MSC 82D40

ПЛОТНОСТЬ ПОТОКА МАГНИТНОГО МОМЕНТА СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО МАГНЕТИКА

Ю.П. Вирченко, Д.А. Чурсин

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Найден полный набор алгебраически независимых псевдотензоров, на основе которых может быть составлено общее выражение для плотности потока магнитного момента $\mathbf{M}(\mathbf{x})$, сферически симметричного и который содержит пространственные производные не более чем первого порядка.

Ключевые слова: поток, плотность магнитного момента, псевдотензор, псевдоскаляр, псевдовектор.

1. Введение. Центральной проблемой в неравновесной термодинамике является формулировка эволюционных уравнений для плотностей интенсивных термодинамических параметров, вполне характеризующих локально состояние пространственно распределенной термодинамической системы. Можно думать, что общая форма таких уравнений представляет собой равенство производной но времени плотности какого-либо интенсивного параметра дивергенции плотности потока этого параметра. Применительно к построению эволюционных уравнений ферродинамики эта проблема состоит в формулировке такого уравнения для плотности магнитного момента $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$ в каждой пространственной точке с радиус вектором $\mathbf{x}$ для каждого момента времени t, которое бы учитывало диссипативные эффекты. Наиболее известным уравнением эволюционным ферродинамики является уравнение Ландау-Лифшица, которое мы запишем в векторно-тензорных обозначениях для случая сферически симметричного магнетика (см., например, [1])

$$\dot{M}_j(\mathbf{x}, t) = \gamma\epsilon_{jkl} M_k(\mathbf{x}, t)\Big[\Delta M_l(\mathbf{x}, t) + H_l(\mathbf{x}, t)\Big], \quad j = 1, 2, 3. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t) = \langle M_1(\mathbf{x}, t), M_2(\mathbf{x}, t), M_3(\mathbf{x}, t)\rangle$, $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \langle H_1(\mathbf{x}, t), H_2(\mathbf{x}, t), H_3(\mathbf{x}, t)\rangle$ – напряженность внешнего магнитного поля, $\gamma = \text{const}$, ϵ_{jkl} – универсальный антиссимметричный псевдотензор третьего ранга и использовано правило тензорной алгебры о повторяющихся индексах [2]. Учитывая тождество $\epsilon_{jkl} M_l M_k = 0$, в отсутствие внешнего магнитного поля (внешнего источника) уравнение (1) представимо в виде

$$\dot{M}_j(\mathbf{x}, t) = \nabla_k T_{jk}(\mathbf{x}, t) \tag{2}$$

– дивергенции плотности потока магнитного момента

$$T_{jk}(\mathbf{x}, t) = \gamma\epsilon_{jml} M_m(\mathbf{x}, t)\nabla_k M_l(\mathbf{x}, t)\,. \tag{3}$$

Заметим, что $T_{jk}(\mathbf{x},t)$ является всевдотензором второго ранга. Это означает, что, при преобразовании отражения пространства $\mathbb{R}^3$, оп, в отличие от тензора должен изменить знак. Последнее связно с тем, что $\mathbf{M}(\mathbf{x},t)$ в левой части (3) является псевдовектором, то есть таким вектором, который пе меняет знака при отражениях (см., например, [2]), а дифференциальный оператор ∇_k – обычным вектором (изменяющим знак при отражениях).

Уравнение (1) пе описывает явлений диссипации при эволюции распределения магнитного момента среды. Возникает вопрос, каким образом нужно его изменить так, чтобы устранить этот дефект и при этом, в течение эволюции, сохранялась величина $\mathbf{M}^2(\mathbf{x}) = M^2 = \text{const}$. Одним из подходов для решения этой задачи является следующий. Нужно построить общее выражение для тензора $T_{jk}(\mathbf{x},t)$, отличное от (3), которое является «локальным» функционалом от $\mathbf{M}(\mathbf{x},t)$, то есть зависящим только от значений магнитного момента $\mathbf{M}(\mathbf{x},t)$ и значений его пространственных производных в той же точке $\mathbf{x}$, и которое удовлетворяет самому общему требованию ковариантности $T_{jk}(\mathbf{x})$ при действии группы вращений O_3, а затем, исходя из этой общей формы, выбрать ту возможную, которая может удовлетворять поставленным требованиям.

