



МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

MSC 60K40

ДИФФУЗИОННАЯ МОДЕЛЬ В ТЕОРИИ ФРАГМЕНТАЦИИ

*Р.Е. Бродский, **Ю.П. Вирченко

*Институт монокристаллов НАНУ,
пр. Ленина, 60, Харьков, Украина

**Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Сконструирована диффузионная модель фрагментации хрупких материалов. В частном случае эта модель приводит к известному в теории фрагментации логарифмически нормальному закону распределения фрагментов по размерам.

Ключевые слова: фрагментация, размер, распределение вероятностей, марковский процесс.

1. Введение. Фрагментация или измельчение хрупких твердотельных материалов является довольно распространённым природным и технологическим процессом. Процессы фрагментации протекают в широком диапазоне масштабов: получение порошков с микро- и наноразмерными частицами, дробление камней, фрагментация горных пород, образование реголита планет, ударная фрагментация космических тел.

Математическому описанию и моделированию фрагментации посвящён целый ряд исследований [1-4]. Основной целью работ в теории фрагментации является получение распределения вероятностей случайных размеров образующихся в результате измельчения материала фрагментов и его эволюция в продолжение процесса фрагментации. Так, например, работы [1,2] посвящены выводу такого рода «универсальных» распределений, в рамках наиболее общих физических предположений о характере процесса фрагментации, в то время как в работах [3, 4] исследуются распределения в специальном случае дробления одномерных объектов – т.н. «random scission models». Наиболее интересным, с физической точки зрения, являются изучение однократной, ударной фрагментации, однако, этот процесс является очень зависимым от разнообразных условий его проведения. Поэтому, как правило, математическое моделирование фрагментации ограничивается изучением многократно повторяющихся актов измельчения материала в течение длительного промежутка времени, когда система фрагментов «теряет память» о начальном состоянии и, в результате, образуется некоторое финальное распределение вероятностей размеров фрагментов. Настоящая работа посвящена решению задачи, связанной именно с этим направлением исследований в теории фрагментации. Подход, используемый при решении этой задачи, основан на описании процесса дробления, предложенного в [1] и используемого многими авторами. Он связан с выбором единой для всех фрагментов, характеризующей их числовой характеристики, которая



в дальнейшем называется *размером*. Состояние всей системы из N фрагментов в каждый момент времени описывается числовым набором ρ_1, \dots, ρ_N их размеров. Механизм дробления, который определяет процесс фрагментации, предполагается масштабно инвариантным, то есть вероятность распада фрагмента с размером r на набор фрагментов с размерами $\{\rho_1, \dots, \rho_N\}$ является функцией отношений $\rho_1/r, \dots, \rho_N/r$.

В работе решается задача об определении финального распределения вероятностей масштабно инвариантного процесса *медленной фрагментации*, которое понимается в том же математическом смысле, что и в работах [1], [2]. Это асимптотика плотности распределения фрагментов по размерам при $t \rightarrow \infty$. Физическое применение этого распределения возможно в том случае, когда характерное время для поступления извне энергии, существенно изменяющей систему фрагментов, намного превосходит все другие времена, характерные для процесса фрагментации. Подчеркнем, что, несмотря на то, что всюду далее мы используем подход к описанию процесса фрагментации, принятый в классических работах [1], [2], существенным отличием нашего исследования является введение понятия медленного процесса фрагментации, которое разъясняется в следующем разделе.

2. Медленная фрагментация. Изучение систем фрагментации в рамках вероятностно-геометрического подхода, когда фрагменты рассматриваются как геометрические тела случайной формы и размеров, которые в результате эволюции разваливаться на более мелкие тела либо посредством столкновения друг с другом, либо посредством внешних воздействий, приводит к очень сложным математическим задачам. Трудности возникают уже на этапе синтеза подходящих вероятностных моделей. В связи с этим, в пионерской работе [1] был предложен другой подход к исследованию систем фрагментации, который основан на их *однопараметрическом описании*. Идея подхода состоит в том, чтобы охарактеризовать каждую случайную связную компоненту, в любом состоянии системы, только одной случайной величиной $\tilde{r} > 0$ – *размером*, понимаемым в некотором обобщённом смысле. Тогда каждое состояние стохастической динамической системы, описывающей эволюцию системы фрагментации, вместо имеющегося широкого функционального произвола в описании случайной формы каждого фрагмента, определяется только конечным случайным набором $\langle \tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_{\tilde{N}} \rangle$ случайной длины, составленным из случайных размеров так, что \tilde{N} равно числу связных компонент системы. Физически, при этом предполагается, что все фрагменты имеют примерно одинаковую, слабо отличающуюся друг от друга случайную форму, и каждый фрагмент может быть приближённо совмещён с любым другим фрагментом посредством подходящего изменения масштаба. Для изучения такой системы фрагментов, существенны только их размеры. Динамика системы фрагментации описывается в этом случае *ветвящимся случайным процессом* со случайными траекториями $\{\tilde{r}_1(t), \dots, \tilde{r}_{\tilde{N}(t)}(t)\}$, $t > 0$. Такое однопараметрическое описание системы фрагментации становится уже обозримым с математической точки зрения в том смысле, что задавать математически корректно ветвящийся случайный процесс значительно проще, чем стохастическую динамическую систему в вероятностно-геометрическом подходе.

