МАТЕМАТИКА

MSC 35J15

НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА МНОГОМЕРНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

С.А. Алдашев

Казахский национальный педагогический университет им. Абая,
Институт математики, физики и информатики,
ул. Толеби, 86, Алматы, 050012, Казахстан, e-mail: aldash51@ mail.ru

Аннотация. В работе доказана разрешимость нелокальных краевых задач в цилиндрической области для многомерных эллиптических уравнений с оператором Лапласа, которые являются обобщениями задач Дирихле и Пуанкаре.

Ключевые слова: нелокальные задачи, многомерные эллиптические уравнения, разрешимость.

В то время как локальные краевые задачи для многомерных эллиптических уравнений в цилиндрической области интенсивно исследовались ранее (см., например, [1 – 5]), нелокальные краевые задачи для этих уравнений почти не исследованы. В настоящей работе доказана разрешимость нелокальных краевых задач в цилиндрической области для многомерных эллиптических уравнений с оператором Лапласа, которые являются обобщениями задач Дирихле и Пуанкаре.

1. Постановка задач и результат. Пусть D_α– цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, ..., x_m, t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x,t) : : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \alpha > 0$ и $t = 0$, где $|x|$– длина вектора $x = (x_1, ..., x_m)$.

Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_α области D_α, обозначим через Γ_α, S_α, S_0, соответственно.

В области D_α рассмотрим многомерные эллиптические уравнения

$$Lu \equiv \Delta_x u + u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,t)u_{x_i} + b(x,t)u_t + c(x,t)u = 0\,, \tag{1}$$

где Δ_x - оператор Лапласа по переменным $x_1, ..., x_m$, $m \geq 2$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, ..., x_m, t$ к сферическим $r, \theta_1, ..., \theta_{m-1}, t$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta_1 < 2\pi$, $0 \leq \theta_i \leq \pi$, $i = 2, 3, ..., m-1$.

Рассмотрим следующие нелокальные краевые задачи

Задача 1. Найти решение уравнения (1) в области D_α из класса $C(\bar{D}_\alpha) \cap C^1(D_\alpha \cup S_0 \cup S_\alpha) \cap C^2(D_\alpha)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$\beta_1 u(r,\theta,0) = \gamma_1 u(r,\theta,\alpha) + \varphi_1(r,\theta),\ \beta_2 u_t(r,\theta,0) = \gamma_2 u_t(r,\theta,\alpha) + \varphi_2(r,\theta),\ u\Big|_{\Gamma_\alpha} = \psi(t,\theta)\,. \tag{2}$$

Задача 2. Найти решение уравнения (1) в области D_α из класса $C(\bar{D}_\alpha) \cap C^1(D_\alpha \cup S_0) \cap C^2(D_\alpha)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u(r,\theta,0) = \varphi_1(r,\theta), \ \beta_2 u_t(r,\theta,0) = \gamma_2 u(r,\theta,\alpha) + \varphi_2(r,\theta), \ u\Big|_{\Gamma_\alpha} = \psi(t,\theta)\,, \tag{3}$$

где $\beta_j, \ \gamma_j = \text{const}, \ \beta_j^2 + \gamma_j^2 \neq 0, \ j = 1,2$, которые являются обобщениями задач Дирихле и Пуанкаре.

Пусть $\left\{Y_{n,m}^k(\theta)\right\}$—система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leq k \leq k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $\theta = (\theta_1, ..., \theta_{m-1})$, $W_2^l(S_0)$, $l = 0, 1, ...$– пространства Соболева.

