MSC 85A25

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ В СЛОЕ ПОЛУПРОЗРАЧНОГО ДИЭЛЕКТРИКА В ПРИБЛИЖЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

Лам Тан Фат, Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. В работе, в приближении геометрической оптики, решается стационарпая задача о вычислении потока энергии электромагнитного излучения внутри бесконечного слоя оптически полупрозрачного диэлектрика, вызванного неоднородным распределением в нем температуры.

Ключевые слова: перенос излучения, закон Стефана-Больцмана, оптический показатель, коэффициент отражения, геометрическая оптика.

1. Введение. Обычно, в физической литературе, расчёт радиационно-кондуктивного теплообмена в оптически полупрозрачных средах, осуществляется численными методами (см., например, [1], [2]). Это связано с тем, что задачи переноса излучения существенно отличаются от стандартных краевых и начально-краевых задач математической физики. Они, согласно своей математической формулировке, естественным образом, распадаются на два этапа. Первый этап состоит в вычислении вектора плотности потока $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ лучистой энергии в каждой точке $\mathbf{r}$, переносимой в единицу времени внутри оптически полупрозрачного образца, при произвольном распределении в нём температуры. Вычисление векторного поля $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ осуществляется на основе кинетического уравнения переноса излучения в приближении геометрической оптики, с учётом краевых условий для лучей на границе образца. Если образец оптически однороден, то зависимость от $\mathbf{r}$ поля $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ возникает посредством функциональной зависимости плотности потока энергии от неоднородного распределения температуры $T(\mathbf{r})$ в образце, так как само излучение возникает вследствие нагретости каждого физически малого объема образца среды, то есть в образце имеется распределенный источник излучения, интенсивность которого зависит от температуры.

Формальное решение уравнения переноса излучения с учётом условий на границе образца приводит к функционалу $\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \mathbf{P}(\mathbf{r}; T)$ от распределения температуры $T(\mathbf{r})$ (см., например, монографии [3], [4]). После вычисления $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ на втором этапе решается начально-краевая задача для эволюционного уравнения, описывающего изменение распределения температуры, которое представляет собой уравнение теплопроводности с источником в виде дивергенции $-(\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}))$ при заданных условиях для температуры на границе образца. Как на первом, так и на втором этапе задачи, как правило, не поддаются точному аналитическому решению, за исключением образцов, имеющих довольно простую форму. В связи с этим, становятся очень важными приближенные аналитические методы, в частности, методы решения в виде разложений по степеням малого параметра, например, в случае, когда имеется малое отклонение формы образца от той, при которой имеется точное решение. Именно неординарность математической постановки задач радиационно-кондуктивного теплообмена и сложность их исследования аналитическими методами приводят к преобладанию численных методов при решении практических задач, в рамках которых удается при построении алгоритма численной процедуры совместно решать кинетическое уравнение переноса излучения и уравнение теплопроводности (см. [3], [4], [5]).

В настоящей работе аналитически решается задача о вычислении плотности потока $\mathbf{P}(\mathbf{r})$, то есть, согласно приведенному выше обсуждению, решается задача первого этапа о переносе излучения. Она решается для образца в виде слоя оптически полупрозрачной среды, ограниченного параллельными плоскостями. Возможно ее решения, как раз, представляет собой то редкое исключение, когда удается найти функцию $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ в виде ряда по степеням коэффициента отражения. Ниже, в разд. 2, приводится решение академической одномерной задачи переноса излучения на отрезке $[0, L]$, когда плотность потока зависит только от одной координаты x и представляется в виде функции $P(x)$, которая является функционалом от распределения температуры $T(x)$ на нем, $P(x) = P[T(x)]$ (см., по этому поводу [6]). Далее, в следующем разделе, это решение обобщается для решения задачи переноса излучения в слое полупрозрачной среды.

2. Одномерная задача переноса излучения. Пусть на отрезке $[0, L]$ имеется распределённый источник излучения, имеющий интенсивность $P_0(y)$ в каждой точке $y \in [0, L]$, где функция $P_0(y)/2$ физически представляет собой отнесённую к единичной площадке, перпендикулярной к отрезку, величину электромагнитной энергии излучения, которое проходит в каждом из возможных направлений (вправо и влево) в единицу времени. Множитель $1/2$ появляется в связи с тем, что, в стационарном случае, источник излучает равномерно во времени с одинаковой интенсивностью в обе стороны. Положим, что плотность распределения таких источников излучения на единице длины равна α, т.е. мера распределения источников на отрезке длиной dy равна αdy.