Мы в настоящей работе предлагаем другой, более простой способ математического описания систем фрагментации посредством процесса *случайного выбора фрагментов*.



Пусть в каждый момент времени t производится случайный выбор типичного фрагмента системы со случайным размером $\tilde{r}(t)$. После фиксации величины этого размера, фрагмент возвращается в систему. В результате, такого статистического наблюдения возникает траектория некоторого случайного процесса $\langle \tilde{r}(t) > 0; t \geq 0 \rangle$. Поэтому, для описания динамики системы фрагментации, нужно только смоделировать этот случайный процесс. Определяя процесс $\langle \tilde{r}(t); t \geq 0 \rangle$, мы определяем плотность $f(r, t)$ распределения вероятностей по размерам r фрагментов в момент времени t . Однако, при таком математическом моделировании системы фрагментации, даже в рамках однопараметрического описания, теряется значительная часть информации об эволюции системы. В частности, теряется очень важная информация об изменении во времени полного числа фрагментов $\tilde{N}(t)$ в системе в момент времени t . Поэтому, в рамках такого описания процесса фрагментации, невозможно отследить изменение распределения числа $N(r, t)$ фрагментов по размерам в момент времени t , так как

$$N(r, t) = N(t) \int_0^r f(r', t) dr',$$

и следовательно, нельзя учесть те ограничения на протекание процесса фрагментации, которые возникают в связи с учётом законов сохранения объёма и энергии. Поэтому, в рамках подхода на основе случайного выбора фрагмента, необходимо смоделировать случайный процесс $\langle \tilde{N}(t); t \geq 0 \rangle$ изменения полного числа фрагментов в системе, например, положить его пуассоновским. Тогда, положив $N(t) = M\tilde{N}(t)$, устраняется указанный недостаток. Естественно считать, что, при больших значениях t , когда полное число фрагментов велико, случайный процесс $\langle \tilde{N}(t); t \geq 0 \rangle$ становится статистически независимым от случайного процесса $\langle \tilde{r}(t); t \geq 0 \rangle$.

Введем теперь понятие медленной фрагментации. Будем рассуждать в терминах функции $E(t)$, представляющей собой величину энергии, поступившей в систему и потраченную на дробление фрагментов. Она является монотонно возрастающей. Введем обратную монотонно-возрастающую функцию $t = \varphi(E)$. Тогда, произведя замену переменной в распределении $N(r, t)$ числа фрагментов по размерам,

$$N(r, t) = N(r, \varphi(E)) \equiv \bar{N}(r, E), \tag{1}$$

Свяжем величину энергии $E(t)$ с $\bar{N}(r, E)$ соотношением

$$E = \alpha \int_0^\infty r^2 dN(r, \varphi(E)) = \alpha \int_0^\infty r^2 d\bar{N}(r, E) \tag{2}$$

с некоторым коэффициентом пропорциональности α , которое учитывает, что фрагменты имеют примерно одинаковую форму. При этом полное число фрагментов $N(t)$ в момент t становится зависимым только от $E(t)$, $N(t) = N(\varphi(E)) \equiv N(E)$.

Введем функцию распределения

$$F(r, t) = \frac{\bar{N}(r, E)}{N(E)}.$$



Тогда

$$\frac{E}{N(E)} = \alpha \int_0^{\infty} r^2 dF(r, t).$$

Если приять, что процесс фрагментации такой, что $F(r, t) \rightarrow 1$, $r > 0$ при $t \rightarrow \infty$, то есть размеры всех фрагментов стремятся к нулю, тогда, переходя к пределу $t \rightarrow \infty$ в приведенном выше равенстве, получаем

$$\lim_{E \rightarrow \infty} \frac{E}{N(E)} = \alpha \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} r^2 dF(r, t) = 0.$$

Таким образом, при неограниченном увеличении времени, в условиях пренебрежимо малых тепловых потерь, удельная энергия, потраченная на образование одного фрагмента стремится к нулю. В этом случае, отношение $\dot{E}(t)/\alpha\dot{N}(t)$ также стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, если функции $E(t)$ и $N(t)$ изменяются плавно.