2. Постановка задачи. Согласно сформулированному выше подходу к решению физической задачи, нужно построить в рамках тензорной алгебры наиболее общее алгебраическое выражение для T_{jk} (в дальнейшем, ввиду несущественности для постановки и решения задачи, аргументы $\mathbf{x}$ и t мы всюду опускаем), которое является псевдотензором и которое состоит только из псевдовектора M_j и вектора ∇_k, то есть это выражение является элементом тензорной алгебры с образующими M_j и ∇_k. При этом, так как ∇_k является дифференциальным оператором, то тензорная алгебра является некоммутативной. Естественно при этом, что при конструировании элементов этой алгебры могут быть использованы универсальные (неизменные при непрерывных преобразованиях из O_3) тензор δ_{jk} и псевдотепзор ϵ_{jkl} (символ Леви-Чивитта). Любой элемент этой алгебры может быть представлен в виде линейной комбинации линейно независимых мономов, обозначаемых нами далее как S_{jk}, каждый из которых является псевдотепзором. При этом под мономами мы понимаем алгебраические выражения которые пе содержат операции сложения тензоров (и умножения па число), а составлены только посредством операции тензорного умножения и операции свертки. Множество таких мономов, без дополнительных уточнений бесконечно. Поэтому указанная алгебраическая постановка задачи нуждается в следующем уточнении. Так как в любом эволюционном феноменологическом уравнении для физической величины присутствуют некоторые неизвестные множители, которые являются скалярными функциями от ее значений в той же самой пространственной точке, то, в дальнейшем, любые два монома будем рассматривать как эквивалентные, если они отличаются множителем в виде скалярной функции от M_j. Это соглашение сильно ограничивает множество линейно независимых мономов, но все же оставляет его бесконечным. Другим соглашением, которое мы принимаем по физическим соображениям, является требование использования вектора ∇, при построении каждого монома, не более одного раза. Это означает, что мы ограничиваемся эволюционными уравнениями вида (2) не более второго порядка. Последнее связано с физическим предположением о малости «градиентов» у изучаемой физической величины. Соображения такого рода обычно используются при построении феноменологических уравнений (см., например, [3]) Оказывается, что, после принятия такого соглашения, множество линейно независимых мономов является конечным. Целью настоящего сообщения является полное описание этого множества. Таким образом, множество линейно независимых мономов разбивается на два класса: $\mathcal{D}_0$ состоит из мономов, не содержащих элемента ∇_k и $\mathcal{D}_1$ – из мономов, содержащих этот элемент.

3. Построение множества линейно независимых мономов. Сделаем некоторые предварительные замечания, упрощающие описание списка линейно независимых мономов.

I. Так как конструируемая тензорная алгебра некоммутативна, то важен порядок, в котором расставляются между собой элементы M_j и ∇_k. Однако, ввиду справедливости формулы дифференцирования произведения для оператора ∇_k,

$$\nabla_k M_{j_1} \ldots M_{j_s} = \sum_{l=1}^{s} \prod_{m \neq l} M_{j_m} \nabla_k M_{j_l}$$

при построении линейно независимых мономов можно ограничиться только такими, у которых после элемента алгебры ∇_k, если он имеется в мономе, находится только один элемент M_j.

II. Так как символ δ_{jk}, после тензорной операции свертки по одному из индексов, исчезает из выражения монома, то все конструируемые мономы – псевдотензоры второго ранга распадаются на два класса: $\mathcal{K}_0$ состоит из мономов S_{jk}, имеющих вид $S_{jk} = \delta_{jk} \cdot S$, где S – моном нулевого ранга, который является псевдоскаляром, и $\mathcal{K}_1$ – из мономов S_{jk}, в построении которых символ δ_{jk} отсутствует.