Каждый из лучей двигается равномерно со скоростью света внутри отрезка и, достигая границы, испытывает отражение с вероятностью (коэффициентом отражения) r. После этого он продолжает движение в обратном направлении. Движение луча (той его части, которая остаётся внутри образца при каждом из отражений) с последовательными отражениями от границ продолжается неограниченно.

Обозначим посредством $Q_\pm(s|y) \le 1$, соответственно, доли вкладов относительно начальной интенсивности $P_0(y)$ в общий поток энергии электромагнитного излучения вправо и влево, которые остаются после прохождения лучами расстояния s, испущенного из точки y. А именно, знаками $+$ и $-$ мы пометили вклады в поток энергии от лучей, ушедших вправо и влево от источника в точке y.

Излучённые в точке y в направлениях $\pm$ лучи и имеющие, после прохождения расстояния s, интенсивности $Q_\pm(s|y)P_0(y)$, теряют, при прохождении отрезка длины ds, $\alpha Q_\pm(s|y)ds$ своей величины за счёт поглощения излучения средой. При этом коэффициент α поглощения совпадает с коэффициентом излучения, который определяет распределение источников. Совпадение этих коэффициентов обосновывается законом Кирхгофа, согласно которому, в каждой пространственной точке, интенсивность поглощения излучения совпадает с интенсивностью его излучения. Таким образом, функции $Q_\pm(s|y)$ удовлетворяют кинетическому уравнению переноса излучения

$$\frac{dQ_\pm}{ds} = -\alpha Q_\pm .$$

при начальном условии $Q_\pm(0|y) = 1/2$, где время измеряется в единицах расстояния, прошедшего лучом с постоянной скоростью света. Следовательно, $Q_\pm(s|y) = \exp(-\alpha s)/2$, если луч не испытал отражений от границ отрезка. В общем случае, при учёте отражений от границ, так как, при каждом отражении, луч теряет часть интенсивности, которая определяется коэффициентом отражения $r \le 1$, имеем

$$Q_\pm(s|y) = r^{n_\pm(s|y)}\exp(-\alpha s)/2 ,$$

где $n_\pm(s|y)$ – число отражений от границ образца того луча, который выходит из точки y в направлении $+$ или $-$ и проходит расстояние s.

Обозначим, далее, $P_\pm(x)$ поток энергии излучения в точке x, идущий, соответственно, вправо и влево. Пару этих функций будем рассматривать как двухкомпонентный вектор $\langle P_+(x), P_-(x)\rangle$. При этом полный поток энергии $P(x)$ в точке x равен разности введённых потоков

$$P(x) = P_+(x) - P_-(x) . \tag{1}$$

В стационарном состоянии, каждый из потоков $P_\pm(x)$ излучения, состоящего из лучей, идущих вправо $(+)$ и влево $(-)$ от точки x, представляет собой сумму вкладов потоков $Q_\pm(s|y)$ от всех лучей, излучённых от всех точек y в различных направлениях и испытавших различное число отражений от границ образца. При этом для всех этих лучей, при фиксации точки y, должны быть соблюдены условия: 1) лучи приходят в точку x слева/справа; 2) полная длина пути лучей должна определяться из условий их выхода из точки y и прихода в точку x.

В связи с этим, обозначим, посредством $Q_{\sigma\rho}(x,y)$ для каждой фиксированной пары точек $\langle x, y\rangle$ и пары $\langle \sigma, \rho\rangle$ знаков, указывающих направления $\sigma, \rho = \pm$, доли потока энергии излучения, которое переносится лучами, выходящими из точки y в направлении ρ и приходящими в точку x, двигаясь по направлению σ. Набор введённых функций составляет 2×2-матрицу по индексам σ, ρ. Эту матрицу будем называть *матрицей перехода*. Для получения значений вектора $\langle P_+(x), P_-(x)\rangle$, согласно определению матрицы $Q_{\sigma\rho}(x,y)$, ее элементы, которые описывают доли потоков энергии, необходимо проинтегрировать по всем вкладам в общий поток от всех точек y с весом $P_0(y)dy$ и просуммировать по обоим направлениям излучения $\rho = \pm$. Тогда вектор $P_\sigma(x)$ вычисляется согласно следующей формуле

$$P_\sigma(x) = \frac{1}{2}\sum_{\rho=\pm}\alpha\int_0^L Q_{\sigma\rho}(x,y)P_0(y)dy . \tag{2}$$