Имеют место следующие утверждения [6]

Лемма 1. *Пусть $f(r,\theta) \in W_2^l(S_0)$. Если $l \geq m-1$, то ряд*

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta)\,, \tag{4}$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leq l-m+1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Лемма 2. *Для того, чтобы $f(r,\theta) \in W_2^l(S_0)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда (3) удовлетворяли неравенствам*

$$|f_0^1(r)| \leq c_1, \ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{2l} |f_n^k(r)|^2 \leq c_2, \ \ c_1, \, c_2 = \text{const}\,.$$

Через $\tilde{a}_{in}^k(r,t)$, $a_{in}^k r, t$, $\tilde{b}_n^k(r,t)$, $\tilde{c}_n^k(r,t)$, ρ_n^k, $\bar{\varphi}_{1n}^k(r)$, $\bar{\varphi}_{2n}^k(r)$, $\psi_n^k(t)$, обозначим коэффициенты ряда (4), соответственно функций $a_i(r,\theta,t)\rho(\theta)$, $a_i \frac{x_i}{r}\rho$, $b(r,\theta,t)\rho$, $c(r,\theta,t)\rho$, $\rho(\theta)$, $i = 1, ..., m$, $\varphi_1(r,\theta)$, $\varphi_2(r,\theta)$, $\psi(t,\theta)$, причем $\rho(\theta) \in C^\infty(H)$, H–единичная сфера в E_m.

Пусть $a_i(r,\theta,t)$, $b(r,\theta,t)$, $c(r,\theta,t) \in W_2^l(D_\alpha) \subset C(\overline{D}_\alpha)$, $i = 1, ..., m$, $l \geq m+1$, $\varphi_1(r,\theta)$, $\varphi_2(r,\theta) \in W_2^p(S_0)$, $\psi(t,\theta) \in W_2^l(\Gamma_\alpha)$, $p > \frac{3m}{2}$.

Тогда справедливы:

Теорема 1. *Если выполняется условие*

$$(\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1) \operatorname{ch} \mu_{s,n}\alpha \neq \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2, \ \ s = 1, 2...\,, \tag{5}$$

то задача 1 разрешима.

Теорема 2. *Если имеет место соотношение*

$$\gamma_2 \operatorname{sh} \mu_{s,n}\alpha \neq \mu_{s,n}\beta_2, \ \ s = 1, 2...\,, \tag{6}$$

то задача 2 разрешима, где $\mu_{s,n}$– положительные нули функций Бесселя первого рода $J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(z)$.

Заметим, что в случае задачи Пуанкаре ($\beta_1 = 0$, $\gamma_2 = 0$) и задачи Дирихле ($\beta_2 \neq \neq 0$), соответственно условий (5) и (6) всегда выполняются, однозначные разрешимости которых показаны в [5, 4].

2. Доказательство теоремы 1. В сферических координатах уравнения (1) имеет вид

$$Lu \equiv u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{\delta u}{r^2} + u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(r,\theta,t)u_{x_i} + b(r,\theta,t)u_t + c(r,\theta,t)u = 0\,, \tag{7}$$

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1}\theta_j} \frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\theta_j \frac{\partial}{\partial\theta_j}\right),\ g_1 = 1,\ g_j = (\sin\theta_1 ... \sin\theta_{j-1})^2\,,\ j > 1\,.$$

Известно [6], что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-\,-2)$, $n = 0, 1, ...$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y^k_{n,m}(\theta)$.

Искомое решение задачи 1 будем искать в виде

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}^k_n(r,t)Y^k_{n,m}(\theta)\,, \tag{8}$$

где $\bar{u}^k_n(r,t)$– функции, подлежащие определению.

Подставляя (8) в (7), умножив затем полученное выражение на $\rho(\theta) \neq 0$ и проинтегрировав по единичной сфере H, для $\bar{u}^k_n$ получим [4,5]