Пусть $F(r, t) \rightarrow 1$, $r > 0$ при $t \rightarrow \infty$ так, что средний размер

$$\rho(t) = \int_0^{\infty} r dF(r, t)$$

стремится к нулю. В том случае, когда имеет место

$$\frac{\dot{E}(t)}{\alpha\rho^2(t)\dot{N}(t)} \rightarrow 0$$

и, одновременно, к нулю стремится относительная дисперсия $D\tilde{r}(t)/[M\tilde{r}(t)]^2$, $D\tilde{r}(t) = M\tilde{r}^2(t) - (M\tilde{r}(t))^2$ случайного размера $\tilde{r}(t)$, будем говорить, что на финальном этапе эволюции реализуется *медленная фрагментация*.

Физически медленная фрагментация состоит в том, что эволюционные изменения в системе фрагментов, которые происходят за характерное для каждой из систем время, к очень малому изменению среднего размера фрагментов по сравнению с текущим средним размером.

3. Диффузионное описание медленной фрагментации. В схеме случайного выбора фрагмента, когда фрагментация описывается случайным процессом $\langle \tilde{r}(t); t \in \mathbb{R}_+ \rangle$, удобно считать, что этот процесс индуцируется случайным процессом $\langle \tilde{E}(t); t \in \mathbb{R}_+ \rangle$, описывающим величину энергии, поглощённой системой фрагментации. Процесс $\langle \tilde{E}(t); t \in \mathbb{R}_+ \rangle$ естественно моделировать как марковский скачкообразный процесс, у которого каждый из случайных скачков $\tilde{\varepsilon}_l = \tilde{E}(\tilde{\tau}_l) - \tilde{E}(\tilde{\tau}_l - 0)$, $l \in \mathbb{N}$, происходящих в соответствующий ему случайный момент времени $\tilde{\tau}_l$, описывает величину энергии, потраченной на дробление какого-то из фрагментов системы в этот момент времени. Однако, даже при явном задании распределения вероятностей случайного процесса $\langle \tilde{E}(t); t \in \mathbb{R}_+ \rangle$, весьма затруднительно, на основе каких-то естественных теоретических



предположений, построить отображение, однозначно определяющее индуцированный процесс $\langle \tilde{r}(t); t \in \mathbb{R}_+ \rangle$. Из общих физических соображений, на основе законов сохранения, можно только связать одноточечные математические ожидания $M\tilde{r}^2(t)$, $M\tilde{r}^3(t)$ этого процесса со средней энергией $M\tilde{E}(t)$ и объёмом системы фрагментации. Более того, даже для математической формулировки этих связей требуется знание величины математического ожидания $N(t) = M\tilde{N}(t)$ случайного процесса $\langle \tilde{N}(t); t \in \mathbb{R}_+ \rangle$, описывающего изменение полного числа фрагментов в системе. Этот случайный процесс индуцируется процессом $\langle \tilde{E}(t); t \in \mathbb{R}_+ \rangle$, описывающим энергию, потраченную ко моменту времени t на дробление фрагментов так, что $E(t) = M\tilde{E}(t)$, также как и процесс $\langle \tilde{r}(t); t \in \mathbb{R}_+ \rangle$. Однако, также как и для этого последнего процесса, из общих теоретических соображений, процесс $\langle \tilde{N}(t); t \in \mathbb{R}_+ \rangle$ довольно сложно построить на основе процесса $\langle \tilde{E}(t); t \in \mathbb{R}_+ \rangle$.

В такой ситуации, описание фрагментации в схеме случайного выбора фрагмента, приходится строить, принимая процесс $\langle \tilde{r}(t); t \in \mathbb{R}_+ \rangle$ за основной, и, при задании его распределения вероятностей, связь с процессами $\langle \tilde{E}(t); t \in \mathbb{R}_+ \rangle$, $\langle \tilde{N}(t); t \in \mathbb{R}_+ \rangle$ учитывать только посредством указания зависимости распределения вероятностей процесса $\langle \tilde{r}(t); t \in \mathbb{R}_+ \rangle$ от математических ожиданий $M\tilde{E}(t)$, $M\tilde{N}(t) = N(t)$.