Следовательно, на основании (1), поток излучения $P(x)$ в точке x выражается следующим образом

$$P(x) = \frac{1}{2}\alpha \sum_{\sigma,\rho=\pm} \sigma \int_0^L Q_{\sigma\rho}(x,y)P_0(y)dy\,. \tag{3}$$

Остается вычислить матрицу $Q_{\sigma\rho}(x,y)$, что осуществляется посредством непосредственного пересчёта вкладов каждого из лучей. Это оказывается возможным благодаря одномерной геометрии задачи. При этом не приходится решать интегральные уравнения переноса излучения, о которых шла речь во введении.

Пусть $X_{\sigma\rho}(s|y)$ – координата текущей точки, достигнутой лучом, который прошёл общее расстояние s, выходя из точки y в направлении ρ и придя в текущую точку, двигаясь в направлении σ. Этот луч попадает в точку x после прохождения расстояний, равных $s^{(m)}_{\sigma\rho}$, $m = 0, 1, 2, ...$ и совершения m отражений от границы. Они определяются как решения уравнения

$$X_{\sigma\rho}(s^{(m)}_{\sigma\rho}|y) = x\,, \quad m = 1, 2, ... \tag{4}$$

и, поэтому, являются также функциями от x и y, однако, мы далее не отмечаем явно этой зависимости.

Тогда функции $Q_{\sigma,\rho}(x,y)$ представляются формулой

$$Q_{\sigma,\rho}(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty} Q_{\sigma,\rho}(s^{(m)}_{\sigma\rho}|y)\,. \tag{5}$$

Таким образом, для вычисления матрицы $Q_{\sigma\rho}(x,y)$, необходимо найти траектории $X_{\sigma\rho}(s|y)$.

Вычислим, прежде всего, число $n_\sigma(s|y)$. Если луч был выпущен вправо, то, по прошествии ровно $n_+(s|y)$ отражений от границ, имеем

$$(L-y) + n_+(s|y)L < s < (L-y) + (n_+(s|y)+1)L\,.$$

Поэтому, беря целую часть, получаем

$$[(s+y-L)/L] = n_+(s|y)\,. \tag{6}$$

Точно также, по прошествии ровно $n_-(s|y)$ отражений от границ, для луча выпущенного влево, имеем

$$y + (n_-(s|y)-1)L < s < y + n_-(s|y)L\,.$$

Поэтому

$$[(s-y+L)/L] = n_-(s|y)\,. \tag{7}$$

Вычислим, теперь, длины $s^{(m)}_{\sigma\rho}$, $m = 1, 2, ...$ путей луча. Траектории $X_{\sigma\rho}(s|y)$ периодические по s с периодом $2L$. По этой причине, функции траектория $X_{\sigma\rho}(s|y)$ строятся сначала при $s < 2L$, а затем продолжается периодически. Заметим, что, для вычисления величин $s^{(m)}_{\sigma\rho}$, нам важны не сами траектории, а уравнения связывающие их с длиной пути s.

Функция $X_{++}(s|y)$ определяется равенством $X_{++}(s|y) = s + y$, если $s < L - y$. Далее, при $2L - y > s > L - y$ функция $X_{++}(s|y)$ не имеет смысла. Периодическое продолжение функции $X_{++}(s|y)$ из области $s < L - y$ для s, удовлетворяющих условию при $2nL - y < s < (2n+1)L - y$, $n = 1, 2, ...$, даёт уравнение

$$X_{++}(s|y) + (2n-1)L + (L-y) = s\,. \tag{8}$$

Для s, удовлетворяющих $(2n+1)L - y < s < 2(n+1)L - y$, $n = 0, 1, 2, ...$, функция $X_{++}(s|y)$ не определена.