$$\begin{gathered}\rho^1_0\bar{u}^1_{0rr} + \rho^1_0\bar{u}^1_{0tt} + \left(\frac{m-1}{r}\rho^1_0 + \sum_{i=1}^{m} a^1_{i0}\right)\bar{u}^1_{0r} + \tilde{b}^1_0\bar{u}^1_{0t} + \tilde{c}^1_0\bar{u}^1_0 + \\ + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\rho^k_n\bar{u}^k_{nrr} + \rho^k_n\bar{u}^k_{ntt} + \left(\frac{m-1}{r}\rho^k_n + \sum_{i=1}^{m} a^k_{in}\right)\bar{u}^k_{nr} + \tilde{b}^k_n\bar{u}^k_{nt} + \right. \\ \left. + \left[\tilde{c}^k_n - \lambda_n\frac{\rho^k_n}{r^2} + \sum_{i=1}^{m}(\tilde{a}^k_{in-1} - na^k_{in})\right]\bar{u}^k_n\right\} = 0\,.\end{gathered} \tag{9}$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\rho^1_0\bar{u}^1_{0rr} + \rho^1_0\bar{u}^1_{0tt} + \frac{m-1}{r}\rho^1_0\bar{u}^1_{0r} = 0\,, \tag{10}$$

$$\begin{gathered}\rho^k_1\bar{u}^k_{1rr} + \rho^k_1\bar{u}^k_{1tt} + \frac{m-1}{r}\rho^k_1\bar{u}^k_{1r} - \frac{\lambda_1}{r^2}\rho^k_1\bar{u}^k_1 = \\ = -\frac{1}{k_1}\left(\sum_{i=1}^{m} a^1_{i0}\bar{u}^1_{0r} + \tilde{b}^1_0\bar{u}^1_{0t} + \tilde{c}^1_0\bar{u}^1_0\right),\quad n = 1\,,\quad k = \overline{1, k_1}\,,\end{gathered} \tag{11}$$

$$\rho_n^k \bar{u}_{nrr}^k + \rho_n^k \bar{u}_{ntt}^k + \frac{m-1}{r}\rho_n^k \bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\rho_n^k \bar{u}_n^k =$$

$$= -\frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{k_{n-1}}\left\{\sum_{i=1}^{m} a_{in-1}^k \bar{u}_{n-1r}^k + \widetilde{b}_{n-1}^k \bar{u}_{n-1t}^k + [\widetilde{c}_{n-1}^k + \right. \tag{12}$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{m}(\widetilde{a}_{in-2}^k - (n-1)a_{in-1}^k)]\bar{u}_{n-1}^k\right\}, \quad k = \overline{1,k_n}, \quad n = 2,3,\dots .$$

Суммируя уравнение (11) от 1 до k_1, а уравнение (12) – от 1 до k_n, а затем сложив полученные выражения вместе с (10), приходим к уравнению (9).

Отсюда следует, что если $\{\bar{u}_n^k\}$, $k = \overline{1,k_n}$, $n = 0,1,\dots$ – решение системы (10)-(12), то оно является решением уравнения (9).

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (10)-(12) можно представить в виде

$$\bar{u}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r}\bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}_n^k + \bar{u}_{ntt}^k = f_n^k(r,t)\,, \tag{13}$$

где $f_n^k(r,t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $f_0^1(r,t) \equiv \equiv 0$.

Далее, из краевого условия (2) в силу (8), с учетом леммы 1 будем иметь

$$\begin{gathered} \beta_1 \bar{u}_n^k(r,0) = \gamma_1 \bar{u}_n^k(r,\alpha) + \varphi_{1n}^k(r),\ \beta_2 \bar{u}_{nt}^k(r,0) = \gamma_2 \bar{u}_{nt}^k(r,\alpha) + \varphi_{2n}^k(r)\,, \\ \bar{u}_n^k(1,t) = \psi_n^k(t),\ k = \overline{1,k_n}, \quad n = 0,1,\dots . \end{gathered} \tag{14}$$