Обозначим посредством $f(r, t)$ плотность частного распределения первого порядка случайного процесса $\langle \tilde{r}(t); t \in \mathbb{R}_+ \rangle$,

$$f(r, t) = \frac{d}{dr} \Pr\{\tilde{r}(t) < r\}.$$

Тогда, считая заданным значение математического ожидания $M\tilde{N}(t) = N(t)$, плотность распределения $g(r, t)$ по размерам r случайного числа фрагментов выражается формулой

$$g(r, t) = N(t)f(r, t). \tag{3}$$

Используя эту плотность распределения, выразим полный объём системы фрагментов и затраченную к моменту времени t среднюю энергию $E(t) = M\tilde{E}(t)$ формулами

$$V = N(t) \int_0^{\infty} r^3 f(r, t) dr, \tag{4}$$

$$E(t) = \alpha N(t) \int_0^{\infty} r^2 f(r, t) dr. \tag{5}$$

Тогда, описание фрагментации в схеме случайного выбора фрагмента состоит в задании случайного процесса $\langle \tilde{r}(t); t \in \mathbb{R}_+ \rangle$, у которого плотность частного распределения $f(r, t)$ удовлетворяет интегральным соотношениям (4) и (5).

Поставленным условиям удовлетворяет очень широкий класс случайных процессов, так как на свойства конструируемого случайного процесса, которые связаны с двух-, с трёх- и, вообще, с любым многоточечным частным распределением, не накладывается никаких ограничений. Класс возможных процессов существенно сужается, если



потребовать, и это естественно с физической точки зрения, чтобы случайный процесс был *марковским*. В этом случае, он характеризуется одной плотностью распределения условных вероятностей перехода $f(r, t; r', t')$ из состояния $\tilde{r}(t') = r'$ в момент времени t' в состояние $\tilde{r}(t) = r$ в момент времени t , $t \geq t'$, которая удовлетворяет уравнению

$$\dot{f}(r, t; r', t') = (L_t[f])(r, t; r', t') \quad (6)$$

с линейным, вообще говоря зависящим от времени t , как от параметра, оператором L_t и начальному условию $f(r, t; r', t') = \delta(r - r')$ при $t = t'$. Этому же уравнению удовлетворяет плотность $f(r, t)$,

$$\dot{f}(r, t) = (L_t[f])(r, t), \quad (7)$$

которая при $t = 0$ совпадает с некоторой начальной, наперёд заданной плотностью $f(r, 0) = f_0(r)$.

Таким образом, в предположении марковости процесса $\langle \tilde{r}(t); t \in \mathbb{R}_+ \rangle$, задание его распределения вероятностей сводится к указанию оператора L_t , определяющего уравнение (7). С учётом условий (4) и (5) для плотности $f(r, t)$, этот оператор должен, дополнительно, удовлетворять условиям

$$\int_0^{\infty} r^3 [\gamma(t)f(r, t) + (L_t[f])(r, t)] dr = 0, \quad (8)$$

$$\int_0^{\infty} r^2 [\gamma(t)f(r, t) + (L_t[f])(r, t)] dr = \frac{\dot{E}(t)}{\alpha N(t)}, \quad (9)$$

$$\gamma(t) = \frac{\dot{N}(t)}{N(t)}, \quad (10)$$

которые получаются дифференцированием по t равенств (4) и (5).

Равенства (8) и (9) можно представить в следующей форме

$$\int_0^{\infty} f(r, t) [r^3 \gamma(t) + L_t^*[r^3]] dr = 0, \quad \int_0^{\infty} f(r, t) [r^2 \gamma(t) + L_t^*[r^2]] dr = \frac{\dot{E}(t)}{\alpha N(t)}, \quad (11)$$

где введён оператор L_t^* , сопряжённый к оператору L_t . Эти равенства должны выполняться при любой наперёд заданной начальной плотности распределения $f(r, 0)$. Так как в качестве такой начальной плотности распределения можно выбрать плотность $f(r, t)$ в любой момент времени t , то выполнимость первого из равенств (11) возможна только в том случае, когда тождественно обращается в нуль выражение в квадратной скобке под знаком интеграла

$$r^3 \gamma(t) + L_t^*[r^3] = 0. \quad (12)$$

Что касается второго равенства (11), то учитывая условие нормировки плотности $f(r, t)$,

$$\int_0^{\infty} f(r, t) dr = 1, \quad (13)$$



оно представляется в следующем виде

$$\int_0^{\infty} f(r, t)[r^2\gamma(t) + L_t^*[r^2] - \dot{E}(t)/\alpha N(t)]dr = 0 \quad (14),$$

и поэтому, на основании таких же рассуждений, мы приходим к выводу, что оно эквивалентно равенству

$$r^2\gamma(t) + L_t^*[r^2] - \dot{E}(t)/\alpha N(t) = 0. \quad (15)$$

По сравнению с выводом уравнения (12), требование чтобы равенство (15) имело место для любой плотности $f(r, t)$ является более сильным, так как в нём присутствуют наперёд заданные функции $E(t)$ и $N(t)$.