Функция $X_{-+}(s|y)$ при $s < L - y$ не существует и, поэтому, она не имеет смысла при произвольных сдвигах на $2Ln$, $n = 1, 2, ...$ этой области, т.е. при $2nL - y < s < (2n+1)L - y$. Наоборот, она имеет смысл при $2L - y > s > L - y$, и в этом случае она определяется уравнением

$$(L - X_{-+}(s|y)) + (L - y) = s\,, \quad X_{-+}(s|y) = 2L - y\,.$$

При этом, ввиду периодичности, имеем, при $L - y + (2n+1)L > s > (2n+1)L - y$, $n = 0, 1, 2, ...$, уравнение

$$(L - X_{-+}(s|y)) + (L - y) + 2nL = s\,. \tag{9}$$

Аналогично вычисляются функции $X_{--}(s|y)$, $X_{+-}(s|y)$. Если $s < y$, то

$$X_{--}(s|y) = y - s\,,$$

а функция $X_{+-}(s|y)$ не имеет смысла. При сдвиге на $2nL$ имеем для s, удовлетворяющих неравенству $y + (2n-1)L < s < 2nL + y$, $n = 1, 2, ...$, уравнение для функции $X_{--}(s|y)$,

$$(L - X_{--}(s|y)) + y + (2n-1)L = s\,. \tag{10}$$

Функция же $X_{+-}(s|y)$, наоборот, имеет смысл при условии $y + 2nL < s < y + (2n+1)L$, $n = 0, 1, 2, ...$ и при этом удовлетворяет уравнению

$$y + 2nL + X_{+-}(s|y) = s\,. \tag{11}$$

Она не имеет смысла при $y + (2n-1)L < s < y + 2nL$, $n = 1, 2, ...$.

Из проведенного анализа следует, что уравнение (4) имеет следующие решения. Для простоты, мы не указываем явно аргументы в числах отражений n_ρ. Полагая в (8) $X_{++}(s|y)$ равным x, имеем для величин $s_{++}^{(m)}$, $m = 1, 2, ...$ при $x > y$ выражение

$$s_{++}^{(2n)} = 2nL + x - y\,, \quad n_+ = 2n,\ n = 0, 1, 2, \ldots\,, \tag{12}$$

и при $x < y$, соответственно, $s_{++}^{(n)} = 2nL + x - y\,, \quad n_+ = 2n,\ n = 1, 2, \ldots$. Аналогично, из (9) получаем

$$s_{-+}^{(2n+1)} = 2(n+1)L - x - y\,, \quad n_- = 2n+1,\ n = 0, 1, 2, ... \tag{13}$$

при любом соотношении между x и y. Из (10) находим при $x < y$

$$s_{--}^{(2n)} = 2nL + y - x\,, \quad n_- = 2n,\ n = 0, 1, 2, ... \tag{14}$$

и при $x > y$, соответственно, $s_{--}^{(n)} = 2nL + y - x\,, \quad n_- = 2n,\ n = 0, 1, 2, \ldots$. Из (11) получаем выражение для функции $s_{+-}^{(n)}$ при любом соотношении между x и y,

$$s_{+-}^{(2n+1)} = y + 2nL + x\,, \quad n_+ = (2n+1)\,,\ n = 0, 1, 2, \ldots\,. \tag{15}$$

Теперь мы в состоянии вычислить матрицу перехода $Q_{\sigma\rho}(x, y)$. Согласно определению (5), имеем

$$Q_{\sigma\rho}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} Q_\rho(s_{\sigma\rho}^{(m)}|y) = \sum_m r^{n_{\sigma\rho}^{(m)}} e^{-\alpha s_{\sigma\rho}^{(m)}}\,,$$