III. Для тензорного произведения символов ϵ справедлива формула (см., например, [4])

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \det \begin{pmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{pmatrix},$$

которая сводит их к линейным комбинациям из символов δ. По этой причине, символ ϵ при конструировании линейно независимых мономов может быть использован не более одного раза. Следовательно, множество всех искомых мономов разбивается на два класса: $\mathcal{L}_0$ состоит из мономов, при построении которых отсутствует символ ϵ и $\mathcal{L}_1$ – из мономов, которые содержат символ ϵ.

Для упрощения процедуры перечисления всего списка линейно независимых мономов S_{jk} имеет смысл попутно перечислить все возможные линейно независимые скаляры, псевдоскаляры, векторы, псевдовекторы и тензоры второго ранга в рамках тензорной алгебры с образующими M_j и ∇_k с учетом принятых соглашений. Заметим, что при этом, за исключением тензоров, символ δ не играет роли в построениях при учете принятых соглашений.

Множество скалярных мономов. Если не используется элемент ∇_k, то, ввиду принятого соглашения об эквивалентности мономов, отличающихся на скалярную функцию от M_j, и тождества $\varepsilon_{ijk}M_iM_jM_k = 0$ такие мономы отсутствуют. Пусть элемент ∇_k используется. Тогда он должен быть свернут либо с M_j, либо но одному из индексов символа ϵ. В первом случае, каждое из выражений $\nabla_l M_l$ является псевдоскаляром и для того, чтобы его превратить в скаляр его нужно умножить либо на псевдоскаляр (в первом случае), не содержащий элемента ∇_k, а таких псевдоскаляров не существует, ввиду $\varepsilon_{ijk}M_iM_jM_k = 0$, либо на псевдовектор (во втором случае), не содержащий ∇_k, которого также не существует, ввиду $\varepsilon_{ijk}M_jM_k = 0$. Таким образом, множество скалярных мономов требуемого типа пусто.

Множество псевдоскалярных мономов. Если не используется символ ε_{ijk}, то имеются только псевдоскаляры $(\nabla_j M_j)$, $(M_iM_j\nabla_j M_i)$. Если же символ ε_{ijk} используется, то такой моном единствен $(\varepsilon_{ijk}M_i\nabla_j M_k)$, так как все индексы у символа ϵ должны быть свернуты, один из них обязательно – с символом ∇, два других – с элементами M_j, но, в силу тождества $\varepsilon_{ijk}M_jM_k = 0$, стоящими но разные стороны от ∇.

Заметим, что перестановки индексов у ϵ не приводит к появлению новых независимых мономов, ввиду абсолютной антисимметрии псевдотензора ϵ_{jkl}. Это свойство используются всюду ниже без дополнительных оговорок.

Множество векторов. Если символ ϵ не используется, то так как элемент M_j, являющийся псевдовектром, должен использоваться при построении четное число раз, то имеется, с точностью до эквивалентности, три монома, в которых имеется два множителя M_j: $(M_j\nabla_j M_i)$, $(M_i\nabla_j M_j)$, $(M_j\nabla_i M_j)$ и один моном с 4 четырмя сомножителями, $(M_iM_jM_k\nabla_j M_k)$.

При наличии элемента ϵ в конструкции монома, элемент M_j может появиться нечетное число раз и, так как все индексы у элемента ϵ должны быть свернуты, то получаем следующие мономы $(\varepsilon_{ijk}\nabla_j M_k)$, $(\varepsilon_{ijk}M_jM_l\nabla_k M_l)$, $(\varepsilon_{ijk}M_jM_l\nabla_l M_k)$.

Множество псевдовекторов. Имеется один моном M_i. Это связано с тем, что нет никаких скалярных мономов, содержащих элемент ∇, на которые можно было умножить M_i, чтобы построить новый линейно независимый моном. Кроме того, если свободный индекс i в мономе несет на себе элемент ∇, то это невозможно, так как число элементов M_j в тензорном произведении будет четным без наличия элемента ϵ (см. выше), либо оно будет нечетным при наличии ϵ.