В (13), (14) произведя замену $\bar{v}_n^k(r,t) = \bar{u}_n^k(r,t) - \psi_n^k(t)$ получим

$$\bar{v}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r}\bar{v}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{v}_n^k + \bar{v}_{ntt}^k = \bar{f}_n^k(r,t)\,, \tag{15}$$

$$\begin{gathered} \beta_1 \bar{v}_n^k(r,0) = \gamma_1 \bar{v}_n^k(r,\alpha) + \varphi_{1n}^k(r),\ \beta_2 \bar{v}_{nt}^k(r,0) = \gamma_2 \bar{v}_{nt}^k(r,\alpha) + \varphi_{2n}^k(r)\,, \\ \bar{v}_n^k(1,t) = 0,\ k = \overline{1,k_n}, \quad n = 0,1,\dots , \end{gathered} \tag{16}$$

$$\bar{f}_n^k(r,t) = f_n^k(r,t) - \psi_{ntt}^k + \frac{\lambda_n}{r^2}\psi_n^k,\ \varphi_{1n}^k(r) = \bar{\varphi}_{1n}^k(r) + \gamma_1\psi_n^k(\alpha) - \beta_1\psi_n^k(0)\,,$$

$$\varphi_{2n}^k(r) = \bar{\varphi}_{2n}^k(r) + \gamma_2\psi_{nt}^k(\alpha) - \beta_2\psi_{nt}^k(0)\,.$$

Произведя замену $\bar{v}_n^k(r,t) = r^{\frac{(1-m)}{2}} v_n^k(r,t)$ задачу (15), (16) приведем к следующей задаче

$$Lv_n^k \equiv v_{nrr}^k + v_{ntt}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}v_n^k = \tilde{f}_n^k(r,t)\,, \tag{17}$$

$$\begin{gathered} \beta_1 v_n^k(r,0) = \gamma_1 v_n^k(r,\alpha) + \tilde{\varphi}_{1n}^k(r),\quad \beta_2 v_{nt}^k(r,0) = \gamma_2 v_{nt}^k(r,\alpha) + \widetilde{\varphi}_{2n}^k(r), \\ v_n^k(1,t) = 0,\ k = \overline{1,k_n},\ n = 0,1,\dots , \end{gathered} \tag{18}$$

$$\bar{\lambda}_n = \frac{(m-1)(3-m) - 4\lambda_n}{4}\,, \quad \tilde{f}_n^k(r,t) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\bar{f}_n^k(r,t)\,, \quad \tilde{\varphi}_{jn}^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\varphi_{jn}^k(r)\,,\ j = 1,2.$$

Решение задачи (13), (14) рассмотрим в виде

$$v_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r) T_s(t)\,, \tag{19}$$

при этом пусть

$$\tilde{f}_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{ns}^k(t) R_s(r)\,,\ \ \tilde{\varphi}_{1n}^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{ns}^k R_s(r),\ \ \tilde{\varphi}_{2n}^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} e_{ns}^k R_s(r)\,. \tag{20}$$

Подставляя (19) в (17), (18), с учетом (20), получим

$$R_{srr} + \left(\frac{\overline{\lambda}_n}{r^2} + \mu\right) R_s = 0\,,\ \ 0 < r < 1\,, \tag{21}$$

$$R_s(1) = 0\,,\ \ |R_s(0)| < \infty\,, \tag{22}$$

$$T_{stt} - \mu T_s(t) = a_{ns}^k(t)\,,\ \ 0 < t < \alpha\,, \tag{23}$$

$$\beta_1 T_s(0) = \gamma_1 T_s(\alpha) + b_{ns}^k\,,\ \ \beta_2 T_{st}(0) = \gamma_2 T_{st}(\alpha) + e_{ns}^k\,. \tag{24}$$

Ограниченным решением задачи (21), (22) является [7]

$$R_s(r) = \sqrt{r} J_\nu(\mu_{s,n} r)\,, \tag{25}$$

где $\nu = n + (m-2)/2$, $\mu = \mu_{s,n}^2$.