Итак, резюмируя, можно сказать, что задача построения марковского случайного процесса, описывающего фрагментацию твердотельного материала в схеме случайного выбора фрагмента, сводится к построению линейного оператора L_t , сохраняющего положительность плотности $f(r, t)$ и её нормировку (13),

$$\int_0^{\infty} (L_t[f])(r, t)dr = 0, \quad (16)$$

и такого, что сопряжённый к нему оператор L_t^* удовлетворяет тождествам (12) и (15).

4. Марковский непрерывный процесс фрагментации. Покажем, что не существует марковского случайного процесса *диффузионного* типа, в точности удовлетворяющего этим условиям. Однако, существует такой диффузионный случайный процесс, который удовлетворяет условиям (12), (15) асимптотически точно в том случае, когда при $t \rightarrow \infty$ имеет место

$$\frac{\dot{E}(t)}{\alpha \dot{N}(t)\rho^2(t)} \rightarrow 0. \quad (16)$$

Будем считать, что марковский процесс $\langle \tilde{r}(t); t \in \mathbb{R}_+ \rangle$, описывающий медленную фрагментацию в схеме случайного выбора фрагмента является *непрерывным марковским случайным процессом*, то есть он обладает непрерывными с вероятностью единица траекториями. Ясно, что, в точном смысле этого слова, процесс фрагментации не может быть таковым, так как состояние системы фрагментации всегда изменяется скачками в случайные моменты времени, в которые происходит дробление какого-то из фрагментов. Однако, если пренебречь средней величиной времени между такими дроблениями, но сравнению с каким-то временем, за которое происходит значительное изменение состояние системы фрагментации в целом, а также считать, что средняя величина скачков размеров фрагментов очень мала, но сравнению с характерным средним размером в исходном состоянии системы, что может иметь место на финальном этапе эволюции системы, то скачкообразный случайный процесс $\langle \tilde{r}(t); t \in \mathbb{R}_+ \rangle$ допустимо аппроксимировать некоторым случайным процессом с непрерывными траекториями. Таким образом, помимо медленности фрагментации, для конструируемого процесса мы требуем его непрерывности.



Предположение о непрерывности марковского процесса $\langle \tilde{r}(t); t \in \mathbb{R}_+ \rangle$ резко сужает возможный выбор операторов L_t , на основе которых формулируется эволюционное уравнение (7). Согласно теореме А.Н.Колмогорова, вся совокупность этих операторов полностью описывается формулой

$$L_t[\cdot] = \frac{\partial}{\partial r}[a(r, t)(\cdot)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2}[b^2(r, t)(\cdot)], \quad (17)$$

где $a(r, t), b^2(r, t) > 0$ – произвольные коэффициенты, допускающие существование решений уравнения (7), хотя бы в окрестности точки $t = 0$. Они содержат всю информацию об условиях дробления. Наличие только двух неизвестных коэффициентов позволяет восстановить оператор на основании двух уравнений (12) и (15). В самом деле, так как плотность $f(r, t)$ интегрируема в окрестности нуля, то интегрированием по частям выражения $r^j(L_t[f])(r, t)$, $j = 2, 3, \dots$ в пределах от 0 до ∞ , получим

$$L_t^*[r^j] = -a(r, t) \frac{d}{dr} r^j + \frac{1}{2} b^2(r, t) \frac{d^2}{dr^2} r^j = -a(r, t) j r^{j-1} + \frac{1}{2} b^2(r, t) j(j-1) r^{j-2}.$$

Воспользовавшись этим выражением для действия сопряжённого оператора на степенную функцию при $j = 2, 3$, уравнения (12) и (15) представим в следующем виде

$$r^2 \gamma(t) - 3a(r, t)r + 3b^2(r, t) = 0. \quad (18)$$

$$r^2 \gamma(t) - 2a(r, t)r + b^2(r, t) = \dot{E}(t)/\alpha N(t). \quad (19)$$

Решением этой системы линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов $a(r, t), b^2(r, t)$ оператора L_t являются

$$a(r, t) = \gamma(t) \left(\frac{2}{3} r - \frac{\dot{E}(t)}{\alpha r N(t)} \right), \quad (20)$$

$$b^2(r, t) = \gamma(t) \left(\frac{1}{3} r^2 - \frac{\dot{E}(t)}{\alpha N(t)} \right), \quad (21)$$

где мы воспользовались соотношением (10).