Множество тензоров. Имеется три тензора δ_{ij}, (M_iM_j), $(\varepsilon_{ijk}M_k)$ так как эти мономы нельзя изменить умножением на скалярный моном, содержащий элемент ∇. Кроме того, могли бы существоввать мономы, которые представляются произведением псевдотензора на псевдоскаляр, но при этом, так как во всевдоскалярах в произведении используется элемент ∇_k, то псевдотензор не должен содержать этот элемент, но таких псевдотензоров не имеется (см. ниже). По этой же причине, нет тензоров S_{ij}, у которых свободные индексы присвоены элементам M_i и ∇_j (либо наоборот). Наконец, если свободные индексы присвоены M_i и элементу ϵ_{jkl}, то для построения нужно свернуть оставшиеся индексы у этого элемента с тензором, но для этого имеются только уже указанные мономы δ_{ij}, (M_iM_j), которые при свертке с ϵ_{jkl} дают нуль.

Приступим к решению основной задачи.

Множество псевдотензоров. Имеется два типа их построения: 1) псевдотензоры, которые представимы в виде произведения «тензор»·«псевдоскаляр», 2) псевдотензоры, не представимые в виде такого произведения.

В первом случае, па основании предыдущих пунктов имеем следующие мономы:

$$\delta_{ij}(\nabla_k M_k), \quad \delta_{ij}(M_k M_l \nabla_k M_l), \quad \delta_{ij}(\varepsilon_{klm} M_k \nabla_l M_m),$$
$$M_i M_j(\nabla_k M_k), \quad M_i M_j(M_k M_l \nabla_k M_l), \quad M_i M_j(\varepsilon_{klm} M_k \nabla_l M_m),$$
$$\epsilon_{ijn} M_n(\nabla_k M_k), \quad \epsilon_{ijn} M_n(M_k M_l \nabla_k M_l). \tag{4}$$

Здесь в последней строке только два монома вследствие принятого соглашения п. III.

Во втором случае, в силу пункта II, элемент δ уже пе используется при построении мономов. Так как мономы, пе содержащие элемента ∇_k должны представлять собой произведения тензоров $\varepsilon_{ijk} M_k$, $M_i M_j$ па псевдоскаляры, то все они перечислены в списке (4). Поэтому, далее, мы строим все линейно независимые мономы класса $\mathcal{D}_1$, то есть содержащие ∇_k.

Мономы класса $\mathcal{L}_0 \cap \mathcal{D}_1$. Если один из свободных индексов присвоен элементу ∇_k, то, с точностью до эквивалентности, такие мономы имеют вид:

$$\nabla_j M_i, \ \nabla_i M_j, \ M_i M_l \nabla_j M_l, \ M_j M_l \nabla_i M_l, \ M_i M_j M_k M_l \nabla_k M_l, \ M_i M_l \nabla_l M_j, \ M_j M_l \nabla_l M_i. \tag{5}$$

Мономы класса $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{D}_1$. Эти мономы проклассифицируем по числу тех свободных индексов, которые несет на себе элемент ϵ. При этом, если этот элемент не несет свободных индексов, то он входит в состав какого-то псевдоскаляра, в состав которого обязательно входит элемент ∇. Следовательно, этот псевдоскаляр должен умножаться на один из тензоров δ_{ij}, либо $M_i M_j$, и поэтому такого типа мономы содержатся в списке (4).