где $n_{\sigma\rho}^{(m)} = n_\rho(s_{\sigma\rho}^{(m)}|y)$, $m = 1, 2, ...$ даются формулами (12)-(15). Подставляя соответствующие выражения и производя суммирования, получаем

$$Q_{++}(x, y) = \theta(x - y) e^{-\alpha(x-y)} + \sum_{m=1}^{\infty} r^{2m} e^{-\alpha(2mL+x-y)} =$$

$$= e^{-\alpha(x-y)} \left[\theta(x - y) + r^2 e^{-2\alpha L}(1 - r^2 e^{-2\alpha L})^{-1}\right]\,, \tag{16}$$

$$Q_{-+}(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} r^{2m+1} e^{-\alpha(2(m+1)L-x-y)} =$$

$$= r e^{-\alpha(2L-x-y)}(1 - r^2 e^{-2\alpha L})^{-1}\,, \tag{17}$$

$$Q_{--}(x, y) = \theta(y - x) e^{-\alpha(y-x)} + \sum_{m=1}^{\infty} r^{2m} e^{-\alpha(2mL+y-x)} =$$

$$= e^{-\alpha(y-x)} \left[\theta(y - x) + r^2 e^{-2\alpha L}(1 - r^2 e^{-2\alpha L})^{-1}\right]\,, \tag{18}$$

$$Q_{+-}(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} r^{2m+1} e^{-\alpha(2mL+x+y)} = r e^{-\alpha(x+y)}(1 - r^2 e^{-2\alpha L})^{-1}\,, \tag{19}$$

где $\theta(\cdot)$ – функция Хевисайда.

На основе вычисленных матричных элементов подсчитаем ядро интегрального преобразования

$$Q(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{\sigma,\rho=\pm} \sigma Q_{\sigma\rho}(x, y) = \frac{1}{2} \left(Q_{++} - Q_{--} + Q_{+-} - Q_{-+}\right)(x, y) =$$

$$= \frac{1}{2} \mathrm{sgn}(x - y) e^{-\alpha|x-y|} + \frac{r e^{-\alpha L}}{1 - r^2 e^{-2\alpha L}} \left[\mathrm{sh}\alpha(L - x - y) + r e^{-\alpha L} \mathrm{sh}\alpha(x - y)\right]\,. \tag{20}$$

Это ядро определяет, согласно (3), выражение для искомого потока энергии излучения в каждой точке x в зависимости от распределения $T(y)$, $y \in [0, L]$ температуры в образце,

$$P(x) = \alpha \int_0^L Q(x, y) P_0(y) dy \,. \tag{21}$$

Заметим, что это выражение зависит от геометрического параметра L образца. При постановке задачи радиационно-кондуктивного теплообмена нужно положить, что распределение интенсивности излучения $P_0(y)$ по образцу определяется распределением температуры $T(y)$ в нем, то есть имеет место функциональная зависимость $P_0(y) = P_0[T(y)]$. Вид этого функционала определяется оптическими свойствами вещества, из которого состоит рассматриваемый образец, а именно, он определяется, с точки зрения статистической физики, функцией распределения по частотам излучаемых фотонов в каждом физически малом объеме вещества, которая зависит от локальной температуры $T(y)$. Тогда $P_0(y)$ определяется интегралом по частотам от этой функции распределения с подходящим весом.

Таким образом, явный вид функционала $P_0[T(y)]$ может быть довольно разнообразным. Однако, часто используется грубая, но универсальная модель, которая оказывается довольно хорошим приближением с практической точки зрения. Это так называемое *серое приближение*, в рамках которого полагается, что $P_0[T] = \sigma T^4$, где σ – постоянная Стефана-Больцмана.

Наконец, укажем, что выражение (21) может быть представлено в более удобной для использования форме

$$P(x) = -\frac{d}{dx} \int_0^L S(x, y) P_0[T(y, t)] dy \,, \tag{22}$$

где

$$S(x, y) = \frac{1}{2} e^{-\alpha|x-y|} + \frac{r e^{-\alpha L}}{1 - r^2 e^{-2\alpha L}} \left[\mathrm{ch}\alpha(L - x - y) + r e^{-\alpha L} \mathrm{ch}\alpha(x - y) \right] . \tag{23}$$

В рассматриваемой нами одномерной модели дивергенция потока энергии представляется производной $dP(x)/dx$. Это выражение может быть использовано при решении задачи о радиационно-кондуктивном теплообмене в одномерном образце, моделируемом отрезком $[0, L]$. Эта задача состоит в самосогласованном определении распределения температуры, которое образуется вследствие процессов теплопроводности и переноса излучения. Для этого формулируется эволюционное уравнение для изменения распределения температуры $T(x, t)$ при предположении, что поток $P[T(x, t)]$ энергии теплового излучения определяется в каждый фиксированный момент времени t мгновенным распределением температуры $T(x, t)$. Это уравнение составляется на основе принципа баланса энергии – убыль потока энергии в каждой точке образца расходуется на локальное увеличение внутренней энергии, в противовес процессу теплопроводности, который уносит тепло из данной точки. Поэтому оно представляет собой уравнение теплопроводности с источником в виде дивергенции потока излучения [3]. В рассматриваемом одномерном случае, это уравнение имеет вид