Уравнение (7) с оператором L_t вида (17), коэффициенты которого определяются формулами (20) и (21), не имеет решений. Это связано с тем, что коэффициент $b^2(r, t)$ становится отрицательным при $r^2 < 3[\alpha \dot{N}(t)]^{-1} \dot{E}(t)$, однако, при этом коэффициент $a(r, t)$ в точке $r^2 = 3[\alpha \dot{N}(t)]^{-1} \dot{E}(t)$ положителен.

□ В самом деле, если бы уравнение (7) и, соответственно, (6) имели решения, то существовал бы непрерывный марковский случайный процесс $\langle \tilde{r}(t); t \in \mathbb{R}_+ \rangle$ с плотностью условных вероятностей перехода $f(r, t; r', t')$, удовлетворяющей этому уравнению. Этот процесс существует на временном интервале, на котором определена эта плотность. Но тогда, этот процесс определяется решениями $\tilde{r}(t)$ стохастического дифференциального уравнения Ито

$$d\tilde{r}(t) = -a(\tilde{r}(t), t)dt + b^2(\tilde{r}(t), t)d\tilde{w}(t), \quad (22)$$



где $\tilde{w}(t)$ – траектории стандартного винеровского процесса. Для каждой точки r такой, что $r^2 > 3[\alpha\dot{N}(0)]^{-1}\dot{E}(0)$ имеется ненулевая вероятность того, что траектория $\tilde{r}(t)$, начинающаяся в этой точке, достигает впервые точки $3[\alpha\dot{N}(t)]^{-1}\dot{E}(t)$ в некоторый наперёд заданный времени t и, в этой точке, имеют место $b^2(\tilde{r}(t), t) = 0$, $a(\tilde{r}(t), t) > 0$. Следовательно, траектория $\tilde{r}(t)$ достигает этой граничной точки разрешённой области расположения траекторий случайного марковского процесса, обладая отрицательной скоростью. Это влечёт непродолжаемость рассматриваемой траектории. Таким образом, построенный марковский случайный процесс обладает, с ненулевой вероятностью, непродолжаемыми траекториями, которые могут обрываться в любой момент времени. Поэтому, полная одноточечная вероятность процесса, распределённая с плотностью $f(r, t)$, не должна сохраняться. В то же время, она, явным образом, сохраняется вследствие её подчинённости уравнению (7). Полученное противоречие доказывает сделанное выше утверждение об отсутствии решений уравнения (7), в котором оператор L_t определяется формулой (17) с коэффициентами (20), (21). ■

Таким образом, уравнение (7) с коэффициентами (20), (21) является плохой математической моделью для описания процесса медленной фрагментации. Однако, если эту модель считать как приближение относительно некоторой более общей модели, в условиях, когда параметр $\dot{E}/\alpha\dot{N}$ пренебрежимо мал, то, в формулах (20), (21), можно отбросить вторые слагаемые, считая их малыми по сравнению с первыми. Исследуемый режим медленной фрагментации, в этом случае, получается как нулевое приближение по этому малому параметру. Это тем более будет верно в том случае, когда $\dot{E}(t)/\dot{N}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и получаемое при этом уравнение должно описывать эволюцию фрагментации для размеров r , удовлетворяющих условию $r^2 > 3[\alpha\dot{N}(t)]^{-1}\dot{E}(t)$. Чтобы такое описание было пригодным для вычисления различного рода статистических характеристик медленной фрагментации, нужно чтобы в области $(3[\alpha\dot{N}(t)]^{-1}\dot{E}(t))^{1/2}, \infty)$ изменения переменной r содержалась подавляющая часть вероятности, определяемой плотностью $f(r, t)$. Критерием выполнимости такого положения является условие, состоящее в том, что средняя величина $\rho(t)$ размера фрагмента, которая определяется математическим ожиданием $M\tilde{r}(t) = \rho(t)$, много больше, чем левая граничная точка разрешённой области значений, то есть должно иметь место неравенство

$$3[\alpha\dot{N}(t)]^{-1}\dot{E}(t) \ll \rho^2(t), \tag{23}$$

которое, таким образом, представляет собой условие применимости развиваемых в этом разделе представлений об описании медленной фрагментации. Неравенство (23) накладывает ограничение на темп роста числа фрагментов в системе $N(t)$ для того, чтобы имела место медленная фрагментация. Так как

$$\rho^2(t) \leq \int_0^\infty r^2 f(r, t) dr$$

и последний интеграл равен $E(t)/\alpha N(t)$, согласно закону сохранения энергии, то из (23) следует, что должно выполняться неравенство