Рассмотрим случай, когда элемент ϵ имеет один свободный индекс. Тогда ϵ может сворачивается с элементом ∇ и с одним элементом M_l. Последний может находиться либо справа от ∇_k, либо слева от него. В первом случае получаем векторный моном $\epsilon_{ikl} \nabla_k M_l$, во втором – $M_l M_m \epsilon_{ikl} \nabla_k M_m$. Для того чтобы получить на их основе мономы-псевдотензоры, нужно умножить их тензорно на псевдовектор M_j, который, как указано выше, единствен и который мы будем записывать слева от него. Другие мономы такого типа получаются перестановкой индексов i и j. В результате, получаем следующий список мономов:

$$M_j \epsilon_{ikl} \nabla_k M_l, \quad M_i \epsilon_{jkl} \nabla_k M_l, \quad M_j M_l M_m \epsilon_{ikl} \nabla_k M_m, \quad M_i M_l M_m \epsilon_{jkl} \nabla_k M_m. \tag{6}$$

Другой тип мономов такого же типа получается, когда элемент ϵ_{ikl} сворачивается с двумя элементами M_k и M_l, но которые разделены элементом ∇_j. В этом случае, такой моном не обращается тождественно в нуль. Эти мономы, ввиду четности числа элементов M в тензорном произведении, являются псевдотензорами. В результате, имеем дополнительно к списку (5) два монома $(\varepsilon_{ikl} M_k \nabla_j M_l)$, $(\varepsilon_{jkl} M_k \nabla_i M_l)$. Есть еще одна возможность сделать так, чтобы свертки элемента ϵ с парой элементов M_k и M_l не обращались в нуль. Для этого нужно разделить их псевдоскалярным дифференциальным оператором $M_m \nabla_m$. Свободный же индекс j при этом присваивается множителю –

элементу M_j, который записываем слева. При этом другие типы псевдоскаляров использовать для построения мономов такого типа нельзя вследствие соглашения пункта I. Такой способ построения псевдотензоров дает нам еще два монома: $(M_j\varepsilon_{ikl}M_k(\mathbf{M},\nabla)M_l)$, $(M_i\varepsilon_{jkl}M_k(\mathbf{M},\nabla)M_l)$. Следовательно, дополнительный список мономов, у которых один из свободных индексов присвоен элементу ϵ состоит из следующих мономов:

$$\varepsilon_{ikl}M_k\nabla_jM_l\,,\quad \varepsilon_{jkl}M_k\nabla_iM_l\,,\quad M_j\varepsilon_{ikl}M_kM_m\nabla_mM_l\,,\quad M_i\varepsilon_{jkl}M_kM_m\nabla_mM_l\,. \tag{7}$$

Наконец, список псевдотензоров, у которых оба свободных индекса присвоены элементу ϵ, учитывая список (4), состоит из двух дополнительных мономов:

$$\varepsilon_{ijk}M_m\nabla_mM_k\,,\quad M_l\varepsilon_{ijk}\nabla_kM_l\,. \tag{8}$$

Суммируем наши результаты наших рассуждений в виде следующего утверждения.

Теорема. *Имеется 25 линейно независимых мономов в тензорной алгебре с образующими: псевдовектор M_j и векторный оператор ∇_k, при ограничениях на их вид, сформулированных в пп. I-III, которые являются псевдотензорами второго ранга. Множество этих мономов представлено списками* (4)-(8).

Замечание. Псевдотензор $\varepsilon_{jkl}M_k\nabla_iM_l$, соответствующий потоку плотности магнитного момента, который определяет уравнение (3), находится в списке (7).

Литература

1. Ахиезер А.И., Барьяхтар В.Г., Пелетминский С.В. Спиновые волны / М.: Наука, 1967. – 368 с.
2. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ / М.: Наука, 1967. – 664 с.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика / М.: Наука, 1986.
4. Мак-Коннел А.Дж. Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике / М.: Гос. изд. ФМЛ, 1963. – 412 с.

FLUX DENSITY OF MAGNETIC MOMENT OF SPHERICALLY SYMMETRIC MAGNETIC

Yu.P. Virchenko, D.A. Chursin

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Abstract. It is found the total collection of algebraic independent monomials on the basis of which the general expression of magnetic moment $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ may be constructed when it is spherically symmetric contains spatial derivatives mo more than first order.

Key words: flux, magnetic moment density, pseudotensor, pseudoscalar, pseudovector.