Общее решение уравнения (23) представимо в виде [7]

$$T_{s,n}(t) = c_{1s} \operatorname{ch} \mu_{s,n} t + c_{2s} \operatorname{sh} \mu_{s,n} t - \frac{\operatorname{ch} \mu_{s,n} t}{\mu_{s,n}} \int_0^t a_{ns}^k(\xi) \operatorname{sh} \mu_{s,n} \xi d\xi +$$

$$+ \frac{\operatorname{sh} \mu_{s,n} t}{\mu_{s,n}} \int_0^t a_{ns}^k(\xi) \operatorname{ch} \mu_{s,n} \xi d\xi\,, \tag{26}$$

c_{1s}, c_{2s}– произвольные постоянные, удовлетворив условию (24) получим алгебраических уравнений

$$\begin{cases} (\beta_1 - \gamma_1 \operatorname{ch} \mu_{s,n}\alpha) c_{1s} - \gamma_1 c_{2s} \operatorname{sh} \mu_{s,n}\alpha = \\ = \dfrac{\gamma_1}{\mu_{s,n}} [\operatorname{sh} \mu_{s,n}\alpha \displaystyle\int_0^\alpha a_{ns}^k(\xi) \operatorname{ch} \mu_{s,n}\xi d\xi - \operatorname{ch} \mu_{s,n}\alpha \int_0^\alpha a_{ns}^k(\xi) \operatorname{sh} \mu_{s,n}\xi d\xi] + b_{ns}^k, \\ \gamma_2 c_{1s} \operatorname{sh} \mu_{s,n}\alpha + (\gamma_2 \operatorname{ch} \mu_{s,n}\alpha - \beta_2) c_{2s} = \\ = [\mu_{s,n}]^{-1} [\gamma_2 (\operatorname{sh} \mu_{s,n}\alpha \displaystyle\int_0^\alpha a_{ns}^k(\xi) \operatorname{sh} \mu_{s,n}\xi d\xi - \operatorname{ch} \mu_{s,n}\alpha \int_0^\alpha a_{ns}^k(\xi) \operatorname{ch} \mu_{s,n}\xi d\xi) - e_{ns}^k]\,, \end{cases} \tag{27}$$

которое имеет единственное решение, если выполняется условие (5).

Подставляя (25) в (20) получим

$$r^{-\frac{1}{2}}\tilde{f}_n^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}a_{ns}^k(t)J_\nu(\mu_{s,n}r),\; r^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varphi}_{1n}^k(r)=\sum_{s=1}^{\infty}b_{ns}^kJ_\nu(\mu_{s,n}r),$$
$$r^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varphi}_{2n}^k(r)=\sum_{s=1}^{\infty}e_{ns}^kJ_\nu(\mu_{s,n}r)\,,\;0<r<1\,. \tag{28}$$

Ряды (28) – разложения в ряды Фурье-Бесселя [8], если

$$a_{ns}^k(t)=2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2}\int\limits_0^1\sqrt{\xi}\tilde{f}_n^k(\xi,t)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi\,,$$
$$b_{ns}^k=2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2}\int\limits_0^1\sqrt{\xi}\tilde{\varphi}_{1n}^k(\xi)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi, \tag{29}$$
$$e_{ns}^k=2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2}\int\limits_0^1\sqrt{\xi}\tilde{\varphi}_{2n}^k(\xi)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi\,,$$

$\mu_{s,n}$, $s=1,2,...$– положительные нули функций Бесселя $J_\nu(z)$, расположенные в порядке возрастания их величины.

Из (25),(26) получим решение задачи (17), (18) в виде

$$v_n^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}\sqrt{r}T_{s,n}(t)J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{s,n}r)\,, \tag{30}$$

где $a_{ns}^k(t)$, b_{ns}^k, e_{ns}^k, определяются из (29), а c_{1s}, c_{2s}– из (27).

Следовательно, сначала решив задачу (10), (14) $(n=0)$, а затем (11), (14)$(n=1)$ и т.д. найдем последовательно все $v_n^k(r,t)$ из (30), $k=\overline{1,k_n}$, $n=0,1,\dots$.