$$E(t)/\alpha N(t) \gg 3\dot{E}(t)/\alpha\dot{N}(t).$$



Поэтому, должно иметь место следующее условие на темп роста функции $N(t)$,

$$\dot{N}(t)/N(t) \gg 3\dot{E}(t)/E(t),$$

что, вообще говоря, приводит к следующему достаточному условию

$$N(t) \gg (E(t)/E(0))^3. \quad (24)$$

Считая условие (23) выполненным, положим, что коэффициенты (20), (21) определяются приближёнными формулами

$$a(r, t) = \frac{2}{3}r\gamma(t), \quad (25)$$

$$b^2(r, t) = \frac{1}{3}r^2\gamma(t). \quad (26)$$

В этом случае, уравнение (7) принимает вид

$$\gamma^{-1}(t)\dot{f}(r, t) = \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial r}[rf(r, t)] + \frac{1}{6}\frac{\partial^2}{\partial r^2}[r^2f(r, t)]$$

или, после перехода к новой временной шкале $t \Rightarrow s$, $ds = \gamma(t)dt$, –

$$\frac{\partial}{\partial s}f(r, s) = \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial r}[rf(r, s)] + \frac{1}{6}\frac{\partial^2}{\partial r^2}[r^2f(r, s)], \quad (27)$$

где $f(r, s)$ теперь обозначает функцию $f(r, t(s))$ с зависимостью $t(s)$ определяемой дифференциальным уравнением $ds/dt = \gamma(t)$.

Уравнение (27) связано с непрерывным марковским процессом, траектории $\tilde{r}(s)$ которого удовлетворяют стохастическому дифференциальному уравнению Ито

$$d\tilde{r}(s) = -\frac{2}{3}\tilde{r}(s)ds + \frac{1}{3}\tilde{r}(s)d\tilde{w}(s).$$

Этот процесс вполне определён и уравнение (27) имеет решения на всей положительной полуоси времени s .

5. Финальное поведение процесса медленной фрагментации. В этом пункте мы приведём явные решения уравнения (27) и, на их основе, выясним какое финальное поведение проявляет медленная фрагментация при $s \rightarrow \infty$. Полученное уравнение (27) решается точно посредством сведения его к уравнению с постоянными коэффициентами. Введя функцию $u(r, s) = rf(x, s)$, запишем это уравнение в виде

$$\frac{\partial}{\partial s}u(r, s) = \frac{5r}{6}\frac{\partial}{\partial r}u(r, s) + \frac{r}{6}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial}{\partial r}u(r, s)\right]. \quad (28)$$

Произведем в этом уравнении замену независимой переменной, положив $x = \ln r$. При этом мы переобозначим $u(r, s) = u(e^x, s) \equiv \bar{u}(x, s)$. В результате, получим

$$\frac{\partial}{\partial s}\bar{u}(x, s) = \frac{5}{6}\frac{\partial}{\partial x}\bar{u}(x, s) + \frac{1}{6}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\bar{u}(x, s). \quad (29)$$



Это уравнение сводится к каноническому виду параболического уравнения посредством подстановки $\bar{u}(x, s) = v(y, s)$, где $y = x + 5/6s$. В результате такой подстановки

$$\frac{\partial}{\partial s} \bar{u}(x, s) = \frac{\partial}{\partial s} v(y, s) + \frac{5}{6} \frac{\partial}{\partial y} v(y, s), \quad \frac{\partial}{\partial x} \bar{u}(x, s) = \frac{\partial}{\partial y} v(y, s),$$

уравнение (29) приводится к следующему

$$\frac{\partial}{\partial s} v(y, s) = \frac{1}{6} \frac{\partial^2}{\partial y^2} v(y, s). \tag{30}$$

Общее решение этого уравнения записывается в каноническом виде

$$v(y, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s/3}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{3(y-y')^2}{2s}\right) v(y', 0) dy',$$

где функция $v(y, 0) = \bar{u}(x, 0) = u(e^x, 0) = u(r, 0) = rf(r, 0)$ определяется начальной плотностью распределения $f(r, 0)$. Поэтому,

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi s/3}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{3(x+5/6s-x')^2}{2s}\right) \bar{u}(x', 0) dx' = u(e^x, s), \\ u(r, s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi s/3}} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{3[\ln(re^{5s/6}/r')]^2}{2s}\right) u(r', 0) \frac{dr'}{r'}, \\ f(r, s) &= \frac{r^{-1}}{\sqrt{2\pi s/3}} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{3[\ln(re^{5s/6}/r')]^2}{2s}\right) f(r', 0) dr'. \end{aligned} \tag{31}$$

Если считать, что когда-то в далёком прошлом изучаемая система фрагментации состояла из одного цельного образца с размером r_0 , то, в качестве начальной плотности распределения, необходимо взять $f(r, 0) = \delta(r - r_0)$. В этом случае, формула (31) преобразуется к колмогоровскому виду

$$f(r, s) = \frac{r^{-1}}{\sqrt{2\pi s/3}} \exp\left(-\frac{3[\ln(re^{5s/6}/r_0)]^2}{2s}\right). \tag{32}$$

Полученная формула совпадает с асимптотической формулой, найденной в работе [1].