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial P(x)}{\partial x}\,, \tag{24}$$

где c – удельная теплоёмкость единицы массы вещества, ρ – плотность вещества, κ – коэффициент теплопроводности. С учетом представления (22) уравнение (24) записывается в более удобной для анализа форме

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(\kappa T + \int\limits_0^L S(x,y) P_0[T(y,t)]dy\Big)\,. \tag{25}$$

3. Решение задачи о переносе излучения в слое. Решение задачи о переносе излучения в слое полупрозрачного диэлектрика представляет собой непосредственное обобщение построений предыдущего раздела.

Пусть имеется слой $\Lambda = \{\langle x, y, z\rangle : x \in [0, L]; y, z \in \mathbb{R}\}$ толщиной L вещества с распределённым в нем источником излучения, имеющим интенсивность $P_0(\mathbf{r}, t)$ в каждой точке $\mathbf{r} \in \Lambda$ так, что вектор $P_\mu[T(\mathbf{r}, t)] = P_0(\mathbf{r}, t)n'_\mu/4\pi$, $\mu = 1, 2, 3$, $\mathbf{n}'^2 = 1$ физически представляет собой плотность потока энергии теплового электромагнитного излучения в единицу времени, излучаемой равномерно распределенного по всем направлениям точечным источником, то есть единичный вектор $\mathbf{n}'$ имеет равномерное распределение на единичной сфере. Положим, что плотность таких источников излучения в единице объема равна α, т.е. мера распределения всех источников в физически малом объеме $d\mathbf{r}'$ равна $\alpha d\mathbf{r}'$.

Обозначим $P_\mu(\mathbf{r}, t)$, $\mu = 1, 2, 3$ – плотность потока энергии теплового излучения в пространственной точке $\mathbf{r}$ слоя в момент времени t. Интенсивность $P_0(\mathbf{r}, t)$ излучения предполагается функционально зависящей от распределения $T(\mathbf{r}, t)$ температуры в слое так, что $P_0(\mathbf{r}, t) = P_0[T(\mathbf{r}, t)]$. Тогда векторное поле $P_\mu(\mathbf{r}, t)$, $\mu = 1, 2, 3$ также является функционалом от $T(\mathbf{r}, t)$. Этот функционал определяется линейным преобразованием плотности потока $P_0(\mathbf{r}, t)n'_\mu/4\pi$ излучаемой энергии так, что значение $P_\mu(\mathbf{r}, t)$ в точке наблюдения с радиус-вектором $\mathbf{r} = \langle x, y, z\rangle$ имеет вид

$$P_\nu(\mathbf{r}, t) = \alpha \int\limits_\lambda Q_{\nu,\nu'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') P_{\nu'}[T(\mathbf{r}', t)]d\mathbf{r}'\,, \tag{26}$$

где интегрирование производится по всем точкам $\mathbf{r}' = \langle x', y', z'\rangle$ излучения, а интегральное ядро $Q_{\nu,\nu'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, $\nu, \nu' = 1, 2, 3$ определяется решением задачи переноса излучения в слое.

Ядро $Q_{\nu,\nu'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ представляется относительной по сравнению с $P_0(\mathbf{r}', t)$ долей энергии, принесенной лучом в точку $\mathbf{r} \in \Lambda$, который проходит ее в направлении $\mathbf{n}$, и излученным из точки $\mathbf{r}' \in \Lambda$ в направлении $\mathbf{n}$, то есть n_μ – единичный вектор направления потока излучения в точке наблюдения излучения $\mathbf{r}$. При этом каждый луч двигается равномерно со скоростью света внутри слоя и, достигая границы, испытывает от нее отражение с коэффициентом отражения r по закону угол падения равен углу отражения так, что падающий и отраженный лучи находятся в одной плоскости. После этого он продолжает движение. Движение луча (той его части, которая остаётся внутри образца при каждом из отражений) с последовательными отражениями от границ продолжается неограниченно.