Итак, в области D_α, имеет место

$$\int\limits_H\rho(\theta)LudH=0\,. \tag{31}$$

Пусть $f(r,\theta,t)=R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r)\in V_0, V_0$-плотна в $L_2((0,1))$, $\rho(\theta)\in C^\infty(H)$-плотна в $L_2(H)$, а $T(t)\in V_1, V_1$-плотна в $L_2((0,\alpha))$. Тогда $f(r,\theta,t)\in V$, $V=V_0\otimes H\otimes V_1$-плотна в $L_2(D_\alpha)$ [9].

Отсюда и из (31), следует, что

$$\int\limits_{D_\alpha}f(r,\theta,t)LudD_\alpha=0\;\text{ и }\;Lu=0,\;\forall(r,\theta,t)\in D_\alpha.$$

Таким образом, решением задачи 1 является ряд

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}[\psi_n^k(t)+r^{\frac{(1-m)}{2}}\upsilon_n^k(r,t)]Y_{n,m}^k(\theta)\,, \tag{32}$$

где $\upsilon_n^k(r,t)$ находятся из (30).

Учитывая формулу [8] $2J'_\nu(z)=J_{\nu-1}(z)-J_{\nu+1}(z)$ оценки [10,6]

$$J_\nu(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)+0\left(\frac{1}{z^{3/2}}\right),\ \nu\geq 0\,,$$

$$|k_n|\leq c_1 n^{m-2},\ \left|\frac{\partial^q}{\partial\theta_j^q}Y_{n,m}^k(\theta)\right|\leq c_2 n^{\frac{m}{2}-1+q},\ j=\overline{1,m-1},\ q=0,1,\ldots,$$

а также леммы, условия па заданные функции $\varphi_1(r,\,\theta)$, $\varphi_2(r,\,\theta)$, $\psi(t,\,\theta)$, как в [4,5] можно показать, что полученное единственное решение (32) принадлежит классу $C(\bar{D}_\alpha)\cap C^1(D_\alpha\cup S_0\cup S_\alpha)\cap C^2(D_\alpha)$.

Следовательно, разрешимость задачи 1 установлено. ■

3. Доказательство теоремы 1. Решение задачи (1), (3) будем искать в виде (8), где функции $\bar{u}_n^k(r,t)$ будут определены ниже. Тогда, аналогично п.2, функции $\bar{u}_n^k(r,t)$ удовлетворяют системы уравнений (10)-(12).

Далее, из краевого условия (3), в силу (8), получим

$$\begin{gathered}\bar{u}_n^k(r,0)=\overline{\varphi}_{1n}^k(r),\ \beta_2\bar{u}_{nt}^k(r,0)=\gamma_2\overline{u}_n^k(r,\alpha)+\bar{\varphi}_{2n}^k(r),\ \bar{u}_n^k(1,t)=\psi_n^k(t),\\ k=\overline{1,k_n},\quad n=0,1,\ldots.\end{gathered} \tag{33}$$

Как ранее замечено, что каждое уравнение системы (10)-(12) представимо в виде (13).

Произведя сначала замену $\bar{\upsilon}_n^k(r,t)=\bar{u}_n^k(r,t)-\psi_n^k(t)$, а затем положив $\bar{\upsilon}_n^k(r,t)==r^{\frac{(1-m)}{2}}\upsilon_n^k(r,t)$ задачу (13), (33) приведем к следующей задаче

$$L\upsilon_n^k=\tilde{f}_n^k(r,t)\,, \tag{17}$$

$$\upsilon_n^k(r,0)=\tilde{\varphi}_{1n}^k(r),\ \beta_2\upsilon_{nt}^k(r,0)=\gamma_2\upsilon_n^k(r,\alpha)+\tilde{\varphi}_{2n}^k(r),\ \upsilon_n^k(1,t)=0,\ k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,\ldots, \tag{34}$$

где $\tilde{\varphi}_{1n}^k(r)=r^{\frac{(m-1)}{2}}(\bar{\varphi}_{1n}^k(r)-\psi_n^k(0))$, $\tilde{\varphi}_{2n}^k(r)=r^{\frac{(m-1)}{2}}(\bar{\varphi}_{2n}^k(r)+\gamma_2\psi_n^k(\alpha)-\beta_2\psi_{nt}^k(0))$.

