MSC 35J65

УБЫВАНИЕ РЕШЕНИЙ АНИЗОТРОПНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С МЛАДШИМИ ЧЛЕНАМИ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

Л.М. Кожевникова, А.А. Хаджи

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,
пр. Ленина, 37, Стерлитамак, 453100, Россия, e-mail: kosul@mail.ru, anna_5955@mail.ru

Ключевые слова: эллиптические уравнения, неограниченные области, граничные задачи, анизотропные уравнения.

Работа посвящена некоторому классу анизотропных эллиптических уравнений второго порядка, представителем которого является модельное уравнение вида

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\left(|u_{x_\alpha}|^{p_\alpha-2}u_{x_\alpha}\right)_{x_\alpha}-|u|^{k-2}u=\Phi(\mathbf{x}), \tag{1}$$

$$p_n\geq ...\geq p_2\geq p_1>1,\ k>1.$$

Для него в произвольной неограниченной области $\Omega\subseteq\mathbb{R}_n=\{\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_n)\}$, $n\geq 2$, рассматривается задача Дирихле с однородным граничным условием

$$u\big|_{\partial\Omega}=0. \tag{2}$$

Основной результат этой работы — исследование зависимости скорости убывания решения задачи (1), (2) от геометрии неограниченной области Ω и показателей нелинейности.

Положим: $\|\cdot\|_p$ — норма в пространстве $L_p(\Omega)$, $\mathbf{p}=(p_1,p_2,...,p_n)$. Определим пространство $\overset{\circ}{W}{}_{k,\mathbf{p}}^{1}(\Omega)$ как пополнение пространства $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|v\|_{\overset{\circ}{W}{}_{k,\mathbf{p}}^{1}(\Omega)}=\sum_{\alpha=1}^{n}\|v_{x_\alpha}\|_{p_\alpha}+\|v\|_k.$$

Определение. *Обобщенным решением задачи* (1), (2) *с* $\Phi(\mathbf{x})\in L_{k/(k-1)}(\Omega)$, *назовем функцию* $u(\mathbf{x})\in\overset{\circ}{W}{}_{k,\mathbf{p}}^{1}(\Omega)$, *удовлетворяющую интегральному тождеству*

$$\int\limits_{\Omega}\left\{\sum_{\alpha=1}^{n}|u_{x_\alpha}|^{p_\alpha-2}u_{x_\alpha}v_{x_\alpha}+(|u|^{k-2}u+\Phi(\mathbf{x}))v\right\}d\mathbf{x}=0$$

для любой функции $v(\mathbf{x})\in\overset{\circ}{W}{}_{k,\mathbf{p}}^{1}(\Omega)$.

И.М. Колодий [1] установил ограниченность решений некоторого класса анизотропных эллиптических уравнений в ограниченных областях. Здесь приведен результат об ограниченности решений задачи (1), (2) в неограниченных областях Ω.

Теорема 1. *Пусть $u(\mathbf{x})$ — обобщенное решение задачи (1), (2) и выполнены условия*

$$1 < \sum_{\alpha=1}^{n} 1/p_\alpha < 1 + n/k^2, \quad k^2 - nk + n \geq 0.$$

Тогда

$$\operatorname{vrai}\max_{\Omega} |u(\mathbf{x})| \leq C,$$

где C — константа, зависящая от p_α, k, n, $\|\Phi\|_{k/(k-1)}$.

Двусторонние оценки, характеризующие убывание решения задачи Дирихле для анизотропных уравнений без младших членов, получены в работе [2]. Здесь приведем оценку сверху для решения уравнения (1).

Будем рассматривать неограниченные области расположенные вдоль выделенной оси Ox_s, $s \in \overline{2,n}$ (область Ω лежит в полупространстве $x_s > 0$ и сечение $\gamma_r = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid x_s = r\}$ не пусто при любом $r > 0$). Введем обозначения: $\Omega_a^b = \{\mathbf{x} \in \Omega \;\Big|\; a < x_s < b\}$, значения $a = 0$, $b = \infty$ опускаются.

Определим геометрическую характеристику неограниченной области Ω :

$$\nu(r) = \inf\left\{\|g_{x_1}\|_{p_1,\gamma_r} \;\Big|\; g(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega),\ \|g\|_{p_1,\gamma_r} = 1\right\}, \quad r > 0.$$

Предполагаются выполненными следующие условия:

$$\int_1^\infty \nu^{p_1/p_s}(\rho)d\rho = \infty,$$

$$\operatorname{supp}\Phi(\mathbf{x}) \subset \Omega^{R_0}, \quad R_0 > 0.$$

Теорема 2. *Существуют положительные числа κ, $\mathcal{M}$ такие, что для ограниченного обобщенного решения $u(\mathbf{x})$ задачи (1), (2) при $r > 2R_0$ справедлива оценка*

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \|u_{x_\alpha}\|_{p_\alpha,\Omega_r}^{p_\alpha} + \|u\|_{r,\Omega_r}^{r} \leq \mathcal{M}\exp\left(-\kappa\int_1^r \nu^{p_1/p_s}(\rho)d\rho\right).$$

Работа поддержана РФФИ (грант № 13-01-0081-а).

Литература

1. Колодий И.М. Об ограниченности обобщенных решений эллиптических дифференциальных уравнений // Вестник МГУ. – 1970. – №5. – С.45-52.

2. Кожевникова Л.М., Хаджи А.А. Решения анизотропных эллиптических уравнений в неограниченных областях // Вестник СамГТУ. – 2013. – 30, №1.

SOLUTIONS DECREASING OF ANISOTROPIC ELLIPTIC EQUATIONS WITH YOUNGER TERMS IN UNBOUNDED DOMAINS

L.M. Kozhevnikova, A.A. Khadzhi

Sterlitamak department of Bashkir State University
Lenin Av., 68, Sterlitamak, 453103, Russia, e-mail: kosul@mail.ru, anna_5955@mail.ru

Key words: elliptic equations, unbounded domains, boundary problems, anisotropic equations.