МАТЕМАТИКА

MSC 35J15

ТОЧНАЯ АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВБЛИЗИ ГИПЕРПЛОСКОСТИ ВЫРОЖДЕНИЯ

В.П. Архипов

Старооскольский технологический институт НИТУ МИСиС, г. Старый Оскол, Россия

Ключевые слова: эллиптические уравнения, гиперплоскость вырождения, асимптотика, граничные задачи.

В полосе $\Omega = [0,1] \times R^n \subset R^{n+1}$, $x \in [0,1]$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in R^n$ рассматривается модельное вырождающееся эллиптическое уравнение

$$(a(x)u'_x(x,y))' + bu'_x(x,y) + Lu(x,y) = f(x,y), \tag{1}$$

где $a(x_0) = 0$, $a(x) > 0$ для $x \neq x_0$, $Lu(x,y) = r\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y_i^2}$, $r > 0$ и гиперплоскость $x = x_0$ — гиперплоскость вырождения уравнения (1). В зависимости от знака коэффициента b (см. [1]) постановка граничных задач изменяется, что обусловлено поведением решений уравнения вблизи гиперплоскости вырождения $x = x_0$.

Настоящая работа посвящена выяснению точной асимптотики решений уравнения (1) вблизи гиперплоскости $x = x_0$. Для этого проводится анализ (в образах Фурье) решений обыкновенных вырождающихся дифференциальных уравнений с параметром

$$(a(x)v'_x(x,\xi))' + bv'_x(x,\xi) - r\xi^2 v(x,\xi) = g(x,\xi), \tag{2}$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in R^n$, $\xi^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2$, и устанавливаются их равномерные двусторонние асимптотики при $x \to x_0 \pm 0$ и $\xi \in R^n$. Исследования в значительной степени основываются на результатах работы [2].

Определим решения $v_{1,2}(x,\xi)$ однородного уравнения (2), допускающие при некотором $\delta > 0$ и $x \to x_0 + 0$ при $b < 0$ асимптотические представления

$$v_1(x,\xi) = w_1(x,\xi)\Phi(x,\xi) = w_1(x,\xi)\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k(x,\xi),$$

$$w_1(x,\xi) = \frac{1}{C_1(\xi)\sqrt{\alpha(x,\xi)}}\exp\left(\int\limits_x^{x_0+\delta}\frac{b+\alpha(\tau,\xi)}{2\cdot a(\tau)}\,d\tau\right), \quad \alpha(\tau,\xi) = b^2 + 4a(\tau)r\xi^2, \tag{3}$$

$$v_2(x,\xi) = w_2(x,\xi)\Psi(x,\xi) = w_2(x,\xi)\sum_{k=0}^{\infty}\psi_k(x,\xi),$$

$$w_2(x,\xi) = \frac{1}{C_2(\xi)\sqrt{\alpha(x,\xi)}}\exp\left(\int\limits_x^{x_0+\delta}\frac{b-\alpha(\tau,\xi)}{2\cdot a(\tau)}\,d\tau\right), \tag{4}$$

где последовательности $\varphi_k(x,\xi)$, $\psi_k(x,\xi)$ задаются рекуррентными соотношениями $\varphi_{k+1}(x,\xi) = K_1\varphi_k(x,\xi)$, $\psi_{k+1}(x,\xi) = K_1\psi_k(x,\xi)$ с интегральными операторами

$$K_1\varphi(x,\xi) = \int\limits_{x_0}^{x_0+\delta} K_1(x,x_1,\xi)\varphi(x_1,\xi)\,dx_1,\quad K_2\psi(x,\xi) = \int\limits_{x_0}^{x} K_2^+(x,x_1,\xi)\psi(x_1,\xi)\,dx_1,$$

$$K_1^+(x,x_1,\xi) = \begin{cases} h(x_1,\xi), & x_0 \le x_1 \le x \le x_0+\delta, \\ h(x_1,\xi)\exp\left(-\int\limits_x^{x_1}\dfrac{\alpha(\tau,\xi)}{a(\tau)}\,d\tau\right), & x \le x_1 \le x_0+\delta, \end{cases}$$

$$K_2^+(x,x_1,\xi) = -h(x_1,\xi) + h(x_1,\xi)\exp\left(-\int\limits_{x_1}^{x}\frac{\alpha(\tau,\xi)}{a(\tau)}\,d\tau\right),\quad x_0 \le x_1 \le x \le x_0+\delta,$$

$$h(x,\xi) = \frac{(a_1(x)\xi^2 + a_2(x))r\xi^2}{2(b^2+4a(x)r\xi^2)^{5/2}}, a_1(x) = (5(a^2(x))'a'(x) - 4a(x)(a^2(x))'')r. a_2(x) = -b^2(a^2(x))'',$$

Аналогичные формулы выписываются и слева от гиперплоскости.

Отметим один результат для неоднородного уравнения. При $b<0$ и некотором $\delta>0$ установлено существование единственного решения $v_0(x,\xi)$ уравнения (2), удовлетворяющего условиям $v_0(x_0-\delta,\xi) = v_0(x_0+\delta,\xi) = 0$ и допускающего в частности равномерную по $x\in[0,1]$ оценку $|v_0(x,\xi)|^2 \le \dfrac{M_g}{1+|\xi|^2}$.

Формальное применение обратного преобразования Фурье к формулам (3), (4) дает асимптотическое представление решений однородного уравнения (1)

$$u_1(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{1,k}(x,y),\quad u_2(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{2,k}(x,y), \tag{5}$$

$$u_{1,k}(x,y) = \int\limits_{R^n} w_1(x,\xi)\varphi_k(x,\xi)\exp(iy\xi)\,d\xi,\quad u_{2,k}(x,y) = \int\limits_{R^n} w_2(x,\xi)\psi_k(x,\xi)\exp(iy\xi)\,d\xi.$$

Главные (первые) члены асимптотик в (5) при этом имеют вид

$$u_{1,0}(x,y) = \int\limits_{R^n} w_1(x,\xi)\exp(iy\xi)\,d\xi,\quad u_{2,0}(x,y) = \int\limits_{R^n} w_2(x,\xi)\exp(iy\xi)\,d\xi.$$

Построенные представления решений позволяют получать асимптотические формулы решений неоднородного уравнения и соответствующих ему граничных задач.

Литература

1. Глушко В.П. Оценки в L_2 и разрешимость общих граничных задач для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка // Труды Московского математического общества. – 1970. – 23. – С.113-178.

2. Архипов В.П. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с вырождающимся коэффициентом при старшей производной // Дифференц. уравнения. – 2011. – 47, № 10. – С.1383-1393.

EXACT ASYMPTOTIC OF ELLIPTIC EQUATIONS NEAR DEGENERATION HYPERPLANE

V.P. Arkhipov

Starooskolsky Technology Institute NITU MISiS, Stary Oskol, Russia

Key words: elliptic equations, degeneration hyperplane, asymptotic, boundary problems.