Займемся вычислением ядра $Q_{\nu,\nu'}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$. Представим его в виде суммы

$$Q_{\nu,\nu'}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \sum_{m=0}^{\infty} r^m Q^{(m)}_{\nu,\nu'}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,, \tag{27}$$

где m – число отражений луча от границы в процессе его движения в слое. Таким образом, нам нужно вычислить каждое из слагаемых $Q^{(m)}_{\nu,\nu'}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$. Это вычисление несколько различно в случаях, когда m четно или нечетно.

Легко понять, что для каждой пары пространственных точек $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}$ и каждой пары векторов $\mathbf{n}'$ и $\mathbf{n}$ имеется только один луч $\gamma(\mathbf{r},\mathbf{n};\mathbf{r}',\mathbf{n}')$, для которого эти точки являются, соответственно, точками излучения и наблюдения, а направляющие единичные векторы являются, соответственно, векторами, которые указывают направления излучения и наблюдения луча. Это означает, что при фиксация набора $\mathbf{r}',\mathbf{r};\,\mathbf{n}',\mathbf{n}$ полностью определяет число отражений m. Более того, ясно, что если $m=2k$ – четно, то $\mathbf{n}=\mathbf{n}'$, а если $m=2k+1$ – нечетно, то вектор $\mathbf{n}$ получается из вектора $\mathbf{n}'$ отражением его компоненты n'_x, то есть $n_x=-n'_x$.

Сопоставим каждому лучу вектор $\boldsymbol{\gamma}^{(m)} = \langle s^{(m)}_x, s^{(m)}_y, s^{(m)}_z\rangle$, компоненты которого равны длине пройденного им пути вдоль соответствующего направления. Ясно, то всегда $s^{(m)}_y=(y-y')\mathrm{sgn}(n_y)$ и $s^{(m)}_z=(z-z')\mathrm{sgn}(n_z)$. Величина же $s^{(m)}_x$ подсчитывается по тому же принципу, по которому вычислялась длина пути s, проходимого лучом на отрезке $[0,L]$. Поэтому, на основании результатов предыдущего раздела, имеем $s^{(m)}_x = s^{(m)}_{\sigma,\sigma'}$, где $\sigma=\mathrm{sgn}(n_x)$, $\sigma'=\mathrm{sgn}(n'_x)$. Тогда длина пути s, проходимая лучом, равна

$$|\boldsymbol{\gamma}^{(m)}| = \Big(\big(s^{(m)}_{\sigma,c'}\big)^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\Big)^{1/2} = s\,.$$

Принимая во внимание, что, как и раньше, во внутренних точках слоя имеет место $dQ_{\nu,\nu'}(\mathbf{r},\mathbf{r}')/ds = -\alpha Q_{\nu,\nu'}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$, получаем

$$Q^{(m)}_{\nu,\nu'}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \exp(-\alpha|\boldsymbol{\gamma}^{(m)}|)S^{(m)}_{\nu,\nu'}\,,$$

где $S^{(m)}_{\nu,\nu'}$ – числовая матрица, не зависящая от переменных $\mathbf{r}',\mathbf{r};\,\mathbf{n}',\mathbf{n}$, а зависящая только лишь от четности числа отражений. Следовательно, на основании (27),

$$Q_{\nu,\nu'}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \sum_{m=0}^{\infty} r^m \exp\Big[-\alpha\Big(\big(s^{(m)}_{\sigma,\sigma'}\big)^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\Big)^{1/2}\Big]S^{(m)}_{\nu,\nu'}\,, \tag{28}$$

где, вследствие (12)-(15),

$$s^{(m)}_{\sigma,\sigma'} = \begin{cases} 2kL + x - x' & \text{при } m = 2k, \sigma = +, \sigma' = +\,; \\ 2(k+1)L - x - x' & \text{при } m = 2k+1, \sigma = -, \sigma' = +\,; \\ 2kL - x + x' & \text{при } m = 2k, \sigma = -, \sigma' = -\,; \\ 2kL + x + x' & \text{при } m = 2k+1, \sigma = +, \sigma' = -\,, \end{cases}$$