Если решение задачи (17), (34) будем искать в виде (19), то приходим к задаче (21), (22) и к задаче для (23) с данными

$$T_s(0)=b_{ns}^k,\ \beta_2T_{st}(0)=\gamma_2T_s(\alpha)+e_{ns}^k\,. \tag{35}$$

Удовлетворив общее решение (26) уравнения (23) краевому условию (35) будем иметь

$$\left\{\begin{aligned}&c_{1s}=b_{ns}^k\,,\\&(\mu_{s,n}\beta_2-\gamma_2\operatorname{sh}\mu_{s,n}\alpha)c_{2s}=\\&=\gamma_2b_{ns}^k\operatorname{ch}\mu_{s,n}\alpha+\frac{\gamma_2}{\mu_{s,n}}(\operatorname{sh}\mu_{s,n}\alpha\int_0^\alpha a_{ns}^k(\xi)\operatorname{ch}\mu_{s,n}\xi d\xi-\operatorname{ch}\mu_{s,n}\alpha\int_0^\alpha a_{ns}^k(\xi)\operatorname{sh}\mu_{s,n}\xi d\xi)+e_{ns}^k\,,\end{aligned}\right. \tag{36}$$

из которого однозначно определяются коэффициенты c_{1s}, c_{2s}, если выполняется условие (6).

Таким образом, из (25), (26) получим решение задачи (17), (34) в виде (30), где $a^k_{ns}(t)$, b^k_{ns}, e^k_{ns} находятся из (29), а c_{1s}, c_{2s}– из (36).

Далее, как в случае теоремы 1 завершается доказательство теоремы 2.

Следовательно, разрешимость задачи 2 показана. ■

Литература

1. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнения в частных производных / М.: Наука, 2006. – 287 с.
2. Алдашев С.А. Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для многомерного уравнения Лапласа // Известия Саратовского университета, Новая серия. Серия математика, механика, информатика. – 2012. – 12;3. – С.3-7
3. Алдашев С.А. Корректность задачи Пуанкаре в цилиндрической области для многомерного уравнения Лапласа // Известия НАН РК, серия физико-математическая, Алматы. – 2014. – №3(295). – С.62-67.
4. Алдашев С.А. Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для одного класса многомерных эллиптических уравнений // Вестник НГУ. Серия математика, механика, информатика. Новосибирск. – 2012. – 12; 1. – С.7-13.
5. Алдашев С.А. Корректность задачи Пуанкаре в цилиндрической области для одного класса многомерных эллиптических уравнений // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. Самара. – 2014. – 10(121). – С.17-25.
6. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения / М.: Физматгиз, 1962. – 254 с.
7. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / М.: Наука, 1965. – 703 с.
8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т.2 / М.: Наука, 1974. – 295 с.
9. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа / М.: Наука, 1976. – 543 с.
10. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики / М: Наука, 1966. – 724 с.

NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN CYLINDRICAL DOMAIN OF A CLASS MULTIDIMENSIONAL ELLIPTIC EQUATIONS

S.A. Aldashev

Kazakhstan National Pedagogical University named Abay,
Institute of mathematics, physics and informatics,
Tolebi St., 86, Almaty, 050012, Kazakhstan, e-mail: aldash51@ mail.ru

Abstract. Solvability of some nonlocal boundary value problems in cylindrical domain of multidimensional elliptic equations with the Laplace operator which are some generalizations of Dirichlet's and Poincare's problems is proved.

Key words: nonlocal problems, multidimensional elliptic equations, solvability .