Таким образом, как только в процессе медленной фрагментации имеется неограниченный рост числа фрагментов $N(t)$, и $\dot{E}(t)$ темп роста накачиваемой систему той части энергии, которая тратится на дробления фрагментов намного медленнее темпа роста $\dot{N}(t)$ полного их числа, то, при реализации схемы случайного выбора фрагмента, в ансамбле однотипных систем, проявляется логарифмически нормальное распределение по размерам фрагментов, независимо от того какое эмпирическое распределение имеется в



каждой из систем этого ансамбля. Заметим также, что полученный результат никак не связан с конечностью второго логарифмического статистического момента плотности $f(r, 0)$ начального распределения по размерам, в отличие от работы [1].

Верифицируем теперь возможность применения развитой теории. Так как в терминах эффективной шкалы времени $s = \int_0^t \gamma(t') dt'$, число фрагментов $N(s)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению

$$\frac{dN(s)}{ds} = \frac{dN(t)}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \left(\frac{dN(t)}{dt} / N(s) \right) \gamma^{-1}(t) N(s) = [\gamma(t) \gamma^{-1}(t)] N(s) = N(s),$$

то $N(s) = N_0 e^s$. По этой причине, выполнимость неравенства (23) удобно проверять в терминах эффективного времени s , когда оно принимает форму

$$\rho^2(s) \gg \frac{3}{\alpha N_0 e^s} \frac{dE(s)}{ds}.$$

В неравенстве имеется произвол только в выборе функции $E(s)$. Таким образом, по сравнению с неравенством (23), у нас имеется только одна произвольная функция, так как произвольность выбора функции $N(t)$ в (23) отражается на выборе шкалы времени. Выразим теперь функцию $M\tilde{r}^2(s)$ через $E(s)$ для случая $f(r, 0) = \delta(r - r_0)$. С этой целью, вычислим, используя явный вид плотности $f(r, s)$, математическое ожидание

$$M\tilde{r}^2(s) = \int_0^\infty r^2 f(r, s) dr = \frac{1}{\sqrt{2\pi s/3}} \int_0^\infty x \exp\left(-\frac{3[\ln(xe^{5s/6})]^2}{2s}\right) dx M\tilde{r}^2(0) = e^{-s} M\tilde{r}^2(0).$$

Тогда

$$E(s) = \alpha N(s) \int_0^\infty r^2 f(r, s) dr = \alpha N_0 M\tilde{r}^2(0),$$

откуда следует, что требуемое неравенство, заведомо выполняется, так как, в принятом нами приближении, производная $dE(s)/ds$ очень мала.

Литература

1. Колмогоров А.Н. О логарифмически-нормальном законе распределения размеров частиц при дроблении // ДАН СССР.– 1941.– 31., 2.– С.99-101.
2. Сагдеев Р.З., Тур А.В., Яновский В.В. Формирование и универсальные свойства распределений по размерам в теории дробления // ДАН СССР.– 1987.– 294., 5.– С.1105-1110.
3. Вирченко Ю.П., Шеремет О.И. Геометрические модели статистической теории фрагментации // Теор. и мат. физика.– 2001.– 128., 2.– С.161-177.
4. Ziff R.M. An explicit solutions to a discrete fragmentation model // J.Phys.A.– 1992.– 25.– P.2569-2576.
5. Virchenko Yu.P., Brodskii R.E. The Kolmogorov equation in the stochastic fragmentation theory and branching processes with infinite collection of particle types // Abstract and Applied Analysis.– 2006.– Art.ID 36215.– P.1-10.



DIFFUSION MODEL IN FRAGMENTATION THEORY

R.E. Brodskii, Yu.P. Virchenko

Institute for Single Crystals of NANU,
Lenin Av., 60, Kharkiv, 61001, Ukraine
Belgorod State University,

Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Abstract. The diffusion model of brittle materials fragmentation is constructed. In particular case, this model leads to the logarithmically normal distribution of fragment sizes being famous in fragmentation theory.

Key words: fragmentation, size, probability distribution, Markov's process.