют обратные операторы $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}^0;\mathfrak{X}^0)$ и $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}^1;\mathfrak{X}^1)$, а также сильно непрерывная полугруппа операторов $\{X(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}) : t \geq 0\}$, разрешающая однородное уравнение (1).

Теорема 1. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален, $\Phi \in \mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{U})$, $\mathfrak{X}^1 \subset \ker\Phi$, $B \in C^1([0,T];\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{Y}))$, $y \in C^1([0,T];\mathfrak{Y})$, $\Psi \in C^1([0,T];\mathfrak{U})$, существует обратный оператор $(\Phi M_0^{-1}(I-Q)B(t))^{-1}$ и при этом $(\Phi M_0^{-1}(I-Q)B)^{-1} \in C^1([0,T];\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$, $\Phi HB(t) = 0$ при всех $t \in [0,T]$, $x_0 \in D_M$,*

$$(I-P)x_0 = M_0^{-1}(I-Q)(B(0)(\Phi M_0^{-1}(I-Q)B(0))^{-1}\times$$

$$\times\left(\Psi(0) + \sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}(I-Q)y^{(k)}(0)\right) + y(0)).$$

Тогда решение $x \in C^1([0,T];\mathfrak{X}) \cap C([0,T];D_M)$, $u \in C^1([0,T];\mathfrak{U})$ задачи (1)–(3) существует, единственно, имеет вид

$$x(t) = X(t)x_0 + \int_0^t X(t-s)L_1^{-1}Q(B(s)u(s)+y(s))ds-$$

$$-\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}\left((I-Q)(B(t)u(t)+y(t))\right)^{(k)},$$

$$u(t) = -(\Phi M_0^{-1}(I-Q)B(t))^{-1}\left(\Psi(t)+\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}(I-Q)y^{(k)}(t)\right)$$

и удовлетворяет условиям

$$\|x\|_{C^1([0,T];\mathfrak{X})} \leq c\left(\|Px_0\|_{D_M} + \|\Psi\|_{C^1([0,T];\mathfrak{U})} + \|y\|_{C^1([0,T];\mathfrak{Y})}\right),$$

$$\|u\|_{C^1([0,T];\mathfrak{U})} \leq c\left(\|\Psi\|_{C^1([0,T];\mathfrak{U})} + \|y\|_{C^1([0,T];\mathfrak{Y})}\right),$$

где $c > 0$ не зависит от x_0, y, Ψ.

Замечание 1. Условие $\Phi HB(t) = 0$ при всех $t \in [0,T]$ выполнено в следующих случаях:

- оператор M сильно $(L,0)$-радиален, тогда $H = 0$;
- $\mathrm{im} B(t) \subset M[\ker L]$, тогда $HB(t) \equiv 0$;
- $\mathrm{im} L_0 \subset M[\ker \Phi]$, тогда $\Phi H = 0$.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, $T > 0$, β, $\delta \in \mathbb{R}$. Обратная задача

$$(\beta+\Delta)(v(x,0)-v_0(x)) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{4}$$

$$(1-\delta)v + \delta\frac{\partial v}{\partial n}(x,t) = (1-\delta)w + \delta\frac{\partial w}{\partial n}(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega\times[0,T], \tag{5}$$

для системы уравнений

$$v_t(x,t) = \Delta v(x,t) - \Delta w(x,t) + b_1(x,t)u(t), \quad (x,t) \in \Omega\times[0,T], \tag{6}$$

$$0 = v + (\beta+\Delta)w + b_2(x,t)u(t), \quad (x,t) \in \Omega\times[0,T], \tag{7}$$

с условиями переопределения на подпространстве вырождения

$$\int_\Omega K(y)w(y,t)dy = \psi(t), \quad (x,t) \in \Omega\times[0,T], \tag{8}$$

может быть исследована в рамках задачи (1)–(3). Искомыми функциями здесь являются $v(x,t)$, $w(x,t)$, $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$. Система уравнений (6), (7) с точностью до линейной замены функций $v(x,t)$, $w(x,t)$ совпадает с линеаризацией квазистационарной системы уравнений фазового поля [2], описывающей в рамках мезоскопической теории фазовые переходы первого рода.

Литература

1. Федоров В.Е. Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов // Алгебра и анализ. – 2000. – 12, Вып. 3. – С.173-200.

2. Плотников П.И., Клепачева А.В. Уравнения фазового поля и градиентные потоки маргинальных функций // Сиб. мат. журн. – 2001. – 42, №3. – С.651-669.

INVERSE PROBLEM FOR STRONG DEGENERATED EVOLUTION EQUATION

N.D. Ivanova

South-Ural State University,
Lenin Av., 76, Cheliabinsk, 454080, Russia, e-mail: natalia.d.ivanova@gmail.com

Key words: inverse problems, degenerate equations, Banach's space, bounded operators.