и во всех этих формулах $k \in \mathbb{N}_+$ и $\sigma = \mathrm{sgn}(n_x)$, $\sigma' = \mathrm{sgn}(n'_x)$. Более кратко, этот набор формул записывается следующим образом:

$$S^{(2k)}_{\sigma,\sigma'} = 2kL + \sigma(x - x')\,, \qquad S^{(2k+1)}_{\sigma,\sigma'} = (2k+1)L + \sigma(x - L + x')\,,\ k \in \mathbb{N}_+\,.$$

Матрица $S^{(m)}_{\nu,\nu'}$ определяется условиями: при $m = 2k$ для любого единичного вектора n_ν имеет место $S^{(2k)}_{\nu,\nu'} n_{\nu'} = n_\nu$, при $m = 2k+1$ для любого единичного вектора n_ν имеет место $S^{(2k+1)}_{\nu,\nu'} n_{\nu'} = n^*_\nu$, $\mathbf{n}^* = \langle -n_x, n_y, n_z \rangle$. Тогда

$$S^{(2k)}_{\nu,\nu'} = \delta_{\nu,\nu'}\,, \qquad S^{(2k+1)}_{\nu,\nu'} = \delta_{\nu,\nu'} - 2(\mathbf{e}_x)_\nu (\mathbf{e}_x)_{\nu'}\,. \tag{29}$$

Таким образом, формулы (26), (28), (29) решают задачу о переносе излучения в слое диэлектрика. При этом, для использования формулы (26), необходимо независимо определить интенсивность $P_0[T]$, которая, как уже было сказано в предыдущем разделе, определяется функцией распределения по частотам излученных фотонов, но в качестве хорошего приближения для этой функции может быть использовано так называемое серое приближение, когда полагается $P_0[T] = \sigma T^4$.

В то же время, представленное решение гораздо сложнее, чем в аналогичное решение модельной одномерной задачи, так как ряд (28), в отличие от аналогичного ряда (20) в решении одномерной задачи, уже не является суммируемым. Поэтому для использования решения задачи о переносе теплового излучения в слое диэлектрика в форме (26), (28), (29) для исследования радиационно-кондуктивного теплообмена на основе эволюционного уравнения теплового баланса

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = k\Delta T - (\nabla, \mathbf{P}) \tag{30}$$

приходится использовать малость коэффициента отражения, что позволяет использовать конечные отрезки ряда (28).

Литература

1. L.A.Atherton, J.J.Derby, R.A.Brown, Radiative heat exchange in Czochralski cryastal growth. Journal of Crystal Growth **84** (1987), 57-78.

2. F.Dupret, P.Nicodéme, Y.Ryckmans, Numerical method for reducing stress level in GaAs crystals. Journal of Crystal Growth **97** (1989), 162-172.

3. E.M.Sparrow, R.D.Cess, Radiation heat transfer. Brooks/Cole Publishing Company, Belmont, California. (Спэрроу Э.М., Сесс Р.Д. Теплообмен излучением Л.: Энергия, Ленинградское отделение, 1972, 295с.)

4. Теплообмен излучением в сплошных средах. Новосибирск: Наука, Сибирское отд. 1984, 278с.

5. Петров В.А., Марченко Н.В. Перенос энергии в частично прозрачных твёрдых материалах. М: Наука 1985, 190с.

6. Kolesnikov A.V., Virchenko Yu.P. Analytic approach to the heat radiative conduction problem in semi-transparent media. The large optical length approximation // Functional Materials. – 2006. – 13;3. – P.372-380.

RADIATION TRANSFER PROBLEM SOLUTION IN THE CASE OF SEMITRANSPARENT DIELECTRICS LAYER AT GEOMETRIC OPTICS APPROXIMATION

Lam Tan Phat, Yu.P. Virchenko

Belgorod State University,
Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail:virch@bsu.edu.ru

Abstract. The problem of radiation transfer in the case of semitransparent dielectrics layer is solved. The calculation of electromagnetic energy flux caused by temperature nonuniform distribution in the infinite layer is done at geometric optics approximation.

Key words: radiation transfer, Stefan-Boltzmann's law, optical power, reflection coefficient, geometric optics.